ОТЗЫВ
НАУЧНОГО РУКОВОДИТЕЛЯ

о диссертации Льва Назаровича Ихсанова
"Равномерные оценки приближений
через второй модуль непрерывности",
представленной на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Диссертация Л. Н. Ихсанова посвящена поиску точных констант в неравенствах со вторым модулем непрерывности. Оценки скорости приближения в терминах структурных свойств функции и поиск точных констант в этих оценках — классическая тематика теории приближений. Экстремальные задачи для модулей непрерывности порядка выше первого чаще всего очень трудны, и их явное решение редко удается найти. В таком случае представляет интерес получение таких неравенств по возможности с небольшими константами.

Диссертант получил новые интересные результаты в двух задачах этого типа. Отмечу крайнюю малоисследованность обеих задач: фактически в них есть всего лишь по одному предшественнику.

В первой главе исследуются оценки приближений положительными операторами. В 1990-х годах Р. Палтаня установил точную оценку равномерных отклонений многочленов Бернштейна B_nf функции f через ее второй модуль непрерывности $\omega_2(f,h)$:

$$\|B_nf-f\| \leqslant 1\cdot\omega_2\left(f,\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Константа 1 точна при каждом фиксированном $n\in\mathbb{N}$. Неравенство без точной константы и порядковая точность шага $h=\frac{1}{\sqrt{n}}$ были хорошо известны ранее. Метод получения таких неравенств с помощью модификаций функций Стеклова неоднократно применялся В. В. Жуком.

Указанная теорема Палтани — единственный известный мне точный результат такого вида. Доказательство Палтани основывалось на весьма трудной технике представления отклонений многочленов Бернштейна через вторые разности функции. Неравенство с "красивой" точной константой 1 привлекло внимание специалистов. Однако использование специфики многочленов Бернштейна было столь существенно, что обобщить результат на другие операторы не удавалось.

Работа Л. Н. Ихсанова — первая успешная попытка такого обобщения. В диссертации установлена серия точных неравенств вида

$$F(f)\leqslant 1\cdot\omega_2(f,h).$$

Здесь f принадлежит пространству ограниченных измеримых функций $B[0,1]$, F — функционал специального вида, заданный на $B[0,1]$, шаг h зависит от F. В качестве функционалов допускаются нормы отклонений некоторых положительных операторов, обобщающих операторы Бернштейна. Направление этих обобщений то же, что и у известных операторов Канторовича — значения приближаемой функции в точках заменяются средними по окрестностям этих точек. Константа 1 точная, что объясняется видом рассматриваемых функционалов.

И исследование условий на функционалы, и разработка техники комбинирования точек при составлении вторых разностей потребовали от диссертанта глубокого погружения в задачу и кропотливого исследования.

Задача, которая рассматривается во второй главе диссертации, элементарна по постановке, чего не скажешь о решении. Требуется оценить норму заданной на оси функции через ее модуль непрерывности, если ее интегралы между целыми точками равны нулю. Насколько мне известно, у этой задачи совсем короткая предыстория: ее постановка и некоторые подходы к решению содержатся в одной работе Ю. В. Крякина, который связывал эту задачу с классической задачей о константах Уитни.

В теории аппроксимации известны неравенства, в которых оценивается не приближение произвольной функции, а ее норма, но при дополнительном условии ортогональности функции приближающему пространству. Таковы неравенство Г. Бора и некоторые неравенства типа Джексона. Условие на интегралы можно трактовать как ортогональность кусочно-постоянным функциям (сплайнам нулевой степени) по фиксированному равномерному разбиению.

Для первого модуля непрерывности ответ очень прост, хотя и нов, и приводится в работе как замечание. На подклассе периодических функций ответ для модулей четного порядка $2m$ известен из работы О. Л. Виноградова и В. В. Жука и равен $\frac{1}{C_{2m}^{m}}$. Оценка сверху в этом случае получается общеизвестным способом, а оценка снизу представляет определенные трудности.

Отказ от периодичности резко усложняет задачу даже для второго модуля, причем как оценку сверху, так и оценку снизу. Константа при этом увеличивается. Диссертант придумал способ, как можно уточнять оценку сверху. Для этого он сводит исходную задачу к семейству задач, ставящихся при дополнительном условии, что функция достигает максимума в фиксированной точке $\frac{1+b}{2}$. Затем разности функции подчиняются нескольким линейным ограничениям и получившаяся задача решается методами линейного программирования. Эти вспомогательные задачи имеют разную сложность для разных точек. Если удачно выбрать ограничения, комбинируя значения функции и ее интегралы, получаются довольно близкие друг к другу оценки сверху и снизу. В одном случае ($b = \frac{1}{3}$) автор нашел точную оценку. Составление таких ограничений потребовало немалой изобретательности. В результате удалось найти два точных знака упомянутой константы.

Найти явное решение для модуля непрерывности порядка $m > 2$, по-видимому, чрезвычайно трудно. Хотя в диссертацию включена задача только со вторым модулем, отмечу, что рекордный результат для модулей высших порядков принадлежит совместно диссертанту и мне.

В диссертации Л. Н. Ихсанова получены новые важные и трудные результаты. Работа показывает, что ее автор владеет методами теории приближения функций, вещественного, комплексного и функционального анализа, теории экстремальных задач. Он продемонстрировал высокую технику, большую самостоятельность, изобретательность и настойчивость в решении трудных задач.

Считаю, что Л. Н. Ихсанов достоин присуждения ему степени кандидата физико-математических наук.

доктор физико-математических наук, доцент, профессор СПбГУ — О. Л. Виноградов

Личную подпись Виноградова О.Л. заверяю
И.О. начальника отдела кадров №3
...И. Константинова
01.07.2021

ПРАВИТЕЛЬСТВО РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ИНН 7801002274
«Санкт-Петербургский государственный университет» (СПбГУ)

...екст документа размещен
в открытом доступе
...а сайте СПбГУ по адресу
...//spbu.ru/science/expert.html