

Отзыв официального оппонента на диссертационную работу  
Петровой Юлии Петровны

Точные асимптотики  $L_2$ -малых уклонений для  
конечномерных возмущений гауссовских процессов,

представленной на соискание ученой степени кандидата  
физико-математических наук по специальности  
01.01.05 – Теория Вероятностей и Математическая Статистика

Исследование малых уклонений для случайного процесса  $X$  сводится к изучению вероятности  $\mathbb{P}(\|X\| < \varepsilon)$ , когда  $\varepsilon \downarrow 0$ . Здесь  $\|\cdot\|$  обозначает норму в каком-нибудь удобно выбранном пространстве. В диссертации этим пространством является  $L_2$ . Для гауссовских процессов типичный ответ имеет вид

$$\mathbb{P}(\|X\| < \varepsilon) = D\varepsilon^C \exp(-B\varepsilon^{-A})(1 + o(1)), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (1)$$

с некоторыми положительными постоянными  $A, B, D$  и вещественным  $C$ . Отметим, что асимптотики экспоненциального типа часто встречаются также в задачах спектральной теории и их доказательство, как правило, представляет серьезные трудности. Зачастую изучается более доступная логарифмическая асимптотика, т.е. поведение  $\ln \mathbb{P}(\|X\| < \varepsilon)$ . В диссертации рассматривается точная асимптотика, т.е. асимптотика вида (1).

Эта задача поставлена в контексте теории возмущений: изучаемые в диссертации процессы являются конечномерными возмущениями некоторых "модельных" гауссовских процессов, для которых все необходимые характеристики вычисляются явно, или почти явно. Одна из важных характеристик – набор собственных значений ковариационного оператора. Основную роль играет принцип сравнения Ли, в соответствии с которым, при условии "асимптотической близости" собственных значений возмущенной и невозмущенной задач, асимптотика типа (1) сохраняется с точностью до явного множителя. Надо отметить, что даже для модельных операторов нахождение собственных значений (а точнее, их асимптотического поведения) является непростой задачей, см. например, главу 4.

Прежде в литературе изучались либо одномерные возмущения, либо весьма частные случаи конечномерных возмущений. Одна из заслуг

Ю.П. Петровой в том, что она предложила общую схему исследования. Прежде всего, она обобщила понятие некритического/критического возмущения на конечномерный случай. В соответствии с этой схемой, при некоторых дополнительных условиях на возмущение (Условие А) для критического и некритического случая выписываются явные формулы, связывающие асимптотики малых уклонений для возмущенного и невозмущенного процессов. Такой подход позволяет изучать широкий класс процессов и возмущений, популярных в теории вероятностей.

С другой стороны, есть важные примеры, для которых Условие А не выполнено. Поэтому с ними приходится разбираться индивидуально. Для них доказательства опираются на принцип Ли, но конкретные вычисления, необходимые для определения критичности возмущения, или для нахождения асимптотики собственных значений ковариационного оператора, как правило, далеки от тривиальных. Здесь требуется техническая изобретательность и богатый аналитический арсенал – от осциллирующих интегралов до спектральной теории дифференциальных операторов. Основной объем диссертации как раз и посвящен исследованию важных и непростых примеров, которые не укладываются в рамки общего подхода.

Диссертация состоит из введения, пяти глав и заключения.

Первая глава описывает общий подход к изучению малых уклонений. Вторая глава касается важного технического вопроса – асимптотики осциллирующих интегралов с медленно меняющимися амплитудами. Эти результаты применяются для нахождения малых уклонений в случае, когда собственные значения ковариационного оператора содержат медленно меняющуюся добавку. Третья глава посвящена процессам Дурбина, возникающим при проверке выборки на принадлежность к нормальному, логистическому, гамма распределениям, распределениям Лапласа и Гумбеля с неизвестными параметрами. В четвертой главе получены точные асимптотики спектров ковариационных операторов, а также точная асимптотика вероятности малых уклонений для некоторого класса гриновских процессов с исключенным трендом конечного порядка. Рассмотренные в третьей и четвертой главе процессы – примеры ситуации, не подчиняющейся общей схеме первой главы. В пятой главе собраны вспомогательные результаты, заимствованные из других источников.

В работе получены интересные новые результаты по точной асимптотике малых уклонений для конечномерных возмущений гауссовских процессов: разработан общий подход к задаче и рассмотрен ряд важных

и прежде недоступных примеров. Диссертация убедительно демонстрирует способность Ю.П. Петровой к самостоятельной научной работе и ее техническое мастерство.

В качестве замечания стоит отметить, что текст диссертации выиграл бы от более четкого описания новизны полученных результатов во введении. По моему мнению, перед описанием положений, выносимых на защиту, следовало бы провести более детальное сравнение полученных результатов с имеющимися в литературе, с указанием принципиальных трудностей, которые удалось преодолеть. Разумеется, эти сведения можно найти в основном тексте при внимательном чтении, но было бы желательно собрать их во введении.

Второе замечание относится к оформлению диссертации. Утверждения разного типа (определения, теоремы и т.д.) в тексте нумеруются независимо, что, на мой взгляд, усложняет чтение. Я бы предложил сплошную нумерацию, облегчающую поиск по ссылкам.

Указанные замечания носят рекомендательный характер и не меняют общей положительной оценки представленной работы.

Результаты работы своевременно и полно опубликованы. Автореферат правильно отражает содержание диссертации.

Диссертация полностью соответствует требованиям, предъявляемым кандидатским диссертациям, а ее автор несомненно заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.05 – Теория Вероятностей и Математическая Статистика.

Официальный оппонент  
Кандидат физико-математических наук  
Соболев Александр Владимирович

Профессор Кафедры Математики  
Университетского Колледжа, Лондон  
University College London  
email: a.sobolev@ucl.ac.uk

29 сентября 2018 года

