

Отзыв официального оппонента
на кандидатскую диссертацию
Алексея Евгеньевича Цыбышева

на тему: «Оснащенные соответствия Воеводского и их применения»,
по специальности 01.01.06
на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук.

Идеи А. Гротендика вдохновили В. Воеводского и Ф. Мореля на построение в середине 90-х годов сначала нестабильной мотивной гомотопической категории $H(k)$, а затем и стабильной мотивной гомотопической категории $SH(k)$. Стабильная категория позволяет систематически строить теории когомологий на алгебраических многообразиях и позволила Воеводскому доказать гипотезу Милнора, за которую он был удостоен Филдсовской медали. Созданный язык и идеи были подхвачены многими математиками и позволили решить ряд других классических проблем.

Поскольку категория $SH(k)$ опеределена как некоторая локализация, вычислять группы морфизмов в ней непросто. В своих заметках "Notes on framed correspondences" Воеводский ввел категорию оснащенных (фрэйм) соответствий $Fr+(k)$, и категорию фрэйм-пучков множеств и кратко описал программу построения для категории $SH(k)$ новой модели, лучше адаптированной для вычислений. Г. Гаркуша и И. Панин (совместно с А. Ананьевским, А. Нешитовым и А. Дружининым) успешно реализовали эту программу. Гаркуша и Панин построили новую модель для $SH(k)$, сделав все вычисления в $SH(k)$ локальными. Для этого в их работе была развита теория фрэйм-мотивов. Настоящая диссертация посвящена дальнейшему развитию и применению методов оснащенных соответствий. Все вышесказанное показывает актуальность этой темы.

К базовым вопросам о строении категории $SH(k)$ относятся вопросы вычислений пучков стабильных мотивных гомотопий пунктированных мотивных пространств и T-спектров. В данной диссертации рассматриваются пространства вида X/U , где X - это гладкое многообразие, а U — его открытое подмножество, имеющее непустое пересечение с каждой компонентой связности многообразия X . Другой объект изучения в диссертации — спектр алгебраических кобордизмов MGL .

Для указанных пар (X,U) в диссертации рассматривается канонический морфизм $Fr(\Delta \cdot \times -, X/U) \rightarrow \Omega^\infty(P_{1,\infty}) \Sigma^\infty(P_{1,\infty})(X/U)$ пунктированных мотивных пространств и доказывается, что он всегда является локальной эквивалентностью. Указанная теорема является мотивным аналогом знаменитой теоремы Сегала и обобщает известный результат Гаркуши и Панина. Кроме того, эта теорема позволяет вычислять пучки стабильных гомотопических групп веса ноль у пространства X/U . У этого результата есть интересное следствие, не вошедшее в диссертацию.

Кроме того, упомянутое выше локальное вычисление мотивного пространства $\Omega^\infty(P_{1,\infty}) \Sigma^\infty(P_{1,\infty})(X/U)$ опирается на теорему о конусе для открытых пар вида (X,U) . Эта теорема сама по себе имеет большое значение. Ее доказательство опирается на хорошо продуманную серию лемм трансверсальности (moving lemmata) в категории линейных фрэйм соответствий. К тому же, эта теорема широко обобщает теорему о конусе Гаркуши, Нешитова и Панина.

Опишем теперь последний основной результат диссертации; в отличие от упомянутых выше, он доказан в предположении, что характеристика основного поля равна нулю.

Диссертант определяет понятия кобордизм фрэйм-соответствий и линейных кобордизм фрэйм-соответствий, строит градуированное кольцо вида $\bigoplus_{n \geq 0} H_0(ZF^{cob}(\Delta \bullet_k, G_m^{\wedge n}))$ и задается вопросом его вычисления. Доказанная им теорема гласит, что это градуированное кольцо естественно изоморфно градуированному кольцу Милнора $K^M(k)$ поля k . А. Цыбышев также доказал, что первое из этих колец совпадает с кольцом $\bigoplus_{n \geq 0} (\pi_{n,n}(MGL))(k)$, но это не вошло в результаты диссертации. Тем самым, последний результат можно и нужно рассматривать как большой шаг на пути к вычислению кольца $\bigoplus_{n \geq 0} (\pi_{n,n}(MGL))(k)$.

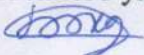
Опишу кратко содержание диссертации по главам. Она состоит из введения, двух глав, заключения и библиографии. Во введении диссертант напоминает историю предмета и формулирует содержательные части четырех основных результатов диссертации. В главе 1 автор доказывает первые три основных результата: мотивный аналог теоремы Сегала для пар и теорему о мотивно-фибрантной замене P^1 -надстроечного спектра пространства X/U (см. теорему 1.1.17), теорему о многосвязности пространства $Fr(\Delta \bullet \times -, X/U)$ (теорема 1.1.18), сформулированную выше, и теорему о конусе (теорема 1.1.34), также упомянутую выше.

В главе 2 формулируется и доказывается теорема об изоморфизме градуированных колец $\bigoplus_{n \geq 0} H_0(ZF^{cob}(\Delta \bullet_k, G_m^{\wedge n})) = K^M(k)$. (теорема 2.1.19). Эта теорема — важный аналог известного вычисления Воеводского и Суслина.

Таким образом в диссертации решены трудные и важные задачи теории A^1 -гомотопий. Автор продемонстрировал свободное владение рядом современных разделов алгебраической геометрии, гомологической и гомотопической алгебры, и новейшей техникой оснащенных соответствий. Он проявил высокую математическую культуру и способность к построению новых оригинальных конструкций. Текст написан аккуратно и четко. Отдельные опечатки (в частности, несколько прописных букв вместо строчных) не влияют на общее положительное впечатление от диссертации и не мешают пониманию основных результатов.

Все основные результаты работы являются новыми, получены автором самостоятельно, строго доказаны и опубликованы в реферируемых математических журналах из списка ВАК. Автореферат точно и полностью отражает содержание диссертации. Все основные результаты работы доложены на ведущих алгебраических семинарах и хорошо известны ведущим специалистам по данной тематике. Основные результаты настоящей работы рекомендуется положить в основу спецкурсов на математических факультетах МГУ, СПбГУ, НГУ и других университетов страны.

Таким образом, настоящая диссертация удовлетворяет всем требованиям ВАК, и ее автор А.Е. Цыбышев, безусловно, заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук.

Доцент Санкт-Петербургского государственного университета, профессор РАН,
доктор физико-математических наук  Михаил Владимирович Бондарко
специальность — 01.01.06.

Адрес: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования "Санкт-Петербургский государственный университет",
Университетская наб., д. 7–9, 199034, Санкт-Петербург, Россия.

Адрес электронной почты: m.bondarko@spbu.ru. Сайт: <https://spbu.ru/>; тел. 8(812) 3238466.

