ОТЗЫВ
НАУЧНОГО РУКОВОДИТЕЛЯ

о диссертации Н.А.Крюкова
Различные задачи случайного заполнения множеств
представленной на соискание ученой степени
кандидата физико- математических наук

Работа Н.А.Крюкова посвящена исследованию различных задач, связанных со случайным заполнением отрезка $[0,x]$ большой длины интервалами фиксированного размера. Задачи такого типа принято называть задачами о парковке. Впервые такая задача рассматривалась в работе венгерского математика А.Реньи “On the one-dimensional concerning space-filling” опубликованной в 1958 году, в которой изучалось поведение среднего числа разместившихся единичных интервалов на отрезке большой длины. Полученный А.Реньи результат устанавливал асимптотику математического ожидания числа разместившихся единичных интервалов при увеличении длины заполняемого отрезка к бесконечности. История возникновения этой задачи следующая.

В начале 1950-х годов известный ирландский ученый, занимавшийся, в частности, молекулярной биологией, Дж.Бернал (10.05.1901 – 15.09.1971) обратился к А.Реньи с вопросом о возможности оценить число случайно разместившихся шаров малого диаметра в шаре существенно большего диаметра. А.Реньи рассмотрел одномерную модель этой задачи, которая и получила название “задача о парковке”.

А.Реньи рассмотрел эту задачу в следующей интерпретации. На улице длины x случайным образом располагается автомобиль длины 1. Если $x<1$, то процесс парковки заканчивается, и на улице нет припаркованных автомобилей, если же $x\geqslant 1$, то первый автомобиль занимает место $(t,t+1)$, разбивая улицу на два свободных участка $[0,t]$ и $[t+1,x]$. Случайная величина t имеет равномерный закон распределения на отрезке $[0,x-1]$. После постановки первого автомобиля образовавшиеся свободные участки $[0,t]$ и $[t+1,x]$ заполняются по тому же правилу независимо друг от друга. Общее число расположившихся автомобилей после окончания процесса заполнения улицы обозначаем через N_x. Реньи показал, что математическое ожидание числа разместившихся автомобилей удовлетворяет соотношению

$$E N_x=\lambda x+\lambda-1+O\left(x^{-n}\right) \qquad (x\to\infty) \qquad \text{при любом } n\geqslant 1, \quad (1)$$

где константа λ определена равенством $\lambda=\int_0^{\infty} e^{-2\int_0^t \frac{1-e^{-u}}{u}du}\,dt.$

В 1964 году Дворецкий и Роббинс уточнили это соотношение, доказав следующее равенство

$$E N_x=\lambda x+\lambda-1+O\left(\left(\frac{2e}{x}\right)^{x-\frac{3}{2}}\right) \quad (x\to\infty). \qquad (2)$$

Они также получили подобное соотношение и для дисперсии $D N_x$ и доказали асимптотическую нормальность случайной величины N_x.

В представленной Н.А.Крюковым диссертации рассмотрено несколько различных моделей и аналогов задачи о парковке.

Первая глава диссертации посвящена общему описанию представленных к защите результатов. В ней формулируются цели работы, применямые методы, описывается аппробация полученных результатов.

Во второй главе работы рассмотрено обобщение задачи Реньи на случай, когда закон распределения размещаемых интервалов отличен от равномерного (что предполагается в классическом случае) и принадлежит некоторому семейству распределений P_x, включающему в себя равномерный закон. Распределения из этого семейства имеют плотности $p_x(t)$, удовлетворяющие равенству: $p_x(t)+p_x(x-t)=\frac{2}{x}$ при $t\in[0,x]$. Крюков Н.А. доказал, что для всех законов распределения из этого семейства ранее полученные результаты будут справедливы, т.е. выполнены соотношение (1) и асимптотическая нормальность для последовательности случайных величин N_x. И более того, им доказано, что распределение случайной величины N_x одинаковое для всех распределений из семейства P_x.

Третья глава посвящена дискретному аналогу задачи Реньи о парковке, когда на отрезке $[0,n]$ (n – натуральное число) случайным образом размещаются интервалы длины l, (l – целое) таким образом, чтобы начало и конец интервала были целыми числами. Если Реньи для получения своего результата исследовал преобразование Лапласа для математического ожидания числа разместившихся интервалов, по причине того, что интервалы размещаются в соответствии с непрерывным законом распределения, то в случаях дискретных законов распределения положения интервалов Крюков Н.А. рассматривал производящие функции моментов числа разместившихся интервалов и с их помощью получал асимптотические оценки для центральных моментов. В работе получены результаты, описывающие асимптотическое поведение математического ожидания и центральных моментов числа разместившихся интервалов на отрезке $[0,n]$, когда n стремится к бесконечности. Это позволило, применяя метод моментов, получить асимптотическую нормальность для числа разместившихся интервалов. Для случая $l=2$ выписаны точные выражения для математического ожидания и дисперсии в зависимости от n.

В четвертой главе работы рассматривается задача, которая была названа задачей об эгоистичной парковке. В этой задаче для случайного расположения очередного единичного интервала необходимо иметь свободное место длины не меньше l, где l– фиксированное и $l\geqslant 2$. Для числа размещенных интервалов Крюковым Н.А. описаны асимптотические поведения центральных моментов и доказана асимптотическая нормальность числа разместившихся интервалов.

В этой же главе рассмотрена модель размещения единичных интервалов, когда для размещения очередного интервала действует запрет на самое левое (или правое) свободное место. Для этого случая выписано точное выражение для математического ожидания числа разместившихся единичных интервалов в зависимости от n.

Пятая глава посвящена исследованию дискретного варианта задачи о парковке, когда длина размещаемых интервалов является случайной величиной, принимающей значения 1 или 2. Для этой модели заполнения отрезка подсчитывается мера занятого места по окончании процесса заполнения. Для этой модели Н.А.Крюков получил точное выражение для математического ожидания меры заполненной части отрезка в зависимости от длины отрезка и закона распределения длины размещаемых интервалов.

Шестая глава диссертации включает в себя доказательства технических лемм, которые используются при доказательствах результатов из предыдущих глав.

Считаю, что диссерационная работа Н.А.Крюкова "Различные задачи случайного заполнения множеств" вносит значительный вклад в теорию случайных заполнений множеств, тема диссертации актуальна, все результаты, изложенные в работе, являются новыми, достоверными и полностью доказанными. Результаты, полученные Н.А.Крюковым представляют интерес не только в теоретическом плане, но могут и найти практическое применение. Все утверждения снабжены полными и аккуратными доказательствами. Результаты опубликованы в 6 научных работах в журналах, входящих в список изданий, рекомендованных ВАК. В совместных наших четырех работах мне принадлежит постановка задачи и описание общего плана ее решения. Реализация решения полностью выполнена диссертантом. Две работы полностью самостоятельны, в том числе и по постановке задач, изложенных в этих работах.

Результаты диссертации докладывались на российских и международных семинарах и конференциях. Содержание работы полностью и правильно отражено в автореферате.

В течение всего времени работы над темой диссертации Николай Крюков проявлял большую заинтересованность в исследовании темы, упорство и техническую изобретательность.

По моему мнению представленная на рассмотрение диссертация удовлетворяет всем требованиям ВАК, выполнена на высоком научном уровне, соответствует всем требованиям , предъявляемым к кандидатским диссертациям по специальности 01.01.05 Теория вероятностей и математическая статистика, а Николай Алексеевич Крюков заслуживает присвоения звания кандидата физико-математических наук.

Научный руководитель
кандидат физ-мат наук
доцент СПбГУ
С.М.Ананьевский

14.02.2022

Личную подпись
С.М. Ананьевского
заверяю
И.О. начальника отдела кадров №3
И.И. Константинова
14.02.2022

ПРАВИТЕЛЬСТВО РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Санкт-Петербургский государственный университет»
(СПбГУ)
ИНН 7801002274