

Отзыв научного руководителя о диссертации И. М. Васильева
«Граничная гладкость, К-замкнутость и разложения Литлвуда-Пэли»,
представленной на соискание учёной степени кандидата физико-
математических наук по специальности 01.01.01-вещественный,
комплексный и функциональный анализ

В диссертации решается несколько важных задач из дисциплины, которую принято сейчас называть «гармонический анализ в евклидовых пространствах». Я скажу немного о каждой, придерживаясь (не очень твердо) порядка, в каком они решались, а не того порядка, в каком они изложены в диссертации.

Две задачи относятся к представлению классов Харди H_p в n -мерном евклидовом пространстве в виде классов гармонических векторных полей (f_0, f_1, \dots, f_n) в полупространстве размерности $n+1$. Как известно, такое представление возможно лишь при $p > (n-1)/n$. Граничные значения функций f_1, \dots, f_n связаны с граничными значениями функции f_0 преобразованиями Рисса.

В связи с одним результатом, относящимся к размерности $n=1$ и очень эффективно применявшимся в теории интерполяции одномерных классов Харди, возник вопрос о связи условия $\log f_0 \in \text{ВМО}$ (для положительных функций f_0) с некоторыми поточечными оценками преобразований Рисса функции f_0 или ее положительных степеней. Достаточно полный ответ на этот вопрос получен И. М. Васильевым и изложен в главе 4 диссертации. Интересно, что и у этого результата уже нашлись применения в теории интерполяции (Д. В. Руцкий).

Граничные значения гармонического векторного поля из H_p представляют собой элемент прямой суммы $n+1$ копии пространства L_p , с равенством норм. Такое изометрическое вложение шкалы классов Харди в шкалу лебеговых пространств вызывает вопрос о том, имеет ли здесь место так называемая К-замкнутость – некое просто формулируемое свойство, очень полезное в теории интерполяции. Снова было хорошо известно, что это свойство имеет место в размерности 1, однако в больших размерностях вопрос был открыт для показателей, меньших единицы. Ответ оказался положительным, этот результат изложен в главе 3 диссертации.

В короткой пятой главе диссертации приведен интересный и, вероятно, полезный технический результат, гласящий, что для описания пространств Лизоркина-Трибеля на n -мерном евклидовом пространстве пригодны произвольные последовательности мультипликаторов, удовлетворяющие условиям наподобие условий теоремы Хёрмандера-Михлина. Не вдаваясь в подробности, отмечу, что, как и в двух предыдущих случаях, в качестве мотивировки здесь снова выступают некоторые оценки из размерности 1.

Все перечисленные результаты основаны на методах, характерных для теории классов Харди и теории сингулярных интегральных операторов. Их доказательства требуют тщательной и сложной работы. Все это относится и к главе 2, однако про нее следует

сказать особо. Дело в том, что в ней *вещественные* методы применяются для решения *комплексной* по своему происхождению задачи о падении граничной гладкости аналитической функции без нулей в сравнении с гладкостью ее модуля в случае единичного шара n -мерного комплексного пространства.

Как известно, у этой задачи имеются глобальный и локальный аспекты, причем локальный стал разрабатываться относительно недавно, лишь начиная с 2012 г. Как и в предыдущих задачах, локальные результаты относились к размерности 1, а И. М. Васильеву удалось получить их многомерное обобщение. При этом он обнаружил новый эффект, который в размерности 1 отсутствует в принципе: характерное падение гладкости в случае внешних (аналитических) функций в шаре будет не таким, как в случае аналитических функций, непрерывных вплоть до границы.

Методы решения снова основаны на оценках сингулярного интегрального оператора (преобразования Коши), со всеми особенностями и усложнениями, характерными для шара: анизотропность естественной метрики на сфере, несверточный характер интегральных преобразований и т.д. Пожалуй, глава 2 – самый яркий момент во всей диссертации.

Я должен ещё сказать о том, как протекала работа над диссертацией, однако здесь мне ничего не остаётся, как быть кратким. Всё было почти как в идеально мыслимой ситуации, когда научный руководитель ставит задачу, а аспирант попросту через некоторое время приносит решение. Отличие от идеала в лучшую сторону состояло в том, что несколько не совсем удачных попыток решению все же обычно предшествовали, так что у нас было много поводов для математического общения. При этом мое участие в работе сводилось к советам, иногда к исправлению или улучшению мелких деталей, не более этого. Я высоко ценю доказанные И. М. Васильевым теоремы, считаю, что его диссертация удовлетворяет требованиям ВАК, предъявляемым к кандидатским диссертациям, а ее автор заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук.

Доктор физико-математических наук

Академик РАН

Кисляков

С. В. Кисляков

