ОТЗЫВ

научного руководителя о диссертации Н. Ю. Власовой

“О СТЯГИВАЕМЫХ ПОДГРАФАХ ТРЕХСВЯЗНОГО ГРАФА,”

представленной на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

по специальности 1.1.5. —

математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика.

Теория графов является важным, интересным и динамично развивающимся разделом дискретной математики. Одним из классических направлений исследований в теории графов являются исследования по вершинной связности графов. Понятие k-связного графа является естественным обобщением понятия связного графа. Это подчеркивает и классическая теорема Менгера, с которой в 1927 году фактически начались исследования по связности. Их продолжили Уитни, Татт, Форд и Фалкерсон, Дирак, Халин, Мадер и другие. В 60-80 года XX века был всплеск интереса к связности графов. Сейчас продолжают появляться новые работы по этой тематике, пусть и не в таком количестве, как раньше.

Остановимся подробнее на классических задачах, наиболее близких по тематике к диссертации Надежды Власовой. Давно известно, что любой двусвязный граф на n вершинах можно разбить в объединение связных графов на k и $n-k$ вершинах для любого $k < n$ — это совсем несложно доказывается с помощью блоков и точек сочленения. Классическая теорема Дьори-Ловаса (1976) обобщает этот результат: если G — k-связный граф на n вершинах, а натуральные числа $n_1, \dots, n_k$ таковы, что $n_1 + \dots + n_k = n$, то G можно разбить на k связных графов размеров $n_1, \dots, n_k$. Казалось бы, следующим шагом может быть теорема о разбиении k-связного графа G на связный граф G_1 на m вершинах и $(k-1)$-связный граф G_2 на $n-m$ вершинах — возможно, с какими-то ограничениями на m и n. Это было бы красиво, но увы, неверно, как показал классик теории связности В. Мадер.

Множество вершин k-связного графа называется стягиваемым, если оно связно (то есть связен индуцированный на нем подграф), а при удалении этого множества получается $(k-1)$-связный граф. Мадер доказал, что при $k \geq 4$ существуют сколь угодно большие k-связные графы без стягиваемых множеств на хотя бы 2 вершинах. У любого 2-связного графа, как сказано выше, наоборот, существует стягиваемое множество любого разумного размера. Так что узким местом, где остается осмысленный вопрос, являются 3-связные графы.

В 1994 году МакКвейг и Ота сформулировали гипотезу: для любого натурального числа m существует такое n, что любой 3-связный граф на не менее чем n вершинах имеет стягиваемое множество на m вершинах. Сразу стало понятно, что это весьма важный и актуальный вопрос, упомянутый вскоре в обзоре Мадера по связности графов. Для $m = 2$ утверждение было известно давно, еще из работ Татта 1960-х годов. Для $m = 3$ утверждение доказали авторы гипотезы. Уже для $m = 4$ утверждение весьма непросто, его доказал в 2000 году Криселл. Он же позже доказал утверждение для $m = 5$ в частном случае: если граф имеет среднюю степень вершин, близкую к 3. Для $m \geq 6$ никаких опубликованных результатов на настоящий момент нет.

Мне изначально было понятно, что задача, решенная в диссертации Надежды Власовой — утверждение этой гипотезы для $m = 5$ — весьма сложна, как технически, так и идейно (иначе, развивая методы предыдущих работ, за столько лет это утверждение для

$m = 5$ доказали бы в общем случае). Так что считаю тему диссертации Власовой актуальной и очень непростой. Когда работаешь над такой темой, есть риск остаться вообще без существенных результатов. Тем не менее, Надежда Власова в 2017 году взялась за эту тему и вскоре смогла доказать результат, перекликающийся с результатом Криселла: в 3-связном графе не менее чем с 13 вершинами и минимальной степенью хотя бы 4 есть стягиваемое 5-вершинное множество. Но до победы над произвольными 3-связными графами было еще далеко.

Доказательство во всех работах про гипотезу МакКвейга-Оты идет примерно одинаково: доказывая существование стягиваемого m-вершинного множества, мы рассматриваем $(m-1)$-вершинное (уже известно, что такие множества есть), предполагаем, что его нельзя расширить, добавив вершину, разбираем случаи разных конфигураций, изучаем свойства графа в этих случаях и все-таки находим стягиваемое множество на m-вершинах, причем действуя локально (отходя недалеко от рассмотренного $(m-1)$-вершинного множества). Это совсем не просто, требуется большая техника работы с 2-связными и 3-связными графами. Но для $m = 5$ так не получается: с какой стороны ни организуй перебор, появляются конфигурации, с которыми ничего не удается сделать такими методами.

Надежда Власова придумала два новых метода для решения случая $m = 5$ гипотезы МакКвейга - Оты. На мой взгляд, главным слагаемым победы над задачей стала идея откладывать "подозрительные четверки" — конфигурации стягиваемых 4-вершинных множеств и их окрестностей, для которых локальными методами не удается найти стягиваемую пятерку. Позже, когда исключены почти все конфигурации, случаи почти всех таких четверок разбираются, так как в их окрестности находятся стягиваемые четверки разобранного вида. В самых сложных случаях сделать это не получается, в них диссертант искала стягиваемые пятерки, глобально по всему графу, изучая его структуру после удаления стягиваемой четверки с помощью дерева разбиения 2-связного графа 2-вершинными разделяющими множествами, дополнив известные методы работы с двусвязными графами несколькими новыми.

В итоге решение задачи получилось объемным, но это не только грамотно организованный перебор — Надежда Власова продемонстрировала умение использовать разработанные ранее методы, дополнив их новыми, без которых бы ничего не получилось. Работа выполнена диссертантом самостоятельно. Технически сложное доказательство четко и подробно записано, снабжено огромным количеством иллюстраций, без которых его очень трудно было бы понять. Помощь научного руководителя и коллег была в проверке этого сложнейшего доказательства. Отмечу, что такая помощь необходима любому исследователю. Доказательство опубликовано в двух статьях, главную из которых достаточно долго проверяли несколько рецензентов.

На мой взгляд, Надежда Власова является самостоятельным исследователем, способным решать длинные и трудные задачи. Представленная ей диссертация полностью удовлетворяет требованиям ВАК РФ, предъявляемым к кандидатским диссертациям, а автор ее безусловно заслуживает присуждения ему степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.5 — математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика.

Старший научный сотрудник
лаборатории математической логики и дискретной математики
Федерального государственного бюджетного учреждения науки
Санкт-Петербургского отделения Математического института
им. В. А. Стеклова, доктор физико-математических наук Д. В. Карпов

9 сентября 2024 г.

Подпись руки Карпова Дмитрия Валерьевича
Удостоверяю
Помощник директора по кадрам Н. А. Зотова
17.09.2024.

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А. Стеклова Российской академии наук