Отзыв научного руководителя

о дисскртации И. К. Злотникова

«Идеалы алгебры ограниченных аналитических функций: интерполяция и уравнение Безу»,

представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертация была написана под моим руководством в период обучения И.К.Злотникова в аспирантуре ПОМИ РАН. Она состоит трех глав. Первая глава – вводная. Во второй рассматриваются некоторые вопросы вещественной интерполяции, связанные с идеалами в алгебрах ограниченных аналитических функций и в абстрактных аналогах таких алгебр (более общим образом – с не только с идеалами, но и с модулями над этими алгебрами). Говоря формально, один из главных результатов этой главы – теорема о K-замкнутости в шкале коинвариантных подпространств $K^p{}_\theta$ оператора сдвига на окружности при $1<p\leq\infty$ и ее весовой аналог. В содержательном плане я бы выделил другой аспект: доказательство этой теоремы оказалось близким к доказательству известного довольно давно аналогичного утверждения о пространствах Харди на двумерном торе, так что естественно встал вопрос об общей формулировке. Такая формулировка была найдена. Она охватывает не только две описанные ситуации, но и многие иные, в том числе, взятые из абстрактной теории равномерных алгебр. Заслуживает упоминания еще одно обстоятельство: для пространств Харди на двумерном торе и для коинвариантных подпространств оператора сдвига упомянутые выше результаты о K-замкнутости доказывались с помощью теории сингулярных интегральных операторов, в частности, ключевым моментом было удачное применение разложения Кальдерона-Зигмунда. В то же время, найденная авторм общая формулировка охватывает также и случаи, когда этот аппарат недоступен, что привело к необходимости разработать иной подход к доказательству, связанный с так называемыми «срезающими аналитическими функциями».

В третьей главе рассматриваются метрические аспекты так называемой «задачи об идеалах» в алгебре H^∞ ограниченных аналитических функций в круге. Задача эта естественно возникла после доказательства Л. Карлесоном теоремы о короне, которая гласит, что ненулевые ограниченные аналитические функции $f_1, \ldots, f_n$ в круге порождают несобственный идеал в

H^{∞} (то есть идеал, совпадающий со всей этой алгеброй) тогда и только тогда, когда сумма их модулей отделена от нуля в круге. Спрашивается, как описать идеал, порожденный функциями $f_1, \ldots, f_n$, если он – собственный, то есть если последнее условие нарушено? Полного описания нет до сих пор. Очевидно, что для принадлежности функции h этому идеалу необходимо, чтобы в круге выполнялось неравенство

$$|h(z)| \leq C(|f_1(z)| + \ldots + |f_n(z)|),$$

но достаточным является лишь подобное неравенство, в котором правая часть возводится в степень 2+ε. Вторая глава диссертация посвящена, однако, другому аспекту этой задачи, а именно, вопросу о том, что будет, если рассматривать бесконечные наборы функций f_j. Впервые такие постановки в контексте теоремы о короне и задачи об идеалах появились в начале 1980-х годов после работ Т. Вольфа. Вопрос ставится так: при каких услвиях функция h представима в виде $h=\Sigma f_j g_j$ для бесконечного набора «данных» f_j? Как можно оценить решение $\{g_j\}$? Вот более конкретная постановка: предположим, что для бесконечного набора данных справа в приведенной формуле вместо суммы модулей (т.е. нормы пространства l^1) фигурирует подходящая степень нормы некоторого идеального пространства E. Существует ли решение, лежащее поточечно в порядково двойственном пространстве E'? В диссертаци получен положительный ответ на этот вопрос в случае, если E является q-вогнутой решеткой хотя бы для какого-то конечного q. Заметим, что таковы, например, все пространства l^r, $1 \leq r < \infty$.

В целом, я оцениваю диссертацию высоко и считаю, что она удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к кандилатсяки диссертациям по указанной специальности. Особо хочу отметить широкий арсенал привлеченных технических средств – от теории сингулярных интегральных операторов до теорем о неподвижной точке.

Порядок работы над диссертацией был обратным порядку изложения. Задача, описанная в главе 3, была поставлена и решена сначала. Автор нашел решение самостоятельно, моя роль (кроме постановки) свелась к обсуждениям и советам. Затем мы работали над материалом, представленным в главе 2, вместе, и я бы оценил наш вклад как примерно равный – с той оговоркой, что в проработке технических аспектов участие И.К.Злотникова существенно превышало мое.

Доктор физ.-мат. наук

Академик РАН С. В. Кисляков

Подпись руки С.В. Кислякова
УДОСТОВЕРЯЮ
Помощник директора ПОМИ РАН
А.Н. Антонова
«17» 05 2019