

УТВЕРЖДАЮ:

И.о. директора ФГБУН «Институт математики
им. С. Л. Соболева Сибирского отделения РАН»
Менжор РАН, д.ф.-м.н.,

профессор  А. Е. Миронов

02 августа 2022 года

630090 г. Новосибирск, пр. Коптюга 4;

+7(383) 333-28-92; im@math.nsc.ru



ОТЗЫВ ВЕДУЩЕЙ ОРГАНИЗАЦИИ

о диссертационной работе Алексева Ивана Алексеевича

“Устойчивые случайные величины

и векторы с комплексным индексом устойчивости”,

представленной на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.05 — теория вероятностей и математическая статистика

Актуальность темы.

В диссертации И.А. Алексева получены новые интересные результаты в одном из наиболее классических разделов теории вероятностей, именно в предельных теоремах для нормированных сумм независимых одинаково распределенных случайных величин. В начале 1930-х годов Поль Леви поставил и решил следующую задачу. Если частичные суммы последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин после соответствующей нормировки имеют слабый предел, то каким этот предел может быть? Полем Леви было показано, что всякое предельное распределение является устойчивым, то есть удовлетворяет условию устойчивости следующего вида: если случайная величина ξ имеет устойчивое распределение, а ξ_1, ξ_2 — независимые копии ξ , то для любых двух положительных констант A, B найдется положительная константа C и число a такие, что случайная величина $A\xi_1 + B\xi_2$ имеет тоже самое распределение, что и случайная величина $C\xi + a$. При этом число C однозначно определяется из уравнения $A^\alpha + B^\alpha = C^\alpha$. Параметр α может принимать любые значения из интервала $(0, 2]$, соответствующие случайные величины (и их распределения) называют α -устойчивыми. Случай $\alpha = 2$ отвечает гауссовскому распределению. При фиксированном α каждое α -устойчивое распределение однозначно характеризуется тремя параметрами (сдвига, масштаба и асимметрии). Таким образом, класс возможных предельных распределений в задаче Поля Леви оказался невелик. Кроме того из условия устойчивости немедленно вытекает, что всякое устойчивое распределение может быть получено как слабый предел нормированных сумм независимых одинаково распределенных случайных величин. Таким образом, в задаче Поля Леви устойчивость является необходимым и достаточным условием.

Это относится к случаю вещественнозначных случайных величин и вещественных коэффициентов. В предложенной диссертационной работе автор задает и изучает естественный вопрос: а что можно ожидать при переходе от вещественных к комплексным и иным переменным? Несомненно, исследования в этом направлении, приводящие к дальнейшему расширению и обобщению классического принципа устойчивости, пред-

ставляются актуальными, интересными и перспективными.

Научная значимость и новизна результатов, выносимых на защиту.

Перейдем к более детальному анализу содержания диссертации.

Диссертация состоит из введения, 4 глав, заключения и приложения. Основные результаты работы сформулированы в виде теорем. Вспомогательные утверждения сформулированы в виде лемм. Общий объем диссертации составляет 98 страниц. Список литературы содержит 37 наименований. Основным объемом диссертации приходится на доказательства результатов, принадлежащих автору.

В первых двух главах диссертации строятся α -устойчивые комплекснозначные случайные величины для всех комплексных значений α , лежащих в открытом круге, построенном на интервале $(0, 2)$ как на диаметре. Условие устойчивости имеет в данном случае в точности такой же вид, как и в вещественном случае, но параметры A, B, C (см. предыдущий пункт) лежат не на положительной полуоси, как в вещественном случае, а на логарифмической спирали, задаваемой в полярных координатах (r, φ) уравнением $\text{Im } \alpha \cdot \ln r = -\text{Re } \alpha \cdot \varphi$. Для вещественных α эта конструкция в точности соответствует классу двумерных устойчивых распределений, а для не вещественных α соответствующее распределение уже не является двумерным устойчивым.

При построении α -устойчивых случайных величин с комплексным α за основу бра-лось хорошо известное представление Леви-Хинчина устойчивой случайной величины в виде стохастического интеграла по пуассоновскому случайному полю. К стандартному вещественному параметру устойчивости из интервала $(0, 2)$ был также добавлен дополнительный параметр "комплексности" γ , принимающий произвольные вещественные значения.

В диссертации найдены характеристические функции построенных α -устойчивых величин; доказано, что соответствующие распределения являются двумерным безгранично делимыми и абсолютно непрерывными. Показано, что условие устойчивости является характеристическим для введенного класса устойчивых случайных величин. Получены достаточные условия для принадлежности к области притяжения α -устойчивых распределений, причем стандартная нормировка в соответствующей предельной теореме, как и в вещественном случае, имеет вид $n^{1/\alpha}$ (в силу комплексности α речь идет фактически о матричной нормировке). Также в диссертации были построены α -устойчивые процессы Леви и отвечающие им полугруппы операторов. Найдены генераторы (инфинитезимальные операторы) построенных полугрупп. Данные генераторы являются некоторым обобщением классических операторов Римана-Лиувилля.

В третьей главе результаты второй главы обобщаются на случайные вектора со значениями в C^l , $l \in N$. Для комплексных α введено понятие α -устойчивого случайного вектора, доказаны соответствующие предельные теоремы. Для кватернионно-значных случайных величин введено понятие кватернионной устойчивости и показано, что всякая кватернионно-устойчивая величина является линейным преобразованием комплексно-устойчивого случайного вектора.

В четвертой главе построен аналог оператора Римана-Лиувилля в случае комплексного индекса α и найдена вероятностная аппроксимация решения задачи Коши для соответствующего эволюционного уравнения.

Для удобства читателя в приложении приведены основные результаты об операторно-устойчивых случайных векторах, необходимых для данной диссертации.

Основные результаты диссертации состоят в следующем:

- построены α -устойчивые случайные величины и векторы с комплексным индексом устойчивости;
- дано описание множества предельных распределений в схеме суммирования комплексных независимых одинаково распределенных случайных величин и векторов с комплексными нормировкой и центрированием;
- построены соответствующие α -устойчивым векторам процессы Леви и найдены их генераторы;
- построен аналог оператора Римана-Лиувилля в случае комплексного индекса и найдена вероятностная аппроксимация решения задачи Коши для соответствующего эволюционного уравнения.

Полученные в диссертации результаты четко сформулированы и строго доказаны; основная часть диссертации содержит 37 теорем. Эти результаты являются новыми, интересными и значимыми, а их доказательства потребовали от автора знания и применения весьма сложной математической техники и изобретательности.

Работа написана хорошим литературным языком и содержит относительно небольшое число текстовых неаккуратностей. В основном это касается пунктуации – пропуска запятых и точек в некоторых местах, а также ряда опечаток.

Есть и замечание по стилю. Нам представляется излишним количество утверждений, именуемых теоремами. Мы бы отнесли к таковым лишь значимые утверждения, доказательства которых требуют существенных усилий, а иные утверждения (как, к примеру, теоремы 3 и 4) назвали бы "предложениями" либо "свойствами".

Приведенные замечания ни в коей мере не умаляют достоинства полученных результатов.

Заключение.

Представленная диссертация посвящена решению актуальных задач теории вероятностей. Она является самостоятельным законченным фундаментальным исследованием и соответствует специальности 01.01.05 — теория вероятностей и математическая статистика. Поставленные задачи полностью решены, доказательства теорем проведены на строгом математическом уровне. Получение большинства результатов, представленных в диссертации, потребовало от автора применения не только вероятностных методов, но и современных методов анализа, теории операторов и теории функций комплексного переменного, что свидетельствует о несомненном наличии у него достаточно высокой математической квалификации. По теме диссертации автором опубликовано 3 работы в изданиях из перечня рецензируемых научных журналов ВАК. Научные положения, выносимые на защиту, достаточно полно отражены в опубликованных работах. Основные результаты диссертации докладывались на различных математических семинарах и конференциях. Автореферат полно и правильно отражает содержание диссертации.

Представленная диссертационная работа соответствует требованиям, предъявляемым к кандидатским диссертациям по специальности «01.01.05 — теория вероятностей и математическая статистика», а ее автор, Алексеев Иван Алексеевич, безусловно заслуживает присуждения ему степени кандидата физико-математических наук.

Результаты диссертации можно рекомендовать к использованию в исследованиях, проводимых в МГУ им. М. В. Ломоносова, МИ РАН им. В. А. Стеклова, СПОМИ

РАН им. В. А. Стеклова, ИМ СО РАН им. С. Л. Соболева, Санкт-Петербургском и Новосибирском государственных университетах.

Основные результаты диссертации доложены автором в режиме онлайн на заседании семинара лаборатории теории вероятностей и математической статистики Института математики им. С.Л. Соболева 24 мая 2022 г., протокол № 3. Принято решение — одобрить положительный отзыв.

Ведущий научный сотрудник лаборатории
теории вероятностей и математической статистики ИМ СО РАН
д.ф.-м.н., профессор
630090, г. Новосибирск, пр. Коптюга 4;
+7(913)-486-45-54; foss@math.nsc.ru

С. Г. Фосс

Главный научный сотрудник лаборатории теории вероятностей
и математической статистики ИМ СО РАН
д.ф.-м.н., профессор
630090, г. Новосибирск, пр. Коптюга 4;
+7(913)-895-62-49; lotov@math.nsc.ru

В. И. Лотов

Подпись работника	<i>Фосс С. Г.</i>
	<i>Лотов В. И.</i>
Заверяю	<i>Е.Г. Кирда</i>
Зав. канцелярией	
ИМ СО РАН	Е.Г. Кирда
«02» 08	20 22 г.

