Отзыв научного руководителя
о диссертации Василия Александровича Сергеева
«Адиабатические задачи в квантовой механике
и теории распространения волн»,
представленной на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук
по специальности 1.1.2 —
дифференциальные уравнения и математическая физика

В диссертации рассматриваются две задачи: квантово-механическая задача об эволюции, порождённой одномерным оператором Шрёдингера на полуоси с потенциалом, представляющим собой линейно сужающуюся со временем прямоугольную потенциальную яму, и модельная задача акустики океана о распространении звука в (двумерном) прибрежном водном клине. Обе эти задачи адиабатические: в первой задаче предполагается, что потенциал медленно зависит от времени, а во второй — что клин является узким, то есть что его глубина медленно меняется. Обе задачи естественны: исследование адиабатических задач является одним из традиционных направлений квантовой механики, а модельная задача о распространении звука в узком прибрежном клине много обсуждалась физиками.

Математически эти задачи очень разные: квантово-механическая задача является задачей Коши для нестационарного уравнения Шрёдингера, а акустическая задача — задача рассеяния для уравнения Гельмгольца. Строгое математическое исследование этих задач было начато в работах А.А. Федотова. Для этого им был предложен единый метод, использующий идеи геометрической оптики и, одновременно, в некоторой мере родственный методу Зоммерфельда-Малюжинца.

В квантово-механической задаче с потенциалом, не зависящим от времени t, можно построить решения методом разделения переменных. При этом для описания зависимости решения от координаты x возникает стационарное уравнение Шрёдингера. Спектр соответствующего оператора Шрёдингера состоит из конечного числа собственных значений и непрерывного спектра, заполняющего положительную полуось. Соответственно, при делении переменных возникают решения, пропорциональные собственным функциям оператора Шрёдингера, и решения, пропорциональные его обобщённым собственным функциям. Если потенциал медленно зависит от времени, можно рассмотреть задачу о поведении решения, близкого в некоторый момент времени к собственной функции стационарного оператора, зависящего от времени как от параметра. Физики (нестрого) строят такие решения за счёт приближённого деления переменных. Аналогичные формальные асимптотические решения строятся и для задачи о распространении звука в водном слое, свойства которого медленно зависят от продольной переменной. В акустических задачах такие решения называют адиабатическими нормальными волнами. Этот термин вместе с диссертантом мы будем использовать и для соответствующих решений квантово-механической задачи.

В квантово-механической задаче число собственных значений стационарного оператора меняется с течением времени: собственные значения двигаются к краю непрерывного спектра и, достигнув его, исчезают одно за другим. Это ведёт к полной перестройке асимптотики соответствующих решений типа адиабатических нормальных волн. До работ А.А. Федотова и В.А. Сергеева это явление совсем не изучалось. Напротив, аналогичное явление в акустической задаче на эвристическом уровне изучалось довольно активно. Хотя ранее был открыт ряд возникающих при этом физических эффектов, даже на эвристическом уровне остался ряд содержательных открытых вопросов.

Для обеих задач А.А. Федотов строго построил решения типа адиабатических нормальных волн (для акустической задачи решение было построено только в четверти плоскости, содержащей водный клин и дно под ним). Для квантово-механической задачи он также исследовал асимптотики адиабатических нормальных волн внутри потенциальной ямы. В.А. Сергеев продолжил строгие исследования обеих задач.

Опишем основные результаты диссертации. Начнём с квантово-механической задачи. Рассмотрим адиабатическую нормальную волну, близкую в некоторый момент времени к n-й собственной функции стационарного оператора (зависящего от времени как от параметра). Можно сказать, что пока существует n-е собственное значение, адиабатическая нормальная волна локализована внутри потенциальной ямы: внутри ямы в старшем порядке она остаётся пропорциональной n-й собственной функции, а вне потенциальной ямы она экспоненциально убывает. Диссертант описал делокализацию нормальной волны — перестройку её асимптотики в дне вблизи момента исчезновения n-го собственного значения (достижения им края непрерывного спектра). В частности, показано, что на плоскости переменных $(\varepsilon t, x)$, где t — время, x — координата, а ε — адиабатический малый параметр, нормальная волна оказывается сосредоточена в области, напоминающей луч прожектора, направленный от границы потенциальной ямы наружу. Для описания этого явления диссертант получил для изучаемого решения как равномерные асимптотические формулы, так и асимптотические формулы типа погранслойных. Выведены формулы для старшего члена и получены оценки погрешности. Отметим, что в погранслойных формулах старший член выражается через комбинацию функций Эйри с комплексными нелинейными по x и t аргументами и с коэффициентами, зависящими от времени.

Далее было показано, что в результате делокализации нормальной волны она остаётся частично локализована вне потенциальной ямы около неё. Старший член асимптотики содержит экспоненту с отрицательным показателем, пропорциональным произведению ε^2 на куб расстояния от x до потенциальной ямы. Кроме этого, был обнаружен ещё один эффект: оказалось, что при описании асимптотик важную роль играют моменты исчезновения собственных значений с номерами n-1, n-2 и т. д. Выяснилось, что вблизи этих моментов возникает «просачивание» нормальной волны обратно в потенциальную яму. При этом старший член её асимптотики описывается бесконечным рядом, сумма которого становится заметной на фоне погрешности лишь вблизи моментов исчезновения собственных значений стационарного оператора. Вблизи момента исчезновения k-го собственного значения сумма в старшем порядке равна k-му члену ряда, который описывается в терминах спецфункции, родственной функции Эйри.

Аналогичные результаты были получены и для акустической задачи (несколько более сложной технически). Здесь диссертант исследовал адиабатическую нормальную волну как в водном клине, так и в дне под ним. Оказалось, что при исчезновении соответствующего собственного значения «поперечного» оператора нормальная волна излучается из волновода в дно и её амплитуда оказывается наибольшей в области, напоминающей по форме луч прожектора, и что при этом образуется поверхностная волна, бегущая вдоль водного слоя в дне, которая периодически просачивается в водный слой.

Наконец, для квантово-механической задачи диссертантом были изучены решения, которые можно назвать аналогом адиабатических нормальных волн в случае непрерывного спектра. Не совсем точно используя акустическую терминологию, можно сказать, что на полуплоскости плоскости (t,x), где x>0, такие решения являются результатом рассеяния плоской волны на узком «полупрозрачном» плоском клине — подобласти полуплоскости, где потенциал отличен от нуля. В случае, когда потенциал (прямоугольная потенциальная яма) не зависит от времени, вместо клина возникает слой постоянной толщины, и решение задачи рассеяния совпадает с решением, получающимся разделением переменных и пропорциональным обобщённой собственной функции непрерывного спектра. В случае потенциала, медленно зависящего от времени, диссертант получил асимптотики построенного решения внутри потенциальной ямы и вне её. Обсудим, например, волновое поле в клине — в потенциальной яме. Оно описывается суммой из волны, прошедшей в клин, и всех волн, полученных из неё отражениями от границ клина. Диссертант показал, что если падающая волна соответствует значению спектрального параметра, расположенному на абсолютно непрерывном спектре стационарного оператора достаточно далеко от его края, то амплитуда волнового поля внутри потенциальной ямы осциллирует, оставаясь порядка единицы. Если же спектральный параметр достаточно близок к краю непрерывного спектра, то внутри потенциальной ямы решение становится заметным лишь вблизи моментов исчезновения собственных значений стационарного оператора. Оказывается, что это опять связано с явлением просачивания.

Как уже отмечалось, все результаты, полученные для квантово-механической задачи, являются новыми. Акустическая задача эвристически исследовалась физиками. Так, явление образования прожектора было впервые описано А.Д. Пирсом с помощью вариационных соображений. Он же впервые описал и поверхностную волну. Явление просачивания, по-видимому, впервые описано в работах В.А. Сергеева и А.А. Федотова. Причём и это явление, и остальные были ими исследованы строгими математическими методами. Наконец, решения, которые можно назвать аналогами адиабатических нормальных волн в случае непрерывного спектра, ранее не исследовались.

Обсудим структуру работы. Диссертация начинается со Введения, в котором, в частности, описываются постановки квантово-механической и акустической задач, даётся литературный обзор, намечаются мотивация, основные цели и результаты исследования, коротко характеризуются основные методы работы. Во второй главе описываются результаты исследования: формулируются и подробно обсуждаются основные теоремы. Остальные главы посвящены доказательству этих теорем.

Для вывода результатов, касающихся адиабатических нормальных волн, для этих решений использовались интегральные представления, найденные А.А. Федотовым. Подынтегральные выражения содержат спецфункцию, имеющую нетривиальное асимптотическое поведение при малых ε. В частности, её точки ветвления образуют полубесконечные цепочки, и в каждой из цепочек при малом ε точки ветвления близки друг к другу. Асимптотический анализ рассматриваемых интегралов нетривиален: при различных значениях переменных t и x возникают разные эффекты, требующие применения известных или развития новых асимптотических методов, новой техники.

Подход и техника, развитые в работах В.А. Сергеева и А.А. Федотова, могут быть применены для широкого круга подобных задач. Будучи записанными в подходящих терминах, полученные в диссертации асимптотические формулы должны оставаться верными и в более общих случаях, для потенциальной ямы достаточно общего вида (в акустической задаче — для водного слоя, в котором зависимость глубины от горизонтальной переменной является нелинейной). Конечно, для этого потребуется выполнение естественных условий на поведение собственных значений стационарного (соотв., поперечного) оператора у края непрерывного спектра.

Диссертация В.А. Сергеева содержит целый ряд красивых оригинальных строгих математических результатов, интересных специалистам по математической физике, квантовой механике, акустике. Развитые методы и подходы могут быть использованы для решения широкого круга задач, а полученные результаты допускают обобщения. Вывод результатов потребовал тяжелой ручной неочевидной аналитической работы. Все основные результаты достаточно подробно доказаны. Диссертация структурирована. Диссертант постарался очень ясно описать и прокомментировать все результаты. Все они опубликованы в 5-ти статьях в хорошо известных журналах (из перечня ВАК, индексированных в Scopus). В.А. Сергеев работал активно и во многом самостоятельно. Две статьи им опубликованы без соавторов. Результаты диссертации были представлены на многочисленных конференциях и семинарах.

Считаю, что диссертация Василия Александровича Сергеева удовлетворяет всем требованиям ВАК, предъявляемым к кандидатским диссертациям, а её автор заслуживает присуждения учёной степени кандидата физико-математических наук.

Научный руководитель,
д.ф.-м.н., профессор СПбГУ,
Александр Александрович Федотов

14 марта 2026 г.

Личную подпись А.А. Федотова
заверяю
И.О. начальника отдела кадров
И.И. Константинова

ПРАВИТЕЛЬСТВО РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ИНН 7801002274
«Санкт-Петербургский государственный университет»
(СПбГУ)