Отзыв научного руководителя о диссертации П. В. Антоненко
«Волновые функции некомпактных спиновых цепочек и их свойства»

представленной на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
по специальности 1.1.2 — дифференциальные уравнения и математическая физика

Диссертация Павла Антоненко посвящена трем интегрируемым моделям квантовой механики – некомпактным *SL(2,C)*- и *SL(2,R)*-инвариантным спиновым цепочкам BC-типа, а также некомпактной *SL(N,C)*-инвариантной спиновой цепочке A-типа. Главной целью является диагонализация коммутативных семейств операторов, возникающих при изучении этих моделей.

Первая глава диссертации посвящена некомпактной *SL(2,C)*-инвариантной спиновой цепочке BC-типа. Модель определена на пространстве интегрируемых с квадратом функций n комплексных переменных, где n – число взаимодействующих частиц. Ключевым соотношением, обеспечивающим интегрируемость модели, является уравнение отражения между K-матрицей и R-матрицей Янга. В диссертации решается задача диагонализации B-элемента матрицы монодромии, порождающего интегралы движения. С одной стороны, она мотивирована тем, что собственные функции B-оператора играют ключевую роль при диагонализации трансфер-матрицы (следа матрицы монодромии) с помощью квантового метода разделения переменных Склянина, а *SL(2,C)*- и *SL(2,R)*-инвариантные спиновые цепочки BC-типа являются иллюстративными примерами применения этого метода. С другой стороны, в процессе исследования возникает задача построения новых бесконечномерных решений уравнения отражения, которое играет важную роль в теории точно решаемых моделей квантовой механики и статистической физики в случае граничных условий, отличающихся от периодических.

Собственные функции строятся при помощи индукции по числу узлов цепочки, и этот способ является типичным для данного типа моделей. В работе Деркачева, Манашова и Валиневича 2018 года были построены собственные функции B-элемента матрицы монодромии в аналогичной модели с единичной K-матрицей. В настоящей диссертации рассматривается K-матрица, представляющая собой общее решение уравнения отражения. При нахождении собственных функций возникает новая нетривиальная задача построения K-оператора (оператора отражения), удовлетворяющего более общей версии уравнения отражения с K-матрицей и L-оператором модели. Для её решения определяющим явилось наблюдение, что, с точностью до сопряжения операторами умножения на степенные функции, эти равенства представляют собой сплетающие соотношения для генераторов эквивалентных представлений основной серии. Таким образом, оператор отражения выражается через интегральный (псевдодифференциальный) оператор со степенным ядром, сплетающий эти эквивалентные представления.

Одночастичные собственные функции получаются в результате действия K-оператора на функцию, тождественно равную единице. Также через него выражается повышающий оператор, переводящий *(n-1)*-частичную собственную функцию в *n*-частичную. Прямым следствием найденного выражения для K-оператора является интегральное представление типа Гаусса-Гивенталя для собственных функций, для которого в предыдущих работах, посвященных спиновым цепочкам, была разработана фейнмановская диаграммная техника. Собственные функции и ядра интегральных операторов представляются в виде фейнмановских диаграмм, где роль пропагатора играет степенная функция. В диссертации доказана ортогональность построенного набора одночастичных собственных функций и другие их свойства: симметрия относительно замены знака спектральной переменной, представление через гипергеометрическую функцию Гельфанда-Граева над полем комплексных чисел и интегральное представление типа Меллина-Барнса. Последний результат вкупе с комплексным аналогом интеграла Густафсона BC-типа использован для доказательства полноты набора одночастичных собственных функций.

Упомянутая диаграммная техника может быть переформулирована на алгебраическом операторном языке. Этот подход основан на использовании соотношения «звезда-треугольник». В некоторых случаях алгебраический метод вычислений оказывается удобнее диаграммного. Его эффективность продемонстрирована в диссертации при доказательстве нового соотношениея для K-оператора и R-оператора – общего решения уравнения Янга-Бакстера, действующего в тензорном произведении двух представлений *SL(2,C)* основной серии. Это соотношение представляет собой наиболее общую версию уравнения отражения в случае группы симметрии *SL(2,C)*.

Во второй главе диссертации рассматривается *SL(2,R)*-инвариантная спиновая цепочка BC-типа, матрица монодромии которой задается при помощи K-матрицы того же вида, что и в предыдущем случае. Модель, называемая цепочкой из n узлов, определена на пространстве функций n комплексных переменных, аналитических в верхней полуплоскости по каждой из переменных и интегрируемых с квадратом относительно некоторой степенной меры. Вновь решается задача диагонализации B-элемента матрицы монодромии. В 2003 году Деркачевым, Корчемским и Манашовым была решена та же задача для случая единичной K-матрицы, в настоящей диссертации было рассматрено обобщение той модели. Для нахождения собственных функций применяется такая же индуктивная процедура, как и в предыдущей главе. Получено выражение для оператора отражения в виде отношения гамма-функций от операторного аргумента.

Как и в предыдущей модели, через K-оператор выражаются повышающий оператор и собственные функции B-оператора для цепочки из одного узла. Используя представление для отношения гамма-функций через интеграл Эйлера первого рода, были выведены два выражения для оператора отражения: в первом результат его действия на функцию представляется через контурный интеграл со степенным ядром, во втором – через интеграл по верхней полуплоскости, ядро которого является интегралом того же типа от произведения степенных функций. Из второй формулы следует интегральное представление типа Гаусса-Гивенталя для одночастичных собственных функций. Для этого представления, как и в случае ранее рассмотренной модели, давно разработана фейнмановская диаграммная техника. При помощи нее в диссертации доказана ортогональность одночастичных собственных функций. Для доказательства полноты набора одночастичных функций использовано интегральное представление типа Меллина-Барнса для гипергеометрической функции и интеграл де Бранжа-Вильсона (простейший случай интеграла Густафсона BC-типа).

Третья глава диссертации посвящена общим собственным функциям угловых квантовых миноров L-оператора *SL(N,C)*-инвариантной спиновой цепочки A-типа. L-оператор выражается через генераторы представления основной унитарной серии группы *SL(N,C)* на пространстве квадратично-интегрируемых функций *N(N-1)/2* комплексных переменных. Для этих собственных функций известна индуктивная формула, выражающая собственную функцию для *SL(N,C)* через интеграл (с некоторым ядром) от собственной функции для *SL(N-1,C)*. В диссертации была получена альтернативная рекуррентная конструкция – интегральное представления типа Меллина-Барнса, в котором интегрирование по переменным функции заменяется интегрированием по спектральным параметрам, задающим собственные числа.

Автором были получены явные формулы для квантовых миноров L-оператора *SL(N,C)*-инвариантной модели в терминах квантовых миноров для *SL(N-1,C)* и выражения для действия неугловых квантовых миноров на собственные функции угловых. При помощи этих соотношений спектральная задача для угловых миноров сводится к системе конечно-разностных уравнений для ядра интеграла из индукционной формулы для собственных функций. Явное выражение для ядра было получено в случае индукцинного шага от $N=2$ к $N=3$ и от $N=3$ к $N=4$. В первом случае ядро представляется через комплексные гамма-функции Гельфанда-Граева. На индукционном шаге от $N=3$ к $N=4$ конечно-разностная система становится многомерной и значительно более сложной. Для ее решения используется обобщение преобразования Меллина, в результате ядро выражается через гипергеометрическую функцию над полем комплексных чисел, введенную в работе Неретина 2019 года. Отдельную задачу представляет вывод формул для действия базового набора неугловых миноров на собственные функции угловых. Для их вывода используются нетривиальные разностные соотношения для гипергеометрических функций над полем комплексных чисел, которые автор доказал при помощи интегрального представления для этих функций. В конце главы при помощи интеграла Густафсона A-типа доказано соотношение ортогональности для построенных наборов собственных функций в случаях $N=3$ и $N=4$, из которого следует мера интегрирования для соотношения полноты.

Подводя итог, можно сказать, что автором диссертации получены оригинальные интересные результаты в теории квантовых интегрируемых систем и специальных функций. Эти результаты должным образом опубликованы в четырёх работах в журналах по тематике исследования, входящих в список изданий, рекомендованных ВАК. Диссертационная работа выполнена на высоком уровне и удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым ВАК к кандидатским диссертациям. Павел Владимирович Антоненко безусловно заслуживает присвоения степени кандидата физико-математических наук.

Научный руководитель,
кандидат физико-математических наук,
старший научный сотрудник ПОМИ РАН

П. А. Валиневич

Подпись руки
Валиневича Павла
Анатольевича
заверяю
гл. специалист
Сергина Е. Г.
23.03.2026

...государственное бюджетное учреждение науки Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А. Стеклова Российской академии наук