ОТЗЫВ

официального оппонента на диссертационную работу Иевлева Павла Николаевича «Операторный подход к построению комплексных и отражающихся случайных процессов», представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.05 – Теория вероятностей и математическая статистика.

Диссертация Павла Иевлева посвящена исследованию свойств процессов, траекторий которых трудно, а иногда и невозможно описать явно. Основная идея используемых им методов состоит в замене операций над траекториями операциями над функционалами, так же, как это делается в теории обобщенных функций.

Первая глава диссертации посвящена построению вероятностной аппроксимации решения задачи Коши для многомерного уравнения Шрёдингера в виде предела математических ожиданий функционалов от точечных пуассоновских полей. Уравнение Шрёдингера получается из уравнения теплопроводности путем формальной замены t на it и на первый взгляд кажется, что вероятностное представление решения может быть получено из стандартного представления решения задачи Коши для уравнения теплопроводности (в виде среднего значения функционала от винеровского процесса) путем замены винеровского процесса $w(t)$ на процесс $\sqrt{i}\,w(t)$. Результаты такого типа в литературе имеются, но удовлетворительного решения они не дают. Связано это с тем, что такого типа представление имеет место, но только в случае, если начальная функция является целой аналитической функцией экспоненциального типа. Причем даже при таком сильном ограничении соответствующую процедуру практически невозможно реализовать методами статистики, так как приходится вычислять математическое ожидание экспоненциально растущей функции. В диссертации Иевлева рассматривается существенно более сложный метод аппроксимации, главным преимуществом которого является необходимость вычислять математические ожидания только от ограниченных функций. В первом параграфе этой главы строится формальный аппарат обобщенных случайных величин, позволяющий в данном случае в удобной сжатой форме записывать длинные формулы.

Во второй главе диссертации аналогичная аппроксимация строится не для задачи Коши, а для начально-краевой задачи с краевыми условиями Дирихле и Неймана в единичном шаре пространства $\mathbb{R}^d$ для уравнения $u_t = \sigma^2\Delta u/2$, зависящего от комплексного параметра σ, удовлетворяющего условию $\arg\sigma^2 \in [0,\pi/2]$. Случай $\sigma^2 = 1$

соответствует уравнению теплопроводности, а случай $\sigma^2 = i$ – уравнению Шрёдингера. Для уравнения теплопроводности известное вероятностное представление решения начально-краевой задачи с условием Неймана дается в виде математического ожидания функционала от процесса, отражающегося от границы, а для начально-краевой задачи с условием Неймана – в виде математического ожидания функционала от процесса с условием поглощения на границе. Во второй главе диссертации строится два варианта комплексного броуновского движения в единичном шаре пространства $\mathbb{R}^d$ – с отражением от границы шара и с его поглощением на границе. Эти процессы являются с одной стороны "комплексификацией" соответствующих известных вещественных процессов, а с другой стороны, совершенно ясно, что эти процессы могут быть построены только с использованием аналитических методов, так как всякое геометрическое понятие "отражения" или "поглощения" полностью теряется для комплексного процесса. Для построения таких процессов также был использован разработанный в главе 1 аппарат обобщенных случайных величин. Основная идея построения состояла в том, что обе операции и отражение/поглощение и комплексификация были перенесены с траекторий процесса на функционалы от процесса, как это принято в теории обобщенных функций. Аналогичные варианты комплексных процессов (с отражением или поглощением) были построены также для случайного блуждания. Для случая, когда последовательность случайных блужданий слабо сходится к винеровскому процессу, доказаны соответствующие предельные теоремы.

Главы 3 диссертации посвящена построению с помощью операторной техники отражающихся версий броуновского движения и случайного блуждания в шаре. Соответствующая задача является нетривиальной, так как речь идет об отражении от границы области нигде не дифференцируемых (или даже разрывных, как в случае случайного блуждания) траекторий, когда отражение не сводится к смене знака нормальной производной. Для процессов с непрерывными траекториями теория отражающихся процессов ведет начало с работы Скорохода, в которой строилось отражение от начала координат произвольной неслучайной функции (так называемая задача Скорохода). Всякий отражающийся процесс представляет из себя пару процессов — процесс со значениями в области и процесс на границе, возрастающий только в те моменты, когда первый процесс выходит на границу области. Этот процесс обычно отождествляют с локальным временем на границе. Другой известный подход, ведущий начало с работ японских математиков Сато и Танака, для построения отражающихся версий диффузионных процессов использует совсем другие идеи. Именно, процесс в области сразу задается как марковский процесс, переходная функция которого выражается через фундаментальное решение начально-краевой задачи для уравнения Колмогорова (то есть, в отличие от подхода Скорохода, нет исходного процесса, траектории которого мы отражаем от границы), а существование процесса на границе выводится из общих результатов о структуре аддитивного функционала от марковского процесса. Заметим, что оба эти подхода применимы только для случая процессов с непрерывными траекториями.

В диссертации Павла Иевлева используется другой метод, связанный с одной стороны, с использованием идеологии перенесения отражения с траекторий процесса на функционал от траектории, с другой стороны, на широком использовании операторных методов.

Вместо определения траекторий процесса с отражением в диссертации определяется полугруппа операторов P^t, $t \geqslant 0$ Каждый оператор P^t этой полугруппы переводит начальную функцию $f \in W_2^2(\mathbb{R}^d)$ в функцию $(P^t f)(x) = \mathrm{E}\widetilde{f}(\xi_x(t))$ где $\widetilde{f}$ – это некоторое специальное продолжение функции $f \in W_2^2(D)$ до функции класса $f \in W_{2,loc}^2(\mathbb{R}^d)$, а $\xi_x(t)$ – исходный процесс, траекторию которого мы хотим сделать отражающейся от границы. Фактически строятся два разных способа продолжения – один соответствует отражающемуся процессу, а второй процессу в области. Этим продолжениям отвечают полугруппы $P^t f$ и $R^t f$. Также, как и в конструкции Скорохода, разность этих способов продолжения связана с процессом, обеспечивающим разворот траектории от границы, то есть с локальным временем. Формально, в диссертации строится семейство операторов $Q^t = P^t - R^t$, переводящих функции заданные на границе области, в функции, заданные в области. Для винеровского процесса такие операторы выражаются в виде интеграла по среднему локальному времени от нормальной производной на границе. Так как отражающийся процесс является марковским, введенные семейства операторов P^t определяет все конечномерные распределения.

Далее в главе 3 показано, что есть естественный способ определить операторы R^t, Q^t как усреднение некоторых случайных операторов, заданных потраекторно.

Таким образом, в диссертации показано, что процессу в области отвечает семейство случайных операторов, действующих на функции, заданные в области, а процессу на границе (аналогу локального времени) соответствует также семейство случайных операторов, действующих на нормальную производную функции на границе (в диссертации этот объект называется случайным накопленным импульсом). К преимуществам данного подхода можно отнести то, что он не требует непрерывности траекторий. Это дало возможность в главе 3 построить отражающиеся версии случайных блужданий и доказать соответствующие предельные теоремы.

Далее, в четвертой главе указанный подход обобщается со случая шара, на случай произвольной области с гладкой границей (при этом результаты, полученные для шара существенным образом используются), а в качестве процесса, от которого строится "отражающаяся" версия, рассматривается произвольный процесс Леви, с мерой Леви, инвариантной относительно вращений и конечным вторым моментом. Случай произвольной области оказался много сложнее случая области-шара, так как в общем случае (в отличие от шара) нет явной формулы для собственных функций задачи Неймана, а используемое в главе 3 диссертации специальное продолжение начальной функции с области D на все $\mathbb{R}^d$ базировалось на возможности продолжения собственных функций задачи Неймана до решения уравнения Гельмгольца во всем пространстве. Это нетрудно сделать, если эти функции явно заданы, и совершенно непонятно как делать в общем случае (для произвольной области есть примеры, когда это просто неверно). Для преодоления этой трудности использовался другой метод продолжения. Суть его состоит в том, что "продолжающая" функция строится локально и совпадает с начальной функцией только в некоторой окрестности заданной точки, а вне этой окрестности задается рядом, который, вообще говоря, может расходиться. Также, как и в главе 3, были построены семейства операторов R^t, Q^t и их "случайные" версии. Следует отметить, что в данном случае метод Скорохода не применим, ввиду сильной нерегулярности траекторий (траектория произвольного процесса Леви может иметь всюду плотное множество точек разрыва).

В последнем параграфе главы 4 исследуется случай, когда мы отказываемся от предположения о существовании второго момента. Именно, для $\alpha \in (1, 2)$ рассматривается случай многомерного α-устойчивого процесса Леви с мерой Леви, инвариантной относительно вращений. В этом случае показано, что семейство операторов Q^t можно выбрать только с точностью до аддитивной постоянной. Невозможность выбрать Q^t однозначно означает, что средний накопленный импульс определяется лишь с точностью до константы, и корректно определены лишь разности накопленного импульса в разных точках.

Из недостатков могу отметить только опечатки. Например, в формуле (1.1) стр.11 в левой части уравнения пропущено i. В формуле (2.1) стр. 23 не указано, что D - это единичный шар.

Считаю, что диссертационная работа по своей актуальности и научной ценности полученных результатов соответствует всем требованиям, которые предъявляются к кандидатским диссертациям, а ее автор Иевлев Павел Николаевич заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.05 – Теория вероятностей и математическая статистика.

Официальный оппонент: доктор физико-математических наук (специальность 01.01.03 – математическая физика), профессор, профессор кафедры алгебры и математических методов гидродинамики Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования Воронежский государственный университет.

e-mail: yeg@math.vsu.ru тел.раб.: (473)2208641

Ю.Е. Гликлих

31.08.2021

Организация: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Воронежский государственный университет» Почтовый адрес: 394018, Россия, г. Воронеж, Университетская площадь, 1. тел. +7 (473) 220-75-21, вебсайт организации: www.vsu.ru, e-mail: office@main.vsu.ru

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Воронежский государственный университет" (ФГБОУ ВО «ВГУ»)
Подпись Гликлих Ю.Е.
заверяю ведущий специалист
должность
Прудбайло 31 08 2021
подпись, расшифровка подписи