

ОТЗЫВ НАУЧНОГО РУКОВОДИТЕЛЯ

о диссертации А.В.Каплуна

"АЛГЕБРА ЭЙКОНАЛОВ МЕТРИЧЕСКОГО ГРАФА"

представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.03 - математическая физика

- А.В.Каплун досрочно заканчивает обучение в аспирантуре ПОМИ РАН, в которую он поступил в сентябре 2019 г после защиты диплома магистра на кафедре высшей математики и математической физики физического факультета СПбГУ. Я был его научным руководителем в бакалавриате, магистратуре и являюсь таковым в настоящее время. Общее направление проводимых нами исследований - разработка подхода к обратным задачам математической физики, основанного на их связях с алгебрами. Более точно, речь идет об алгебраической версии т.н. *метода граничного управления* (BC-метод), позволившего решить важный класс обратных задач. Одно из наиболее выразительных его достижений - реконструкция римановых многообразий по граничным спектральным и динамическим данным. Алгебраический вариант BC-метода появился в 2003 г, а алгебра эйконалов (АЭ), фигурирующая в названии диссертации - в 2008. АЭ это операторная C^* -алгебра, определяемая динамической системой с граничным управлением, которая описывает распространение волн в объекте (многообразии, графе и т.д.), подлежащем реконструкции. Эйконалы суть операторы, определяемые достижимыми множествами этой системы.

Успешное приложение АЭ в задачах на многообразиях инициировало попытку использовать ее в обратных задачах на графах. Однако, на этом пути встретилось затруднение принципиального характера: в отличие от встречавшихся ранее алгебр, АЭ, отвечающая графу, является *некоммутативной*. Точнее, в некоторых известных случаях некоммутативность присутствовала, но устранялась факторизацией по идеалу компактных операторов. Некоммутативность же АЭ, отвечающей графу, является "неистребимой", что существенно осложняет ее исследование.

- Вполне очевидный факт состоит в том, что за обратную задачу имеет смысл браться только если достаточно полно изучена соответствующая

прямая задача. В данном случае – если исследована структура АЭ и выяснено, как особенности этой структуры связаны с ее строением графа. В частности, предстояло найти алгебраические инварианты АЭ, содержащие информацию о геометрии графа и использовать эту информацию в обратной задаче. Этот круг вопросов составил предмет данной диссертации. Следует добавить, что их понимание и постановка уточнялись в ходе работы.

С поставленными задачами А.В.Каплун успешно справился. Опишем главные результаты и достижения соискателя.

1) Найдена каноническая форма АЭ метрического графа, имеющего границу (набор вершин валентности 1). Особо подчеркнем, что это сделано при очень общих условиях на граф – локальной конечности и связности, т.е. фактически речь идет о произвольном метрическом графе. Ранее было известно, что АЭ является подалгеброй алгебры $\bigoplus_{n=1}^N C([0, \epsilon_n]; \mathbb{M}^{k_n})$, блоки которой суть алгебры непрерывных матричнозначных функций. Отличие АЭ от последней состоит в наличии связей между концевыми элементами разных блоков. Описание этих связей – весьма сложная проблема, с которой соискатель справился блестяще. Найденная характеристика основана на доказанной им абстрактной теореме (Теорема 1) о подалгебре, связывающей блоки алгебры, образованной конечной системой одномерных проекторов. Теорема интересна сама по себе, а, в приложении к АЭ, описывает связь между ее блоками через т.н. граничную алгебру, введенную А.В.Каплуном. Им же показано, как, опираясь на параметрическое представление АЭ, привести ее к канонической форме вида $\bigoplus_{j=1}^J C([0, \epsilon_j]; \mathbb{M}^{k_j})$ с независимыми блоками. Процедура приведения конструктивна и имеет инвариантный характер. Последнее позволяет перейти к каноническому представлению АЭ, опираясь от любого ее представления.

2) Каноническая форма АЭ в явном виде определяет ее спектр (множество классов неприводимых представлений). Приведение к канонической форме фактически равносильно построению функциональной модели АЭ, в которой спектр играет роль носителя элементов пространства представления. Такие модели для C^* -алгебр с конечномерными представлениями разных размерностей описаны Н.Б.Васильевым в 1966 г. Адекватная координатизация спектра превращает его в граф, строение

которого напрямую связано с геометрией исходного графа. Именно, во всех известных к настоящему моменту примерах координатизированный спектр гомеоморфен т.н. *остову* графа. Остов это граф, получающийся из исходного графа "склеивкой" последнего по некоторому отношению эквивалентности, имеющему прозрачный геометрический смысл. Есть основания полагать, что такой гомеоморфизм есть общий факт.

3) Для обратных задач, ставящих целью реконструкцию графа по граничным спектральным и/или динамическим данным, принципиально следующее обстоятельство. И те, и другие данные определяют АЭ (точнее, ее адекватную изометрическую копию), а, следовательно, и ее функциональную модель - в силу инвариантного характера последней. Тем самым, в конечном счете, из граничных данных извлекается остов, а проблема реконструкции сводится к восстановлению графа по его остову. Эта тема в диссертации не затрагивается, но сомневаться в перспективности ее разработки не приходится.

В целом становится ясно, что АЭ есть фундаментальный объект теории метрических графов, сложный для исследования, но очень интересный и богатый свойствами. Результаты А.В.Каплуна подкрепляют тезис о полезности и плодотворности связей обратных задач математической физики с теорией C^* -алгебр.

- Две из опубликованных работ по теме диссертации являются совместными (М.И.Белишев и А.В.Капун). В первой из них моя роль свелась к "идейному" руководству и проверке результатов. Во второй работе вклад А.В.Каплуна является доминирующим: главный результат о приведении АЭ к канонической форме принадлежит ему.

- В целом учебу и работу А.В.Каплуна в аспирантуре я расцениваю как вполне успешную. Ее итогом является полноценная кандидатская диссертация, а ее автор несомненно заслуживает получения соответствующей ученой степени.

Белишев

Научный руководитель
доктор физико-математических наук,
зав. лабораторией МПГ ПОМИ РАН

М.И.БЕЛИШЕВ

3

