

Отзыв научного руководителя
о диссертации Ярослава Юрьевича Коптелова
”Об асимптотике собственных функций абсолютно непрерывного спектра
задачи рассеяния нескольких заряженных квантовых частиц”,
представленной на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
по специальности 01.01.03 ”математическая физика”

Ярослав Юрьевич Коптелов окончил физический факультет СПбГУ по кафедре высшей математики и математической физики в 2013 году. В течение 2013-2014 годов работал на той же кафедре в должности инженера-исследователя. В 2014-2018 гг. обучался в аспирантуре СПбГУ на той же кафедре. В 2018 году успешно окончил аспирантуру. Я руководил работой Ярослава Коптелова в бакалавриате, магистратуре и аспирантуре. В настоящее время им закончена подготовка кандидатской диссертации, работа прошла необходимую апробацию и готова к защите.

Тематика исследований Ярослава Коптелова относится к области так называемого дифракционного подхода в теории рассеяния, предложенного в работах В.С.Буслаева, С.П.Меркурьева и С.П.Саликова в конце 1970-х годов. Изначально метод был использован в задаче рассеяния трех одномерных квантовых частиц с финитными парными потенциалами для построения координатных асимптотик собственных функций абсолютно непрерывного спектра на бесконечности в конфигурационном пространстве. Позднее, начиная с середины 2000-х годов, в работах В.С.Буслаева и С.Б.Левина метод был обобщен на системы трех одномерных и трехмерных одноименно заряженных частиц. При этом, даже при отсутствии теоремы существования и единственности решения задачи рассеяния, на основе полученных асимптотических построений в одномерном случае были предприняты успешные попытки численного анализа задачи. К области дифракционного подхода и относится работа Ярослава Коптелова. Она связана с обобщением полученных ранее результатов на системы четырех и более одноименно заряженных частиц, а также с распространением дифракционного подхода на систему трех трехмерных заряженных квантовых частиц при наличии в двух парных подсистемах кулоновских потенциалов притяжения. Последнее допущение ведет к необходимости учета бесконечного дискретного спектра парного оператора Шрёдингера при построении координатной асимптотики трехчастичных собственных функций абсолютно непрерывного спектра.

Остановимся подробнее на постановке задачи и результатах работы. В случае системы трех трехмерных одноименно заряженных частиц после отделения движения центра масс возникает конфигурационное пространство \mathbb{R}^6 . В этом пространстве определяются так называемые ”экраны”, отвечающие совпадению координат частиц в каждой паре. В асимптотической области конфигурационного пространства выделяются параболические окрестности ”экранов”, $\Omega_i = \{(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i) : x_i < y_i^\nu, \nu < 1\}$, $i = 1, 2, 3$, а также область, в которой все три частицы хорошо разделены: $\Omega_0 = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}), x_i > y_i^\mu, \forall i\}$, $\frac{1}{2} < \mu < \nu < 1$. При этом в области Ω_0 справедливо так называемое ВВК-приближение для старшего порядка асимптотики собственных функций непрерывного спектра. В параболических областях Ω_i , $i = 1, 2, 3$, справедливо ”почти разделение переменных”. А именно, оператор Шрёдингера трехчастичной системы в области Ω_i , $i = 1, 2, 3$ допускает представление $H = H_i^{sep} + \Delta V_i$, где первое слагаемое $H_i^{sep} = -\Delta_{\mathbf{x}_i} - \Delta_{\mathbf{y}_i} + \frac{\alpha}{x_i} + \frac{\alpha^{eff}}{y_i}$ допускает разделение переменных. Второе слагаемое допускает оценку $\Delta V_i = O\left(\frac{x_i}{y_i}\right)$,

которая в области Ω_i означает быстрое (быстрее кулоновского потенциала) убывание потенциала ΔV_i . Здесь α и α^{eff} – постоянные величины.

Это, в свою очередь, позволяет определить приближенное представление трехчастичной собственной функции абсолютно непрерывного спектра в каждой такой асимптотической параболической области Ω_i в виде спектрального разложения (с некоторыми весовыми функциями - плотностями) по собственным функциям оператора Шрёдингера парной подсистемы. Согласование приближенных решений в различных асимптотических областях позволяет определить неизвестные наборы плотностей и, тем самым, доопределить известное ВВК-представление из области Ω_0 внутрь асимптотических параболических областей Ω_i , что является безусловно важным для различных физических приложений. Критерием качества полученных координатных асимптотик в отсутствие теоремы существования и единственности решения задачи рассеяния является скорость убывания невязки найденного выражения в уравнении Шрёдингера. Заметим, что каждая из упомянутых выше параболических областей Ω_i отвечает сближению частиц в выделенной паре при сохранении удаленности третьей частицы и, тем самым, охватывает определенный (дополнительный к области Ω_0) набор асимптотических конфигураций частиц в системе. Отметим также, что структура координатной асимптотики трехчастичных собственных функций абсолютно непрерывного спектра в областях Ω_i , $i = 1, 2, 3$, полученная в работах В.С.Буслаева и С.Б.Левина для системы трех трехмерных одноименно заряженных квантовых частиц, позволила уточнить и дополнить результаты Е.О.Альта и А.Мухамеджанова 1990-х годов.

Диссертация состоит из двух глав. В первой главе рассматривается обобщение результатов, полученных ранее, на систему четырех трехмерных одноименно заряженных частиц и систему произвольного числа N одноименно заряженных частиц. Основным результатом первой главы является построение анзаца обеспечивающего быстрое (быстрее кулоновского потенциала) убывание невязки во всех асимптотических областях конфигурационного пространства. Согласно доказанной теореме невязка предложенного анзаца в угловой ε -окрестности n -частичного направления рассеяния вперед убывает как величина $O(y^{-1-\varepsilon})$, то есть быстрее кулоновского потенциала, и убывает как $O(y^{-1})$ лишь на самом многочастичном направлении рассеяния вперед. Описана перестройка анзаца при переходе между различными асимптотическими областями. Отметим, что, как показано в работе, ограниченность некоторой (одной или нескольких) координаты x_i в наборе парных координат Якоби связано с заменой этой координаты в части исходного ВВК-представления для собственной функции непрерывного спектра на выражение

$$x_i \longrightarrow -i \frac{\nabla_{\mathbf{k}_i} \Psi(\mathbf{X}, \mathbf{Q})}{\Psi(\mathbf{X}, \mathbf{Q})}.$$

Здесь $\Psi(\mathbf{X}, \mathbf{Q})$ описывает решение задачи рассеяния в подсистеме с набором координат \mathbf{X} и моментов \mathbf{Q} (и асимптотическим граничным условием Ψ^{BBK}) при условии $X \ll R$, где R – гипер-радиус всей системы. Здесь также использовано обозначение \mathbf{k}_i для момента, сопряженного координате x_i .

Во второй главе диссертации рассматривается задача рассеяния трех трехмерных заряженных частиц при наличии в двух парных подсистемах кулоновских потенциалов притяжения. При этом исследуется координатная асимптотика совокупного вклада дискретного спектра оператора Шрёдингера парной подсистемы в структуру трехчастичных собственных функций абсолютно непрерывного спектра. Как и в первой главе решение задачи основано на согласовании известного решения типа приближения искаженных волн (ВВК-приближение) и спектрального разложения по собственным функциям парной подсистемы в области "почти разделения переменных". Отметим, что при наличии потенциала кулоновского притяжения в парной подсистеме спектральное разложение содержит вклад, отвечающий дискретному спектру парного оператора

Шрёдингера, наряду со вкладом абсолютно непрерывного спектра, изученным ранее в рамках дифракционного подхода.

Отметим несколько существенных вопросов, исследованных при решении этой задачи. Первый из них касается построения "производящей" функции. Это построение приводит к существенному упрощению структуры вклада дискретного спектра парного оператора Шрёдингера в спектральном разложении, а именно - к замене тройной вложенной бесконечной суммы по квантовым числам на однократную бесконечную сумму по главному квантовому числу и интеграл по единичной сфере \mathbb{S}^2 . Эта замена является критической для построения искомой асимптотики. Второй важный вопрос связан с вычислением нормировочного интеграла. Основной вклад в нормировочный интеграл вычисляется с помощью комбинации многомерного метода стационарной фазы и решения некоторой модельной задачи. При этом удается построить и разрешить в старшем порядке интегральное уравнение с сингулярным ядром для плотности в части спектрального разложения, отвечающей дискретному спектру парной подсистемы. В свою очередь, анализ координатной асимптотики совокупного вклада дискретного спектра парной подсистемы в структуру трехчастичных собственных функций абсолютно непрерывного спектра проводится методом Пуассона. Основным результатом второй главы заключается в построении старшего члена этой асимптотики в асимптотической области Ω_j (отвечающей парному кулоновскому потенциалу притяжения) при $x_j \gg 1$:

$$\Xi^{total}(\mathbf{X}, \mathbf{Q}) \sim \frac{3}{2\sqrt{\pi}} U(\mathbf{y}_j, \mathbf{Q}, -\hat{\mathbf{x}}_j) \frac{\sin(2\sqrt{|\alpha|x_j})}{C(\sqrt{|\alpha|x_j})(|\alpha|x_j)^{5/4}},$$

где $C(R) = B_1 + \frac{3}{2}B_2 \ln R - B_2 \ln 2 + iB_2 \frac{\pi}{4}$, функция $U(\mathbf{y}_j, \mathbf{Q}, -\hat{\mathbf{x}}_j)$ - гладкая функция своих аргументов. Значения параметров B_1 , B_2 определены в результате численного анализа модельной задачи: $B_1 = -0.315 \pm 0.001$, $B_2 = -0.667 \pm 0.001$.

Обсудим новизну результатов диссертации. Имевшиеся ранее результаты, связанные с описанием координатной асимптотики на бесконечности собственных функций абсолютно непрерывного спектра для системы трех трехмерных одноименно заряженных квантовых частиц, существенно обобщены. Предложенный в диссертации анзац позволяет рассматривать системы произвольного конечного числа N одноименно заряженных частиц и, тем самым, описывает произвольные асимптотические мультикластерные конфигурации системы. Этот результат безусловно является новым и существенным, позволяя в терминах системы аналитических преобразований набора "ограниченных" пространственных координат проследить за "деформацией" пространства. И сам этот результат, и предложенная в работе техника несомненно могут быть использованы при построении асимптотики собственных функций абсолютно непрерывного спектра многочастичной системы с медленно убывающими парными потенциалами общего вида. Отметим, что уже в случае системы четырех частиц, исследованной в работе как наиболее простая промежуточная система с асимптотическими кластерами различного типа, от диссертанта потребовалась в том числе очень кропотливая работа по оценке невязки, а также существенные идейные соображения, связанные с необходимыми обобщениями.

Рассмотренная во второй главе система трех заряженных частиц при наличии парных кулоновских потенциалов притяжения являлась существенно новой также в смысле использованного дифракционного подхода. Наличие бесконечного кулоновского дискретного спектра в парных подсистемах серьезно усложнило структуру спектральных разложений в областях Ω_j . Принципиальный прорыв здесь удалось совершить после введения "генерирующей" функции, позволяющей учитывать вырождение двухчастичных связанных состояний с помощью интегрирования в \mathbb{S}^2 . Особой изобретательности потребовало вычисление нормировочного интеграла, а также построение и исследование модельной задачи. Еще раз отметим, что в работе удалось выделить совокупный

вклад дискретного спектра оператора Шрёдингера в парных подсистемах в структуру трехчастичной собственной функции абсолютно непрерывного спектра. Этот результат несомненно является новым и существенным в том числе с точки зрения возможных приложений к описанию многочастичных физических процессов.

По теме диссертации Ярослава Коптелова опубликовано четыре статьи (совместных с научным руководителем и А.М.Будылиным) в престижных журналах *Few-Body Systems*, *Physics of Atomic Nuclei*, *Зап. Науч. Сем. ПОМИ РАН* и в рецензируемом сборнике трудов международной конференции. Отметим, что еще одна работа в журнале *Physics of Atomic Nuclei* опубликована Ярославом Коптеловым (в соавторстве с В.С.Буслаевым, научным руководителем и Д.А.Стрыгиной) по теме, близкой к теме диссертации. Во всех работах существенный вклад в получение результатов принадлежит Ярославу Коптелову. Ярослав многократно выступал с устными докладами на международных конференциях и научных семинарах. Он является исполнителем по грантам, поддержанным РФФИ и РФФ. Успехи Ярослава Коптелова были отмечены престижными премиями для молодых ученых (стипендия имени Рохлина).

Диссертация Ярослава Коптелова выполнена на высоком научном уровне и безусловно удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к кандидатским диссертациям по специальности 01.01.03 - математическая физика. В процессе работы Ярослав Коптелов проявил самостоятельность, упорство, инициативу и техническую изобретательность. Считаю, что Ярослав Юрьевич Коптелов сформировался как способный и мотивированный исследователь с большим потенциалом.

24 февраля 2019 г.

Кандидат физ.-мат. наук,
Доцент

С.Б.Левин

Личную подпись заверяю

начальник отдела кадров №3

Н. И. МАШ



2. 2019