

ОТЗЫВ

научного руководителя о диссертации М.В. Платоновой
«Аппроксимация решения задачи Коши для эволюционных
уравнений с оператором Римана-Лиувилля математическими
ожиданиями функционалов от стохастических процессов»,
представленной на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
по специальности 01.01.03 – математическая физика

Мария Платонова поступила в аспирантуру в 2015 году, до этого она под моим руководством защитила сначала бакалаврскую, а потом магистерскую работу на кафедре высшей математики и математической физики физического факультета СПбГУ. За это время Мария проявила себя упорным и вдумчивым исследователем, способным выдвигать самостоятельные идеи.

В качестве основной диссертационной темы ей были предложены задачи, связанные с представлением решений задачи Коши для некоторых классов эволюционных уравнений математическими ожиданиями функционалов от стохастических процессов. Такие представления являются важным инструментом для исследования свойств решений эволюционных уравнений, возникающих при описании различных физических процессов. Представление решения в виде среднего значения в виде среднего значения функционала от процесса называют еще представлением в виде функционального интеграла, так как в качестве области интегрирования в данном случае обычно выступает функциональное пространство, которому принадлежат траектории стохастического процесса. Самым известным примером функционального интеграла является знаменитая формула Фейнмана-Каца, представляющая решение уравнения теплопроводности в виде среднего значения значения функционала от винеровского процесса. Другим примером функционального интеграла является представление решения эволюционного уравнения с оператором дробного дифференцирования порядка меньше двух. в этом случае решение соответствующего эволюционного уравнения может быть представлено в виде математического ожидания функционала от устойчивого процесса Леви.

В случае, когда эволюционное уравнение содержит в правой части оператор дифференцирования порядка больше двух (целого или дробного), проблема становится существенно более сложной. В данном случае решение задачи Коши не может быть представлено в виде среднего значения функционала от устойчивого процесса, так как при значении показателя устойчивости больше двух соответствующих процессов Леви не существует. Проблема также не может быть решена путем замены операции вычисления математического ожидания на вычисление интеграла по некоторой (невероятностной) мере в пространстве траекторий так как известно, что мера, которую фундаментальное решение эволюционного уравнения порождает в пространстве траекторий на алгебре цилиндрических множеств, не может быть продолжена до счетно-аддитивной функции на сигма-алгебре, порожденной цилиндрическими множествами.

Многими авторами предпринимались попытки получения интегральных представлений решения задачи Коши для эволюционных уравнений, содержащих оператор дифференцирования порядка больше двух. В большинстве встречающихся в литературе работ представления строились в виде интеграла по траекториям

так называемого псевдо-процесса. Эти представления представляют из себя формальную запись решения задачи Коши в виде интеграла по конечно-аддитивной мере, которая не может быть сделана счетно-аддитивной. Первыми результаты, использующие псевдо-процессы, принадлежат Крылову и Далецкому, далее эта теория развивалась многими авторам (Хохберг, Мацукки, Орсингер, Жао, Тоальдо, Лашаль и др.).

Другой подход, ведущий свое начало с работы Фунаки, и получивший дальнейшее развитие в работах Орсингера и Мацукки, интегральные представления решения задачи Коши строились с помощью весьма сложных комплексных процессов, что во-первых не давало возможность рассматривать дифференциальные операторы произвольного порядка, а во-вторых, на начальную функцию накладывались весьма жесткие условия – в частности она должна быть целой аналитической.

В диссертация М.В.Платоновой построены вероятностные представления решения задачи Коши для эволюционного уравнения с оператором дробного дифференцирования (оператор Римана-Лиувилля) порядка большего двух а также для эволюционного уравнения с оператором дифференцирования произвольного порядка большего двух. В работе использовалось известное представление устойчивых случайных величин в виде стохастических интегралов по пуассоновской случайной мере. Для рассматриваемых М.В.Платоновой значений параметра такое представление корректно определено только в «допредельном» варианте, когда из области интегрирования удалена некоторая окрестность нуля, причем стохастический интеграл не имеет предела при стягивании этой окрестности к точке ноль. Использование методов теории обобщенных функций и теории операторов позволило выбрать подходящую регуляризацию расходящихся интегралов и перейти к пределу при стягивании окрестности к нулю. В диссертации также получены оценки (в метрике пространств Соболева) разности между точным решением и его вероятностной аппроксимацией, под которой понимается математическое ожидание допредельного выражения. К преимуществам предложенного М.В.Платоновой подхода состоит в том, что случай целого и нецелого порядка дифференцирования рассматривается достаточно единообразно.

Хочется отметить незаурядную настойчивость и упорство, проявленную Марией Платоновой в процессе работы над диссертацией. Ей одновременно пришлось как выдвигать собственные нетривиальные математические идеи, так и преодолевать значительные технические трудности. Считаю работу М.В.Платоновой успешной, а саму Марию способным и квалифицированным исследователем, вполне готовым к самостоятельной научной деятельности.

Я считаю, что диссертационная работа М.В.Платоновой «Аппроксимация решения задачи Коши для эволюционных уравнений с оператором Римана-Лиувилля математическими ожиданиями функционалов от стохастических процессов» по своему содержанию соответствует специальности 01.01.03 – математическая физика, а ее автор заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук.

Научный руководитель,
доктор физико-математических наук

Н.В.Смородина

20 февраля 2017 г.

