ОТЗЫВ
НАУЧНОГО РУКОВОДИТЕЛЯ

о диссертации П. А. Андрианова
Многомерные периодические системы всплесков
представленной на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Работа посвящена изучению многомерных периодических фреймов всплесков (в частности базисов всплесков) с матричным коэффициентом растяжения, а также их дискретных аналогов. В частности, решается задача обеспечения бесселевости периодических систем всплесков, причем описывается несколько алгоритмических методов решения этой задачи, что представляет интерес не только с теоретической, но и с прикладной точки зрения. Полностью разработана теория построения многомерных периодических всплесков дискретного аргумента, что особенно может быть полезно для прикладников в области обработки и анализа цифровых сигналов, так как они имеют дело именно с такими функциями. Кроме того, решаются классические экстремальные задачи для многомерной системы Хаара.

Основные содержание диссертации сосредоточено в главах 2-4.

Во главе 2 разработан метод построения двойственных базисов и фреймов всплесков на базе периодического кратномасштабного анализа. Хотя общая схема построения известна, в ее реализации есть существенная трудность – обеспечение бесселевости построенных таким образом систем всплесков. Диссертант представил конструктивное решение этой проблемы. В §2.1 дается достаточное условие бесселевости системы всплесков, порожденной одной периодической функцией, в терминах убывания коэффициентов Фурье ее растяжений. На базе этого результата в §2.2 описан алгоритмический метод построения биортогональных базисов всплесков, состоящих из тригонометрических полиномов. Для его реализации требуется найти последовательность полиномов определенного вида, и это нетрудно сделать на практике, после чего, взяв готовые явно выписанные формулы для всплеск-функций, получим систему всплесков, которая является базисом Рисса. Также даны явные формулы для двойственной системы всплесков, образующей базис Рисса, биортогональный к исходному. В §2.3 дан существенно более простой алгоритм для построения полиномиальных двойственных фреймов всплесков с изотропным коэффициентом растяжения. Для его реализации требуется найти лишь один тригонометрический полином, у которого равные нулю коэффициенты Фурье расположены друг относительно друга определенным образом, а не равные нулю убывают достаточно быстро.

Глава 3 посвящена дискретным периодическим фреймам всплесков. Для разработки методов построения таких фреймов в §3.1 диссертант развил теорию дискретных кратномасштабных анализов и масштабирующих последовательностей. Доказано существование масштабирующей последовательности для каждого кратномасштабного анализа, дана характеризация масштабирующих последовательностей в терминах коэффициентов Фурье. Ранее дискретные кратномасштабные анализы изучались

А.П.Петуховым, но только в одномерном случае и с рядом ограничений, не позволяющих построить дискретные аналоги полиномиальных фреймов всплесков. В §3.2 разработана общая схема построения дискретных систем всплесков на базе кратномасштабных анализов. Хотя результаты в дискретном случае являются аналогами непрерывных, техника доказательств существенно отличается от техники, используемой в непрерывном случае. Результаты §3.3, в котором найдены удобные формулы для прямого и обратного всплеск-преобразования, могут быть весьма полезны для приложений, связанных с обработкой аудио- и видеосигналов.

В главе 4 изучаются аппроксимационные свойства периодизированных многомерных сепарабельных базисов Хаара (которые можно назвать модельными системами периодических всплесков). Для полиномов по таким системам получена серия прямых и обратных аппроксимационных теорем. В §4.1.1 представлены оценки типа неравенства Джексона, т.е. оценки наилучших приближений многочленами Хаара через модули непрерывности. В одномерном случае Б.И.Голубовым было установлено, что в оценке $E_n(f) \leq C\omega(f, 1/n)$ точной является постоянная $C = 1$. В диссертации получены многомерные неравенства такого рода, точность которых установлена в самых разных смыслах. В частности, доказано, что в оценке

$$E_n(f) \leq \sum_{k=1}^{d} \omega_k(f, n^{-1/d}) \leq d \max_k \omega_k(f, n^{-1/d}),$$

d – точная постоянная, и в правой части нельзя заменить шаг модуля непрерывности $n^{-1/d}$ на $\lambda n^{-1/d}$, где $\lambda < 1$, а также среднюю часть нельзя заменить на $\sum_{k=1}^{d} c_k \omega_k(f, n^{-1/d})$, где $c_k < 1$ хотя бы для одного из номеров k, или на $\sum_{k=1}^{d} \omega_k(f, \lambda_k n^{-1/d})$, где $\lambda_k < 1$ хотя бы для одного k. В двумерном случае изучались оценки для разных типов номеров n. Несмотря на точность оценки при рассмотрении всех n, при определенном выборе последовательности номеров константы можно уменьшить. Найдены точные постоянные в каждом слагаемом для всех типов номеров. В §4.1.2 представлены обратные аппроксимационные теоремы с точными постоянными для разных шагов модулей непрерывности. В § 4.2 получены оценки уклонения частичных сумм Фурье-Хаара в равномерной метрике, в которых также точны и постоянные, и порядок шага модуля непрерывности.

Считаю, что диссертационная работа П.А. Андрианова вносит значимый вклад в развитие теории всплесков, тема диссертации актуальна, все положения и выводы новы, достоверны и обоснованы. Результаты второй и третей главы представляют интерес не только в теоретическом, но и в прикладном плане. Текст изложен аккуратно, все теоремы и вспомогательные утверждения снабжены подробными доказательствами. Результаты опубликованы в 7 работах в журналах, входящих в список изданий, рекомендованных ВАК, и еще две работы приняты в печать. В двух наших совместных работах мне принадлежит постановка задачи и разработка общего плана ее решения, реализация этого плана выполнена диссертантом. Практически все результаты докладывались на российских и международных семинарах и конференциях. Содержание работы правильно и полно отражено в автореферате.

По моему мнению, представленная на рассмотрение диссертация удовлетворяет всем требованиям ВАК, а П.А.Андрианов заслуживает присвоения ученой степени кандидата физико-математических наук.

Научный руководитель
доктор физико-математических наук
профессор СПбГУ
М.А.Скопина

Личную подпись
М.А. Скопиной
заверяю
И.О. начальника отдела кадров №3
И.И. Константинова
01.12.2021

И.о. начальника
отдела кадров № 3
И.И. Константинова