ОТЗЫВ

Научного руководителя о диссертации А. С. Целищева «Два сюжета из гармонического анализа: квадратичные функции и задача об изоморфизме», представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертация состоит из пяти глав, включая введение. В главах 2-4 разрабатывается классический сюжет из гармонического анализа, восходящий к фундаментальной теореме Литтлвуда и Пэли. Эта теорема говорит о том, что при $1<p<\infty$ норма любой функции в пространстве L^p эквивалентна L^p-норме некоего квадратичного выражения, связанного с этой функцией. В самом первом варианте речь шла об L^p-норме квадратного корня из суммы квадратов модулей «кусочков», полученных из исследуемой функции применением достаточно регулярно устроенных мультипликаторов Фурье. Позже возник термин «теория Литтлвуда-Пэли», который стал применяться ко всем без исключения подобным оценкам, в том числе и таким, в которых квадратичное выражение не связано напрямую с мультипликаторами и зависит от непрерывного параметра (тем самым содержит интеграл вместо суммы). Такого рода оценки используются при доказательстве оргомного количества результатов в гармоническом анализе – начиная с теоремы Марцинкевича о мультипликаторах Фурье и до гораздо более поздних вещей, например, таких, как атомные разложения для функций из классов Харди.

В главе 2 доказано одно общее утверbegin{дннние} об описании пространства $BMO(R^n)$ в терминах квадратичных выражений, в каком-то смысле родственных тем, что встречаются в классической теореме Литтлвуда-Пэли. Мотивом для исследования послужила теорема С. В. Бочкарёва, где такое описание было получено, когда $n=1$, а «фрагменты» исследуемой функци, из которых составляются квадратичный выражения, определяются в терминах сверток этой функции с ядрами Валле-Пуссена. Отмечу, что эта одномерная характеризация с большой эффективностью применялась С. В. Бочкарёвым к многочисленным тонким вопросам теории тригонометрических рядов. Диссертанту удалось получить аналогичное n-мерное утверждение, в котором ядра Валле-Пуссена заменены но последовательность мультипликаторов Фурье, удовлетворяющих условиям теоремы Михлина-

Хёрмандера. Доказательство потребовало значительных усилий, направленных, в частности, и на то, чтобы по возможности ослабить условия на символы используемых мультипликаторов.

Глава 3 связана с известной теоремой Рубио де Франсиа, говорящей, что односторонняя оценка в неравенстве Литтлвуда-Пэли (сверху или снизу – зависит от того, по какую сторону от двойки лежит показатель p) верна для разбиения прямой R (либо группы всех целых чисел) на абсолютно произвольные отрезки. Доказанная в середине 1980-х годов, она породила многочисленные исследования. В частности, встал вопрос о ее аналогах в нетригонометрическом анализе Фурье. Для рядов Фурье-Уолша такое утверждение доказал Н. Н. Осипов в 2016 г., однако его доказательство не работало для более общих систем Виленкина. Диссертантом эта трудность преодолена для так называемых ограниченных систем Виленкина, что является очень значительным достижением в указанном круге вопросов.

В главе 4 снова исследуется нетригонометрическое неравенство типа Рубио де Франсиа – на этот раз только для сисиемы Уолша, но в векторном выриaнте: оно доказано для рядов Фурье-Уолша с коэффициентами в банаховой решетке определенного вида. Тригонометрический вариант этого неравенства был установлен ранее Потаповым, Сукочевым и Шу.

Характер задачи, рассматриваемой в главе 5, отличается от всего перечисленного (второй их «двух сюжетов», упрмянутых в заглавии), однако он родствен методологически. Все результаты из предыдущих глав доказаны с помощью техники из теории сингулярных интегральных операторов (в главе 2) либо близкой к ней теории мартингальных преобразований (в главах 3 и 4). Одним из решающих мометов в доказательстве основной теоремы последней главы является снова привлечение сингулярных интегральных операторов, на этот раз со смешанной однородностью. Речь идет про задачу об отсутствии изоморфизма между пространствами непрерывно-дифференцируемых функций от нескольких пpеременных и «более стандартными» функциональными пространствами. Не вдаваясь в историю (которая восходит, в частности, к А. Гротендику), отмечу относительно недавний результат, принадлежащий Д. В. Максимову, Д. М. Столярову и мне и дающий некоторое естественное и очень широкое условие, достаточное для того, чтобы пространство гладкх фукций, порожденное некоторым конечным набором дифференциальных выражений, не было изоморфно пространству C(K) ни для какого компакта K. Диссертантом установлено, среди прочего, что при тех же условиях такое пространство гладких функций невозможно вложить дополняемо в банахову решетку.

Уместны ещё несколько слов о связи с предшествующими результатами и о том, как шла работа над диссертацией. Автор проявил очень большую степень самостоятельности, мое участие сводилось к постановкам задач и консультациям. Если говорить о предыстории результата последней главы, надо отметить, что упомянутая выше теорема, принадлежащая Максимову, Столярову и мне, оказалась сама по себе достаточно сложной технически, так что ее авторы не решились даже попытаться ее усилить. Когда я попросил А. Целищева проверить возможность того усиления, которое он в конце концов доказал, я не очень надеялся на успех. Результат из главы 3 (про ограниченные системы Виленкина) – тоже ответ на вопрос, остававшийся открытым несколько лет, несмотря на то, что им занимались. Результат главы 2 – единственный из всех, отраженный не в единоличной публикации автора. Его соавтор И. М. Васильев тоже был моим аспирантом, так что я позволю себе раскрыть некоторые детали их совместной работы. А именно, Васильев начал (один) с одномерной ситуации, причем на символы мультипликаторов были наложены более жесткие условия, чем в теореме из дисертации. Затем Васильев и диссертант работали над этим вопросом вместе, но доведение условий до «естественных» (как в теореме Михлина-Хёрмандера) – заслуга А. С. Целищева.

Я высоко оцениваю все полученные результаты, считаю, что, безусловно, диссертация удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к кандидатским диссертациям, а ее автор – А. С. Целищев – заслуживант присуждения ему учёной степени кандидата физико-матеиаических наук.

Научный руководитель

Академик РАН Кисляков С. В. Кисляков

Подпись руки С. В. Кислякова

УДОСТОВЕРЯЮ

Помощник директора

ПОМИ РАН А.Н. Антонова

"08" 11 2021 г.