

ОТЗЫВ

научного руководителя о диссертации И.А.Алексеева

**«Устойчивые случайные величины и векторы
с комплексным индексом устойчивости»,**
представленной на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук по специальности 01.01.05 –
Теория вероятностей и математическая статистика

Иван Алексеев закончил математико-механический факультет СПбГУ и поступил в аспирантуру ПОМИ в 2021 году. Под моим руководством Иван Алексеев работал, начиная с четвертого курса. За это время Иван проявил себя вдумчивым исследователем, способным выдвигать и реализовывать самостоятельные идеи.

Научная работа Ивана Алексеева относится к классическому разделу теории вероятностей – предельным теоремам для сумм независимых случайных величин. Самый красивый, на мой взгляд, результат Ивана Алексеева связан с описанием множества предельных распределений в схеме суммирования независимых одинаково распределенных случайных величин. Еще в 30-е годы прошлого века Полем Леви была доказана теорема, о том, что если частичные суммы последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин после соответствующей нормировки имеют слабый предел, то этот предел обязательно является устойчивым. Устойчивость случайной величины ξ означает, что для любых двух положительных констант a, b найдется положительная константа c и число x такие, что случайные величины $a\xi_1 + b\xi_2$ и $c\xi + x$ совпадают по распределению, если ξ_1, ξ_2 – независимые копии ξ . Числа a, b, c при этом связаны соотношением $a^\alpha + b^\alpha = c^\alpha$. Параметр α называется индексом устойчивости, спектр его возможных значений – интервал $(0, 2]$. Случай $\alpha = 2$ соответствует нормальному распределению. Условие устойчивости является необходимым и достаточным условием того, что случайная величина является пределом нормированных сумм независимых одинаково распределенных случайных величин.

Иваном Алексеевым было получено обобщение результата Поля Леви на случай, когда речь идет о суммировании комплексных случайных величинах, и, соответственно, с комплексной нормировкой. Иваном был описан класс всех возможных слабых пределов нормированных сумм в этом случае. Легко дать достаточное условие принадлежности к этому классу. Действительно, всякую комплексную случайную величину можно рассматривать как двумерную, и, значит, при использовании только вещественной нормировки мы заведомо получим в качестве пределов класс всех двумерных устойчивых случайных векторов. Индекс устойчивости α двумерных случайных векторов, как и в одномерном случае, может принимать значения только из интервала $(0, 2]$. Иван в своей работе ввел понятие комплексной устойчивости, с индексом устойчивости принимающим значение в круге, построенном на интервале $(0, 2)$, как на диаметре, и показал, что условие комплексной устойчивости является необходимым и достаточным для того, чтобы комплексная случайная величина являлась пределом нормированных сумм. Условие комплексной устойчивости имеет в точности такой же вид, как и для вещественных α , но параметры a, b, c лежат не на положительной полуоси, как в вещественном случае, а на логарифмической спирали, задаваемой

в полярных координатах r, φ уравнением $\operatorname{Im} \alpha \cdot \ln r = -\operatorname{Re} \alpha \cdot \varphi$. Для вещественных α эта конструкция в точности соответствует классу двумерных устойчивых распределений, а для не вещественных α соответствующее распределение уже не является двумерным устойчивым. Таким образом, в работе Ивана Алексеева был найден большой нетривиальный класс слабых пределов, отличных от двумерных устойчивых.

Для определения устойчивых случайных величин с комплексным индексом устойчивости Иваном Алексеевым был использован подход, основанный на представлении устойчивых случайных величин в виде стохастического интеграла по пуассоновской случайной мере. Построенные комплексные случайные величины являются двумерными безгранично делимыми, в диссертации была получена явная формула для соответствующих мер Леви. Также в диссертации была исследована область притяжения устойчивых случайных величин с комплексным индексом устойчивости, построены отвечающие этим случайным величинам процессы Леви и найдены формулы для генераторов полугрупп, порожденных такими процессами Леви. Полученные генераторы оказались достаточно неожиданным обобщением операторов Римана-Лиувилля.

Далее в диссертации было введено понятие устойчивого случайного вектора с комплексным индексом устойчивости и исследованы свойства таких векторов. В последней главе диссертации было показано, что дальнейшее обобщение понятия устойчивости с комплексных чисел на кватернионы не приводит к новым нетривиальным объектам. Именно, было введено понятие кватернионно-устойчивой случайной величины (такая случайная величина принимает значения в пространстве кватернионов) и показано, что всякая кватернионно-устойчивая случайная величина является линейным преобразованием некоторого комплексно-устойчивого случайного случайного вектора.

За время работы над диссертацией И.А.Алексеев проявил себя вдумчивым исследователем, способным одновременно и выдвигать самостоятельные идеи, и преодолевать значительные технические трудности. Считаю работу И.А.Алексеева успешной, а самого Ивана – способным и квалифицированным исследователем, вполне готовым к самостоятельной научной деятельности.

Я считаю, что диссертационная работа И.А.Алексеева «Устойчивые случайные величины и векторы с комплексным индексом устойчивости» по своему содержанию соответствует специальности 01.01.05 – теория вероятностей и математическая статистика, а ее автор несомненно заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук.

Доктор физико-математических наук,
ведущий научный сотрудник
лаборатории прикладных вероятностных и
алгоритмических методов
ПОМИ РАН



Н.В. Смородина

