ОТЗЫВ

научного руководителя на диссертацию
Дмитрия Владимировича Грибанова

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧ ЦЕЛОЧИСЛЕННОЙ ЛИНЕЙНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ С ОГРАНИЧЕННЫМ СПЕКТРОМ МИНОРОВ

представленную на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук по специальности
01.01.09 — дискретная математика и математическая кибернетика

Задача целочисленного линейного программирования (задача ЦЛП) является одной из классических и важнейших задач дискретной оптимизации. Многие задачи дискретной оптимизации могут быть сформулированы в терминах ЦЛП. Несмотря на то, что задача ЦЛП является хорошо изученной с многих сторон, на настоящее время имеется ряд открытых вопросов, связанных с теорией ЦЛП. Одним из них является вопрос о вычислительной сложности задачи ЦЛП на классах входных данных, у которых ограничены абсолютные значения всех миноров их матриц ограничений. Структура множеств допустимых решений таких задач ЦЛП также является весьма интересной областью исследований. Повышенное внимание к задачам ЦЛП с ограниченными минорами вызвано тем фактом, что оптимизация целочисленного линейного функционала на множестве целых точек, заданных системой целочисленных неравенств с вполне унимодулярной матрицей ограничений, может быть выполнена за полиномиальное время. Соображения устойчивости подсказывают, что этот факт должен иметь место и при невысоком росте миноров матриц ограничений. Однако, на настоящее время имеется всего три результата о сложности задач ЦЛП, имеющих ограниченные миноры. Это результаты С.И. Веселова и А.Ю. Чиркова, В.Е. Алексеева и Д.В. Захаровой, Ф. Эйзенбранда с соавторами. Диссертация Д.В. Грибанова посвящена исследованию задач ЦЛП с ограниченными минорами и вносит существенный вклад в эту область.

В первой главе диссертации рассматривается классическая теорема А. Хинчина о выпуклом теле и доказываются ее улучшения применительно к полиэдрам. В первой главе показывается, что если многогранник P задается системой неравенств $\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$, то P обязательно содержит $n+1$ целых точек, когда ширина P не менее чем $F(\mathbf{A}) \cdot (n+1)$, где n — число столбцов матрицы $\mathbf{A}$, а $F(\cdot)$ — некоторая функция, определяемая минорами матрицы $\mathbf{A}$. Показывается также, что если P — симплекс, то он содержит содержит целую точку, когда его ширина не менее чем $\delta(\mathbf{A}) - 1$, где $\delta(\mathbf{A})$ — минимальное абсолютное значение ненулевых миноров рангового порядка матрицы $\mathbf{A}$. Более того, эти результаты являются конструктивными и позволяют находить целые точки внутри широких полиэдров за полиномиальное время.

Во второй главе диссертации доказывается, что ширина симплекса с ограниченными минорами может быть вычислена за полиномиальное время. В данной главе также приводятся алгоритмы для решения задач ЦЛП для некоторых классов полиэдров. Доказывается, что сложность данных алгоритмов является полиномиальной или субэкспоненциальной при некоторых условиях, одним из которых является условие ограниченности миноров.

В третьей главе диссертации рассматриваются естественные ЦЛП-постановки задач о независимом множестве, о вершинном и о реберном доминирующих множествах. Для задачи о независимом множестве рассматриваемая ЦЛП-постановка для графа G выглядит следующим образом: $\max(\mathbf{1}, \mathbf{x})$ при ограничениях $\mathbf{I}^{\mathrm{T}}(G)\mathbf{x} \leq \mathbf{1}$ и $\mathbf{x} \in \{0,1\}^{|V(G)|}$, где $\mathbf{I}(G)$ —