

ОТЗЫВ
официального оппонента на диссертацию
Андрианова Павла Андреевича
"Многомерные периодические системы всплесков",
представленную на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
по специальности 01.01.01 — вещественный, комплексный
и функциональный анализ

Теория всплесков (wavelets) представляет собой активно развивающийся раздел гармонического анализа, основы которого были заложены в 80-е годы прошлого века Ивом Мейером, Стефаном Малла, Ингрид Добеши и другими математиками. Методы теории всплесков находят широкое применение как в теоретических исследованиях, так и при решении многих прикладных задач. В предисловии к книге С.Малла¹ отмечается, что по сравнению с методом Фурье теория всплесков "дает возможность рассмотреть многие явления, связанные с обработкой сигналов, хранением и передачей информации на более высоком, более общем уровне. Эта наука дает возможность создать эффективный теоретический и технический аппарат в таких областях знаний, как теория приближения функций, обработка сигналов, теория информации и кодирования". Основные методы построения ортогональных, биортогональных и периодических систем всплесков и их аппроксимационные свойства изложены в монографии И.Я. Новикова, В.Ю. Протасова и М.А. Скопиной "Теория всплесков" (М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006). Исследованиям различных типов периодических всплесков посвящены работы многих авторов, в том числе В.А. Желудева, Е.А. Лебедевой, А.П. Петухова, М.А. Скопиной, Престина (J. Prestin), Христенсена (Ole Christensen) и Чуи (С.К. Chui). Диссертация П.А. Андрианова относится к этому разделу современной теории всплесков и ее тематика несомненно является актуальной.

Диссертация П.А. Андрианова состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы. Во введении обосновывается актуальность темы работы, приводится краткий обзор литературы и обсуждаются полученные автором основные результаты.

В первой главе приведены обозначения и ряд вспомогательных результатов. При этом используется определение периодического кратномасштабного анализа (ПКМА) из работы И.Е. Максименко и М.А. Скопиной², опубликованной в журнале "Алгебра и анализ". Вводится понятие двойственных систем всплесков, порождёнными двумя масштабирующими последовательностями. Для произвольной квадратной целочисленной матрицы A , модуль определителя которой больше 1, указывается связь между множествами цифр матриц A , A^j и A^{j+1} . Атреас (N. Atreas) в 2016 г. доказал, что бесселевость двойственных систем всплесков достаточна для того, чтобы эти системы являлись

¹Малла С. Вейвлеты в обработке сигналов. М.: Мир, 2005.

²Максименко И.Е., Скопина М.А. Многомерные периодические всплески // Алгебра и анализ 23:2 (2003), 1-39.

фреймами. Основные результаты второй главы (теоремы 16 и 18) существенно дополняют этот результат Атреаса и содержат достаточные условия бесселевости многомерной периодической системы всплесков. На основе этих результатов в § 2.3 изложен алгоритмический способ построения многомерных периодических двойственных фреймов. В этом способе из подходящего набора коэффициентов Фурье одной функции получаются две масштабирующие последовательности коэффициентов, которые порождают двойственные фреймы (теорема 19). В доказательствах существенно используется найденная автором связь между скалярными произведениями сдвигов функций и коэффициентами Фурье двух данных функций.

В третьей главе изложен метод построения многомерных периодических дискретных КМА-всплесков. Автор отмечает, что используемое им определение ПКМА (определение 6) аналогично определению ПКМА, введенному А.П. Петуховым для одномерного случая. В определении 7 вводится понятие соответствующей масштабирующей последовательности. Доказано, что в каждом ПКМА существует масштабирующая последовательность. Теорема 20 характеризует ПКМА в терминах коэффициентов Фурье функций, входящих в масштабирующую последовательность. Основным результатом главы 3 о построении периодических дискретных всплесков сформулирован в виде теоремы 21. В § 3.3 выводятся формулы прямого и обратного дискретного всплеск-преобразования, ассоциированные с предложенной автором конструкцией многомерных периодических всплесков. Приведены матричные формы этих преобразований.

В четвертой главе для многомерного базиса всплесков Хаара доказаны неравенства типа Джексона, прямые и обратные теоремы, а также оценки приближений непрерывных функций рядами Фурье-Хаара. Найдены точные постоянные в оценках для многомерного базиса всплесков Хаара. На мой взгляд, наиболее интересные результаты главы 4 выражают теоремы 25, 28, 29 и 30. Автором проведен детальный анализ представления функций классической системой Хаара и новыми системами всплесков.

Таким образом, в диссертации изучен дискретный периодический кратномасштабный анализ и найдена его характеристика в терминах коэффициентов Фурье масштабирующей последовательности. Дано полное описание алгоритмов построения двойственных базисов и фреймов всплесков, для построенных периодических всплесков найдены формулы для прямого и обратного дискретного всплеск-преобразования, доказаны прямые и обратные теоремы о многомерных аппроксимациях Хаара. Все изложенные в диссертации результаты автора достоверны и являются новыми.

Глубина и новизна проведенного автором исследования подтверждается, в частности, следующими замечаниями.

1. В отличие от приближений непрерывных функций тригонометрическими многочленами в доказанных автором неравенствах типа Джексона уменьшение констант возможно при специальном выборе аппроксимирующих полиномиальных семейств. В теореме 25 для непрерывных периодических функций двух переменных дано полное описание этого нового и интересного явления.

2. Предложенная автором конструкция многомерных периодических двойственных фреймов является новой и естественным образом дополняет конструкцию периодической системы всплесков, построенную для биортогонального случая И.Е. Максименко и М.А. Скопиной. Ключевую роль в этой конструкции играют найденные автором новые достаточные условия бесселевости всплесковых систем.

3. Автором определено новое дискретное всплеск-преобразование для обработки многомерных периодических сигналов и доказана формула обращения этого преобразования.

Автор владеет современными методами функционального анализа, теории приближений, теории всплесков и методами теории матриц.

Все утверждения и теоремы, научные положения, выводы и рекомендации, сформулированные в диссертации, а также полученные автором формулы и неравенства, полностью обоснованы.

Диссертация носит теоретический характер. Полученные в ней результаты могут быть использованы в теории функций, теории приближений и в вычислительной математике. Предложенные автором алгоритмы могут быть полезны при обработке периодических и квазипериодических сигналов.

В целом диссертация оформлена хорошо, однако в ней имеется несколько пробелов и неточностей.

1. Общий подход к построению двойственных пар фреймов в пространстве $L^2[0, 2\pi]$ с использованием последовательностей Бесселя предложен в следующей работе, которую следовало упомянуть в диссертации:

Christensen O., Goh S. Pairs of dual periodic frames // Appl. Comput. Harmon. Anal. 33, No. 3, 315-329 (2012).

2. В связи с результатами главы 2 во введении было бы полезно сформулировать основные результаты о хааровских аппроксимациях непрерывных функций; см., например, теоремы 10.1.4 и 10.1.5 в книге Б.И. Голубова, А.В. Ефимова и В.А. Скворцова³, а также теорему 1 и теорему 5 из главы 3 книги Б.С. Кашина и А.А. Саакяна⁴.

3. Формулу (21) на с. 30 лучше было разбить на две формулы (как и формулу (34) на с.36).

Отмеченные недостатки легко устранимы и не снижают общую высокую оценку работы. Актуальность проведенного автором исследования, новизна и достоверность полученных им результатов не вызывают сомнений, материал изложен логично и хорошо структурирован. Основные результаты полностью доказаны и могут найти применения при обработки цифровых сигналов и в смежных областях.

Автореферат соответствует требованиям ВАК, полно и правильно отражает основные положения диссертационной работы.

Основные результаты получены автором лично и обладают внутренним единством. Результаты, выдвигаемые для публичной защиты, свидетельствуют о личном вкладе автора в развитие методов функционального анализа и могут быть использованы специалистами по теории функций и её применениям. Все утверждения и теоремы полностью обоснованы. Основные результаты диссертации опубликованы в рецензируемых журналах, индексируемых в Scopus. Автор выступал с докладами по теме диссертации на нескольких международных научных конференциях в Армении, Германии и России, а также на семинаре "Конструктивная теория функций" под руководством профессора М.А. Скопиной.


³Голубов Б.И., Ефимов А.В., Скворцов В.А. *Ряды и преобразования Уолша*. Изд. 2-е М.: Изд-во ЛКИ, 2008.

⁴Кашин Б.С., Саакян А.А. *Ортогональные ряды*. М.: Изд-во АФЦБ 1999.

Диссертация Андрианова Павла Андреевича на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук является научно-квалификационной работой, в которой содержатся решения задач, имеющих существенное значение для теории функций и ее применений, что соответствует требованиям ВАК о присуждении ученых степеней, а ее автор заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Фарков Юрий Анатольевич,
доктор физико-математических наук,
ФГБОУ ВО Российская академия народного хозяйства и государственной
службы при Президенте РФ,
Профессор кафедры прикладных информационных технологий

02.02.2022

 Ю. А. Фарков



А. В. П. С. Л.
УЧЕНЫЙ СЕКРЕТАРЬ
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАРОДНОГО
ХОЗЯЙСТВА И ГОСУДАРСТВЕННОЙ
СЛУЖБЫ ПРИ ПРЕЗИДЕНТЕ РФ
* К. Э. Н. К. К. Б. Ч. Д. Р. *