ОТЗЫВ

официального оппонента на диссертацию

Анастасии Горшановой

на тему "Некоторые вопросы аппроксимации системами всплесков"

по специальности 1.1.1 — вещественный, комплексный и функциональный анализ на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Теория всплесков (вейвлетов, wavelets) является обширным разделом современного гармонического анализа и имеет важные применения в обработке сигналов, кодировании информации и во многих других областях. Всплескам и их применениям посвящены десятки монографий, из переведенных на русский язык наиболее известными являются книги Ингрид Добеши (2001) и Стефана Малла (2005). Аппроксимационные свойства всплесков основаны на их способности эффективно представлять сигналы и функции с локальными особенностями (разрывами, пиками) за счет локализации во времени/пространстве и по частоте. Как в теории функций, так и при обработке сигналов, часто применяются характеристики функциональных пространств Лебега, Соболева, Бесова и др. с помощью коэффициентов всплесковых разложений (см., например, главу 9 книги Малла и недавние результаты Ю.В. Малыхина о поперечниках классов Бесова). Аппроксимативные свойства периодических и непериодических систем всплесков изучались во многих работах, однако по сравнению с методами приближений многочленами, рациональными функциями и сплайнами методы приближения всплесками развиты недостаточно. Таким образом, актуальность темы диссертации Анастасии Горшановой не вызывает сомнений.

Диссертация объемом 86 страниц состоит из введения, трех глав, заключения, списка обозначений и списка литературы. Библиография содержит 45 наименований.

Во введении формулируются постановки задач и цели работы, даны ссылки на основные исследования по теме диссертации, обосновывается актуальность темы диссертации и излагаются основные полученные автором результаты. Отмечается, что основной целью данной диссертационной работы является исследование аппроксимационных свойств периодических всплесков, образующих базис или фрейм Парсеваля, и аппроксимационных свойств систем диадических всплесков. Кроме того, изучаются методы построения периодических фреймов всплесков.

По теореме Джексона для произвольной 2π-периодической непрерывной функции f имеет место неравенство

$$E_n(f) \le \omega\left(f, \frac{\pi}{n+1}\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \tag{1}$$

где $E_n(f)$ – наилучшее приближение функции f тригонометрическими полиномами порядка не выше n, $\omega(f, \cdot)$ – модуль непрерывности функции f. Равенство в (1) достигается только в случае, когда f постоянна на всей прямой $\mathbb{R}$, причем неравенство (1) перестает быть верным для всех 2π-периодических непрерывных функций f, если правую его часть умножить на $1-\varepsilon$, где ε – любое положительное число. Для функции $f \in \operatorname{Lip}\alpha$ при $0<\alpha<1$ из (1) следует оценка $E_n(f) \leq Cn^{-\alpha}$ (*прямая теорема*). Обратно, как доказал С.Н. Бернштейн, если $E_n(f) \leq Cn^{-\alpha}$ для некоторого $0<\alpha<1$, то $f \in \operatorname{Lip}\alpha$ (*обратная теорема*). Аналог теоремы Джексона справедлив и в пространствах L_p, $1 \leq p < \infty$, а также в некоторых других пространствах функций. Обратную теорему для равномерных тригонометрических приближений 2π-периодических непрерывных функций доказал С.Б. Стечкин (Изв. АН СССР, 1951), а для L_p-пространств соответствующий результат получен М.Ф. Тиманом и А.Ф. Тиманом (ДАН СССР, 1950). Прямые и обратные теоремы для различных классов функций содержатся в многочисленных книгах и статьях по теории аппроксимации и относятся к разделу теории приближений, названному С.Н. Бернштейном "Конструктивная теория функций".

Прямые и обратные теоремы для произвольных одномерных систем периодических всплесков, полученных с помощью периодизации непериодической всплеск-функции и образующих ортонормированный базис, содержатся в главе 10 монографии И.Я. Новикова, В.Ю. Протасова и М.А. Скопиной (2006). В дополнение к этим теоремам в главе 1 диссертации получено описание аппроксимационных свойств биортогональных базисов периодических нестационарных систем всплесков в пространствах L_p, $1 \leq p < \infty$, и в пространстве непрерывных функций. Основной результат главы 1 (теорема 1.1) представляет собой теорему типа Джексона для ортонормированных систем всплесков. В отличие от ранее доказанных результатов для периодических базисов всплесков, в теореме 1.1 не требуется наличие мажоранты, а система аппроксимирующих всплесков может не иметь порождающей её непериодической функции (то есть является нестационарной системой). Кроме того, в главе 1 приведен аналог теоремы Джексона с ослаблением условий на гладкость всплесковых функций (теорема 1.2).

В главе 2 изложены полученные автором диссертации результаты о фреймах Парсеваля периодических всплесков. В теоремах 2.1 и 2.2 даны необходимые и достаточные условия, при которых система

$$\Psi = \left\{S_j^k \psi_j^m : j \in \mathbb{Z}_+, m = 1, 2, \dots, \rho_j, k \in \mathcal{R}_j\right\}$$

является фреймом Парсеваля. Для непериодических всплесков аналог теоремы 2.2 был доказан в 1997 г. Роном и Шеном в работе, где был сформулирован и доказан широко применяемый в теории всплесков унитарный принцип расширения. Основным результатом первой части главы 2 диссертации является конструктивный критерий для построения фреймов Парсеваля периодических всплесков (см. теоремы 2.3, 2.4 и следствие 2.1).

Аппроксимационные свойства семейств функций, инвариантных относительно сдвига, изучались многими авторами. В 1994 году Де Бором, Девором и Роном (De Boor C., Devore R.A., Ron A.) с помощью порядка аппроксимации описаны аппроксимационные свойства произвольных подпространств, инвариантных относительно сдвигов для функций в $\mathbb{R}^d$. В главе 2 диссертации приближение функций в пространстве L_2 фреймами всплесков оценивается с помощью порядков аппроксимации. В частности, изучается взаимосвязь между порядком аппроксимации фреймом и порядком аппроксимации соответствующим периодическим кратномасштабным анализом $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}_+}$ (ПКМА). Отмечается, что при этом применяется определение ПКМА, отличное от данного в первой главе. А именно, используется определение, включающее в себя наименьшее возможное количество аксиом: условие вложенности подпространств и условие плотности их объединения в пространстве L_2. Приведены необходимые и достаточные условия, при которых фрейм Парсеваля порождает такой ПКМА. Оказывается, что условий теоремы 2.4 достаточно для того, чтобы подпространства V_j, порождённые $2^{-j}k$-сдвигами масштабирующих функций φ_j, образовали ПКМА. В примерах 2.1 и 2.2 обсуждается применение полученных критериев в случае одного всплескового генератора и в случае, когда в качестве масштабирующих функций выступают тригонометрические полиномы.

Говорят, что ПКМА $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}_+}$ имеет *порядок аппроксимации*, равный $\mu_0 \geqslant 0$, если μ_0 есть супремум неотрицательных чисел γ, для которых найдутся такие постоянные $C_\gamma > 0$ и $J_\gamma \in \mathbb{N}$, что для всякого $j \geqslant J_\gamma$ и всех функций f из пространства Соболева H^γ верно неравенство

$$E(f, V_j)_2 \leqslant 2^{-j\gamma} C_\gamma \|f\|_{H^\gamma}.$$

Аналогично определяется порядок аппроксимации фреймом с заменой оценки сверху наилучшего приближения на неравенство

$$\left\| f - \sum_{r=0}^{j-1} \sum_{m=1}^{\rho_r} \sum_{l\in\mathcal{R}_r} \langle f, S_r^l \psi_r^m \rangle S_r^l \psi_r^m \right\|_2 \leqslant 2^{-j\gamma} C_\gamma \|f\|_{H^\gamma}.$$

В теореме 2.5 сформулирован критерий получения определённого порядка аппроксимации ПКМА.

Для систем фреймов многомерных непериодических всплесков в $L_2(\mathbb{R}^d)$ взаимосвязь между порядками аппроксимации фреймом и кратномасштабным анализом изучалась Добеши, Ханом, Роном и Шеном (Daubechies I., Han B., Ron A., Shen Z., 2003). Для систем периодических фреймов всплесков, построенных с помощью унитарного принципа расширения, определение порядка аппроксимации появилось в [Goh S. S., Han B., Shen Z., 2011]. Для непериодических фреймов всплесков необходимые и достаточные условия, при которых фрейм Парсеваля имеет заданный порядок аппроксимации были установлены в [Jetter K., Zhou D.-X., 1995]. В теореме 2.7 показано, как эти результаты можно распространить на периодические фреймы Парсеваля, построенные с помощью критерия из теоремы 2.4. В теореме 2.8 сравниваются порядки аппроксимации фреймом и ПКМА.

Глава 3 посвящена изучению аппроксимационных свойств диадических фреймов всплесков заданных на положительной полупрямой $\mathbb{R}_+$ с бинарной операцией $\oplus$. Для произвольной функции $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ положим

$$f_{j,k}(x) := 2^{j/2} f(2^j x \oplus k), \quad x \in \mathbb{R}_+, \quad j \in \mathbb{Z}_+, \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Для фиксированного $r \in \mathbb{N}$ система

$$\Psi := \{\psi_{j,k}^{(\nu)} \ : \ \nu = 1, \dots, r, \ j \in \mathbb{Z}_+, \ k \in \mathbb{Z}_+\}$$

называется системой всплесков, порожденной набором всплеск-функций $\psi^{(\nu)} \in L^2(\mathbb{R}_+)$, $\nu = 1, \dots, r$. Система Ψ образует фрейм Парсеваля в $L^2(\mathbb{R}_+)$, если для всех $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$ верно равенство

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}_+} \sum_{\nu=1}^{r} \sum_{k\in\mathbb{Z}_+} \left| \left\langle f, \psi_{j,k}^{(\nu)} \right\rangle \right|^2 = \|f\|^2.$$

В главе 3 рассматриваются системы всплесков, построенные с помощью унитарного принципа расширения, в котором всплеск-функции строятся по масштабирующей функции φ. Для разложения функции f по системе целых сдвигов сжатой в 2^j раз масштабирующей функции используется обозначение

$$P_j f = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \langle f, \varphi_{j,k} \rangle \varphi_{j,k}.$$

Частичные суммы разложения функции по системе всплесков обозначаются так:

$$Q_{n,j} f = \sum_{i=n}^{j-1} \sum_{\nu=1}^{r} \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \left\langle f, \psi_{i,k}^{(\nu)} \right\rangle \psi_{i,k}^{(\nu)}.$$

В теореме 3.1 доказывается ограниченность оператора P_j как линейного оператора из $L^p(\mathbb{R}_+)$ в $L^p(\mathbb{R}_+)$. В теоремах 3.2 и 3.4 получена сходимость частичных сумм $P_j f$ к функции f при $j \to +\infty$ и к нулю при $j \to -\infty$ в пространствах $L^p(\mathbb{R}_+)$, $1 < p < \infty$. В теоремах 3.3 и 3.5 аналогичные результаты получены для сходимости сумм почти всюду. Из этих утверждений непосредственно следует сходимость частичных сумм разложения по фрейму всплесков. В теореме 3.6 сформулированы условия для сходимости частичных сумм $Q_{n,j} f$ к f по норме пространства $L^p(\mathbb{R}_+)$, $1 < p < \infty$, в то время как в заключительной теореме 3.7 устанавливается сходимость почти всюду.

Таким образом, в диссертации доказана теорема типа Джексона для нестационарных систем периодических всплесков, образующих биортогоналные базисы в пространствах Лебега и пространстве непрерывных функций. Получены конструктивные необходимые и достаточные условия, при которых система периодических всплесков образует фрейм Парсеваля в пространстве Лебега L_2. Для построенных фреймов всплесков получены необходимые и достаточные условия, при которых периодический фрейм Парсеваля всплесков имеет заданный порядок аппроксимации. Выявлена взаимосвязь и условия совпадения порядка аппроксимации фреймом и порядка аппроксимации периодическим кратномасштабным анализом, порождённым сдвигами масштабирующих функций. Кроме того, доказана сходимость разложений по системе диадических всплесковых фреймов Парсеваля к приближаемой функции почти всюду и по норме пространств Лебега на положительной полупрямой.

Полученные в диссертации результаты достоверны, являются новыми и существенно дополняют исследования П.А. Андрианова, С. Гоха, М.А. Скопиной, Б. Хана и др. математиков.

Автореферат полно и правильно отражает основные положения диссертационной работы. В целом автореферат и диссертационная работа оформлены хорошо, однако имеется несколько пробелов и неточностей. Вот некоторые из них:

1. Во введении следовало упомянуть об основополагающем вкладе С.Н. Бернштейна в конструктивную теорию функций.

2. В список обозначений надо было включить обозначение оператора сдвига S_n^j.

3. В начале главы 3 можно было отметить, что бинарная операция $\oplus$ неассоциативна.

4. Результаты главы 3 можно было проиллюстрировать на известных примерах фреймов всплесков из анализа Уолша.

Отмеченные недостатки легко устранимы и не снижают общую высокую оценку работы.

Результаты диссертации имеют существенное значение для развития современной теории функций и функционального анализа и могут быть использованы специалистами по вещественному, комплексному и функциональному анализу, работающими в Математическом институте им. В.А. Стеклова РАН, в Московском, Санкт-Петербургском, Воронежском, Новосибирском университетах и других институтах, университетах и научных учреждениях.

Основные результаты получены автором лично и обладают внутренним единством. Все утверждения и теоремы, научные положения, выводы и рекомендации, сформулированные в диссертации, полностью обоснованы и изложены в 4-х работах, опубликованных в ведущих научных журналах из списка, рекомендованного ВАК.

Содержащиеся в диссертации результаты неоднократно докладывались автором на научно-исследовательском семинаре по конструктивной теории функций (руководитель — д.ф.-м.н., профессор М.А. Скопина) и на IV Конференции математических центров России (Санкт–Петербург, 2024 г.) Результаты третьей главы диссертации докладывались научным руководителем д.ф.-м.н. Е.А. Лебедевой на XXXIV Летней конференции по математическому анализу (Санкт–Петербург, 2025 г.).

Рассматриваемая диссертационная работа удовлетворяет всем требованиям "Положения о присуждении ученых степеней", предъявляемым к кандидатским диссертациям. Автор диссертации Горшанова Анастасия бузусловно заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.1 – "вещественный, комплексный и функциональный анализ".

Официальный оппонент:

Доктор физико-математических наук,
профессор кафедры прикладных информационных технологий
Института общественных наук ФГБОУ ВО "Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте РФ"

Фарков Юрий Анатольевич

Адрес места работы:

119571, г.Москва, пр-т Вернадского, 82, ИОН РАНХиГС
Тел.: +7(499) 956-96-51, e-mail: farkov-ya@ranepa.ru

Подпись Ю.А. Фаркова удостоверяю:

ЗАВЕРЯЮ
УЧЕНЫЙ СЕКРЕТАРЬ

01.04.2026