

ОТЗЫВ
НАУЧНОГО РУКОВОДИТЕЛЯ
о диссертации Максима Владимировича Бабушкина
“Оценки приближения функции
посредством модулей непрерывности различных порядков”,
представленной на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Диссертация М. В. Бабушкина посвящена оценкам отклонений линейных методов приближения в терминах различных структурных свойств приближаемой функции. Это классическая тематика теории приближений. Диссертант получил новые интересные результаты в трех вопросах этой тематики. Один из этих вопросов относится к константам в классических неравенствах, а два — к порядковым оценкам нового вида.

В первой главе диссертации получена серия неравенств типа Джексона для производных, то есть оценок наилучшего приближения функции тригонометрическими многочленами через модули непрерывности любого порядка от производных также любого порядка.

Задача о точных константах для модулей непрерывности высоких порядков, как правило, очень трудна. Поэтому представляет интерес разработка методов получения таких неравенств по возможности с небольшими константами. Попытки получения таких неравенств связаны с использованием тех или иных линейных комбинаций функций Стеклова в качестве промежуточных приближений. Современный этап исследования этой темы начинается с работы С. Фукара, Ю. В. Крякина и А. Ю. Шадрина 2009 года, в которой был предложен новый метод, основанный на теореме Банаха о разложении обратного оператора в сумму геометрической прогрессии. Затем в работах О. Л. Виноградова, В. В. Жука и ряда других математиков этот метод был усовершенствован и константы улучшены. В этих работах основное внимание уделялось константам в неравенствах с модулями непрерывности самой функции. Результаты для модулей непрерывности производных тоже были получены как частные случаи общей схемы, но целенаправленные усилия по их улучшению не прилагались.

М. В. Бабушкин как раз и занялся неравенствами с модулями непрерывности производных. Предложенная им модификация метода позволила установить серию таких неравенств с наилучшими известными на настоящий момент постоянными. Все оценки достигаются линейными методами.

Постоянные в оценках выражаются в виде сумм и интегралов, зависящих от входящих в условие параметров (порядка производной, порядка и шага модуля непрерывности). Поведение этих констант при том или ином поведении параметров, как и сравнение новых констант с полученными ранее, вообще говоря, неочевидно. Диссертант провел такое исследование и показал, что в ряде случаев его результаты лучше, чем у предшественников. В заключение главы он привел таблицы рекордных констант при различных значениях параметров. Из этих таблиц видно, что в разных случаях лучший результат дают разные методы.

И доказательство неравенств, и исследование констант потребовали кропотливых оценок норм участвующих в деле операторов, с которыми диссертант успешно справился.

Отмечу, что и другие неравенства диссертации устанавливаются с явными константами. В большинстве случаев явные константы или приводятся впервые, или оказываются меньше ранее известных.

Вторая глава диссертации посвящена оценкам отклонений положительных методов приближения в фиксированной точке. Этот круг вопросов берет начало от асимптотической формулы Е. В. Вороновской, описывающей поведение отклонений многочленов Бернштейна от дважды дифференцируемой функции. С. Н. Бернштейн обобщил формулу Вороновской на производные четного порядка; недавние ее обобщения на производные нечетного порядка и на другие операторы принадлежат С. А. Теляковскому.

Диссертант явно оценил остаточные члены этих и аналогичных асимптотических формул. По сравнению с результатами предшественников его оценки обладают двумя существенными новыми характеристиками.

Во-первых, оценки ведутся через локальный модуль непрерывности. Разумеется, при равномерном выполнении условий получаются равномерные оценки классического типа.

Во-вторых, оцениваются не только сами остаточные члены асимптотических формул, но и их мажоранты, построенные по принципу сильной аппроксимации. Под сильными отклонениями или отклонениями в смысле сильной аппроксимации принято понимать величины, содержащие не сами отклонения приближаемой функции (как в классической аппроксимации линейными методами), а их модули.

Оценки такого вида ранее не встречались. В конце главы приводится серия примеров для классических операторов сумматорного и интегрального вида.

Третья глава диссертации содержит двусторонние оценки отклонений линейных методов приближения через модули непрерывности нецелого порядка.

Одна из классических постановок задач теории приближений такова. Для данного метода приближения найти структурную характеристику функции, которая по порядку совпадает с отклонением данного метода. Такие результаты имеют вид двусторонних оценок, и естественным образом возникает вопрос о наилучших постоянных в этих оценках.

Первые такие двусторонние оценки для методов приближений, построенных на базе рядов Фурье, получили в 1960-е годы независимо В. В. Жук и Р. М. Тригуб. В частности, они доказали, что отклонения средних Рисса четного порядка описываются модулями непрерывности того же порядка. Кроме того, В. В. Жук получил двусторонние оценки отклонений средних Рисса нечетного порядка и в том числе средних Фейера (средние Рисса первого порядка совпадают со средними Фейера). Оказалось, что в этих оценках помимо модулей непрерывности самой функции участвуют модули непрерывности тригонометрически сопряженной функции к первообразной.

Для характеристики отклонений средних Рисса нецелого порядка вопрос открыт. Возникает идея использовать модули непрерывности и тригонометрическое сопряжение нецелого порядка.

Диссертант добился частичного успеха на этом пути. Он получил двусторонние оценки, но не на всем пространстве приближаемых функций (например, непрерывных), а лишь на его подпространстве, состоящем из четных функций с неотрицательными коэффициентами Фурье. Даже в таком виде результаты представляют несомненный интерес. Более того, результаты сохраняют самостоятельный характер, даже если будут установлены двусторонние оценки на всем классе, поскольку, вообще говоря, константы уменьшаются при переходе к подклассу.

Большинство задач было поставлено диссертанту его первым научным руководителем — профессором В. В. Жуком, ныне покойным. Часть работы выполнялась под его руководством.

В диссертации М. В. Бабушкина получены новые важные результаты. Работа показывает, что ее автор владеет методами теории приближения функций, вещественного, комплексного и функционального анализа. Он продемонстрировал высокую технику, настойчивость в решении трудных задач и хорошее знание научной литературы. Считаю, что М. В. Бабушкин достоин присуждения ему степени кандидата физико-математических наук.

доктор физико-математических наук, доцент, профессор СПбГУ

О. Л. Виноградов

Личную подпись заверяю
начальник отдела кадров

Н. И. Маштепа

