ОТЗЫВ
официального оппонента на диссертационную работу
Дородного Марка Александровича
“Усреднение нестационарных периодических уравнений”,
представленную на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук по специальности
01.01.03 – “Математическая физика”

Диссертация М. А. Дородного относится к актуальной и активно развивающейся области — теории усреднения, изучающей приближение решений дифференциальных уравнений с периодическими быстро осциллирующими коэффициентами решениями “эффективных”, или иначе, усреднённых уравнений с постоянными коэффициентами. Речь идёт об оценке погрешности таких приближений. В последние полтора–два десятилетия активно развивается направление так называемых *операторных оценок погрешности* в задачах усреднения, начало которому положили пионерские работы М. Ш. Бирмана и Т. А. Суслиной. В этой области уже получено много интересных результатов и разработаны различные подходы; упомянем работы В. В. Жикова, С. Е. Пастуховой, Д. И. Борисова, К. Кенига, Ф. Лина, Ж. Шена, В. П. Смышляева, И. В. Камоцкого, К. Д. Чередниченко, Н. Н. Сеника, Ю. М. Мешковой и других. Для эллиптических и параболических задач усреднения операторные оценки уже достаточно хорошо изучены. Более трудным представляется получение подобных оценок для нестационарных уравнений типа Шрёдингера и гиперболического типа. Такие задачи были исследованы в гораздо меньшей степени и оставалось много открытых вопросов. Диссертационная работа М. А. Дородного посвящена операторным оценкам погрешности в задачах усреднения нестационарных уравнений типа Шрёдингера и уравнений гиперболического типа.

Опишем постановку задач. В пространстве $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ исследуется матричный дифференциальный оператор $A_\varepsilon = b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}/\varepsilon) b(\mathbf{D})$, $\varepsilon > 0$. Здесь $g(\mathbf{x})$ — ограниченная, положительно определённая (равномерно эллиптическая) матрица, периодическая относительно некоторой решётки периодов Γ; $b(\mathbf{D}) = \sum_{j=1}^d b_j D_j$ — матричный дифференциальный оператор первого порядка, причём символ $b(\boldsymbol{\xi})$ есть матрица максимального ранга. При сделанных предположениях оператор A_ε сильно эллиптичен. Также рассматривается более общий дифференциальный оператор

$$B_\varepsilon = A_\varepsilon + \sum_{j=1}^{d} (a_j(\mathbf{x}/\varepsilon) D_j + D_j a_j(\mathbf{x}/\varepsilon)) + Q(\mathbf{x}/\varepsilon),$$

включающий члены младшего порядка с подходящими периодическими матричными коэффициентами $a_j(\mathbf{x})$, $Q(\mathbf{x})$. Предполагается, что операторы A_ε, B_ε самосопряжены, оператор B_ε положительно определён. В работе рассматриваются задачи Коши для дифференциальных уравнений типа Шрёдингера:

$$i\partial_s \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, s) = (A_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon)(\mathbf{x}, s), \tag{1}$$

$$i\partial_s \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, s) = (B_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon)(\mathbf{x}, s), \tag{2}$$

и для гиперболического уравнения

$$\partial_s^2 \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, s) = -(A_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon)(\mathbf{x}, s). \tag{3}$$

Согласно классической теории усреднения, в пределе малого периода (т. е. при $\varepsilon \to 0$) решения задач Коши для уравнений (1)–(3) приближаются решениями задач Коши для некоторых *усреднённых* уравнений

$$i\partial_s \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, s) = (A^0 \mathbf{u}_0)(\mathbf{x}, s),$$

$$i\partial_s \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, s) = (B^0 \mathbf{u}_0)(\mathbf{x}, s),$$

$$\partial_s^2 \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, s) = -(A^0 \mathbf{u}_0)(\mathbf{x}, s).$$

Эффективный оператор A^0 имеет вид $b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D})$, где g^0 — некоторая постоянная положительно определенная “эффективная” матрица. Аналогичное представление имеет место и для B^0.

В операторных терминах оценка погрешности $\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, s) - \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, s)$ фактически сводится к оценкам разностей оператор-функций $e^{-isA_\varepsilon} - e^{-isA^0}$, $e^{-isB_\varepsilon} - e^{-isB^0}$, $\cos(sA_\varepsilon^{\frac{1}{2}}) - \cos(s(A^0)^{\frac{1}{2}})$ и $A_\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \sin(sA_\varepsilon^{\frac{1}{2}}) - (A^0)^{-\frac{1}{2}} \sin(s(A^0)^{\frac{1}{2}})$ в подходящих операторных нормах. В работе М. Ш. Бирмана и Т. А. Суслиной 2008 года было обнаружено, что для рассматриваемых операторов оценки по операторной норме в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ получить не удается; поэтому рассматривались нормы операторов, действующих из подходящего пространства Соболева в L_2. Были найдены точные (по порядку малого параметра ε) оценки следующего типа:

$$\| e^{-isA_\varepsilon} - e^{-isA^0} \|_{H^3(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1 + |s|)\varepsilon; \tag{4}$$

$$\| \cos(sA_\varepsilon^{\frac{1}{2}}) - \cos(s(A^0)^{\frac{1}{2}}) \|_{H^2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1 + |s|)\varepsilon. \tag{5}$$

В работе Ю. М. Мешковой 2019 года была получена оценка

$$\| A_\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \sin(sA_\varepsilon^{\frac{1}{2}}) - (A^0)^{-\frac{1}{2}} \sin(s(A^0)^{\frac{1}{2}}) \|_{H^1(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1 + |s|)\varepsilon. \tag{6}$$

Далее, в работе Суслиной (2017) было выяснено, что в общем случае оценка (4) неулучшаема по типу нормы. Там же были даны условия, при которых справедлива оценка

$$\| e^{-isA_\varepsilon} - e^{-isA^0} \|_{H^2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1 + |s|)\varepsilon. \tag{7}$$

Аналогичные вопросы для оценок (5) и (6) решаются в представленной диссертационной работе. Также в диссертации изучается поведение операторной экспоненты для оператора B_ε.

Перечислим основные результаты представленной диссертации.

- Для оператора B_ε получена точная по порядку оценка

$$\|e^{-isB_\varepsilon} - e^{-isB^0}\|_{H^3(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1+|s|)\varepsilon. \qquad (8)$$

Доказано, что в общем случае оценка (8) неулучшаема по типу нормы. Даны условия, при которых справедлива оценка

$$\|e^{-isB_\varepsilon} - e^{-isB^0}\|_{H^2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1+|s|)\varepsilon.$$

- Показано, что в общем случае оценка (4) неулучшаема по типу зависимости от s (множитель $(1+|s|)$ в правой части нельзя заменить на $(1+|s|)^\alpha$ при $\alpha<1$). С другой стороны, найдены условия, при которых справедлива оценка

$$\|e^{-isA_\varepsilon} - e^{-isA^0}\|_{H^2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1+|s|)^{\frac{1}{2}}\varepsilon. \qquad (9)$$

При этом оценка (9) в свою очередь неулучшаема.

- Показано, что оценки (5) и (6) в общем случае неулучшаемы ни по типу нормы, ни по типу зависимости от s. В то же время, получены условия, при которых верны оценки вида

$$\|\cos(sA_\varepsilon^{\frac{1}{2}}) - \cos(s(A^0)^{\frac{1}{2}})\|_{H^{3/2}(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1+|s|)^{\frac{1}{2}}\varepsilon, \qquad (10)$$

$$\|A_\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\sin(sA_\varepsilon^{\frac{1}{2}}) - (A^0)^{-\frac{1}{2}}\sin(s(A^0)^{\frac{1}{2}})\|_{H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1+|s|)^{\frac{1}{2}}\varepsilon. \qquad (11)$$

Кроме того, показано, что оценки (10) и (11) неулучшаемы.

“Операторные” результаты применяются затем к изучению поведения решений задач Коши. Рассмотрены применения к конкретным уравнениям математической физики; приведены подкрепляющие примеры.

Остановимся на методе исследования. В диссертации получил дальнейшеее развитие теоретико-операторный подход, разработанный М. Ш. Бирманом и Т. А. Суслиной. Метод основан на применении масштабного преобразования, разложения Флоке–Блоха и аналитической теории возмущений. Изучение оператор-функций от A_ε и B_ε сводится к изучению оператор-функций от операторов $\varepsilon^{-2}A$ и $\varepsilon^{-2}B(\varepsilon)$ с периодическими коэффициентами. Здесь операторы A и $B(\varepsilon)$ определяются равенствами

$$A = b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}), \qquad B(\varepsilon) = A + \varepsilon\sum_{j=1}^{d}(a_j(\mathbf{x})D_j + D_j a_j^*(\mathbf{x})) + \varepsilon^2 Q(\mathbf{x}).$$

Операторы A и $B(\varepsilon)$ раскладываются в прямой интеграл по операторам $A(\mathbf{k})$ и $B(\mathbf{k},\varepsilon)$, действующим в $L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)$. Здесь квазиимпульс $\mathbf{k}$ пробегает центральную зону Бриллюэна решетки, двойственной к решетке периодичности Γ; Ω — ячейка решетки Γ; операторы $A(\mathbf{k})$ и $B(\mathbf{k},\varepsilon)$ заданы равенствами

$$A(\mathbf{k}) = b(\mathbf{D}+\mathbf{k})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}+\mathbf{k}),$$

$$B(\mathbf{k},\varepsilon) = A(\mathbf{k}) + \varepsilon \sum_{j=1}^{d} (a_j(\mathbf{x})(D_j + k_j) + (D_j + k_j)a_j^*(\mathbf{x})) + \varepsilon^2 Q(\mathbf{x})$$

с периодическими граничными условиями. Операторное семейство $A(\mathbf{k})$ рассматривается как операторный пучок, зависящий от одномерного параметра $t = |\mathbf{k}|$ и изучается методами аналитической теории возмущений. Операторное семейство $B(\mathbf{k},\varepsilon)$ рассматривается как операторный пучок, зависящий от одномерного параметра $\tau = (\varepsilon^2 + |\mathbf{k}|^2)^{\frac{1}{2}}$ и также изучается методами аналитической теории возмущений. Результаты формулируются в терминах коэффициентов степенных разложений для собственных значений и собственных функций соответствующих операторных пучков на краю спектра. Существенную трудность представляет собой необходимость следить за равномерностью оценок по направлению квазиимпульса (по параметру $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{k}/|\mathbf{k}|$).

Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Первая глава посвящена абстрактной теоретико-операторной схеме для квадратичных операторных пучков специального вида. В терминах разложений для первых n собственных чисел и собственных векторов операторных пучков строятся аппроксимации для рассматриваемых оператор-функций от операторных пучков. Во второй главе обсуждается разложение в прямой интеграл исследуемых периодических операторов. Результаты главы 1 применяются к операторным семействам $A(\mathbf{k})$ и $B(\mathbf{k},\varepsilon)$. На основании результатов главы 2 в главе 3 устанавливаются основные результаты диссертации. Результаты применяются к изучению усреднения решений магнитного уравнения Шрёдингера, двумерного уравнения Паули, уравнений акустики и упругости.

Результаты диссертации дают существенные продвижения в исследуемой области и производят сильное впечатление. Получение этих результатов потребовало от автора высокой квалификации и технической изобретательности. Изложение четкое и ясное.

К работе имеется ряд вопросов и замечаний:

1. В первой главе диссертации обсуждается условие $N = 0$ или $N_0 = 0$; в автореферате оно обсуждается на страницах 9 и 11. Насколько жестким и ограничительным является это условие? Можно ли его назвать случаем общего положения? Если нет, то какие условия на коэффициенты рассматриваемых дифференциальных операторов оно порождает?

2. В диссертации используется словосочетание “квалифицированные оценки”, например, на стр. 12 автореферата и на стр. 15 диссертации. Как следует понимать данный термин и чем квалифицированные оценки отличаются от неквалифицированных?

3. При обзоре работ В. В. Жикова и С. Е. Пастуховой в диссертации на стр. 9–10 отдельное внимание следовало уделить их большой работе [34] и отдельно описать полученные там результаты. Есть также работа В. В. Жикова в Трудах МИАН в 2005 г. (В. В. Жиков, “О спектральном методе в теории усреднения”, Труды МИАН, 250 (2005), 95–104), на которую тоже стоило сослаться и описать полученные там результаты и подходы.

4. Ещё одно замечание касается обзора работ на стр. 11 — здесь можно было упомянуть ещё серию работ Д. И. Борисова об операторных оценках граничного усреднения, а также есть совсем недавние работы А. Г. Чечкиной об аналогичных оценках в задачах с частой сменой граничных условий.

5. Результаты первой главы полностью воспроизводят ранее разработанные схемы или же даже в этой схеме сделаны некие дальнейшие продвижения?

6. Местами в диссертации страдает оформление многострочных формул. Например, в теореме 1.2.12 на стр. 43 все основные неравенства следовало бы выровнять по левому краю, а следующие за ними оценки $|t|$ также выровнять друг под другом. Аналогичное замечание касается и теоремы 1.2.13, а также остальных подобных мест.

7. В разделе 2.1.4 вводится форма $q[\mathbf{u}, \mathbf{u}]$, определение которой включает в себя меру $\mu(x)$. Далее эта мера масштабируется до масштаба ε. Схожий подход использовался ранее и в теории усреднения, например, в упомянутой выше работе В. В. Жикова в Трудах МИАН в 2005 г. Вопрос: насколько использование меры μ в диссертации идейно похоже на указанный подход В. В. Жикова?

8. Теорема 3.2.1, пункт в) – утверждаемая сходимость предела равномерна по правым частям? Или же фактически речь идёт о сильной резольвентной сходимости?

Отмеченные недостатки не носят принципиального характера и не влияют на общую положительную оценку работы. Диссертация М. А. دородного является самостоятельным законченным фундаментальным исследованием. Поставленные задачи полностью решены, доказательства теорем проведены на строгом математическом уровне. Все основные результаты диссертации являются новыми и интересными. Результаты диссертации опубликованы в шести печатных работах в рецензируемых журналах, входящих в список ВАК, а также в международные базы данных Web of Science и Scopus. Результаты работы многократно докладывались диссертантом на признанных международных конференциях. Автореферат соответствует содержанию диссертации.

На основании вышеизложенного считаю, что диссертация М. А. Дородного “Усреднение нестационарных периодических уравнений” соответствует всем требованиям, предъявляемым к кандидатским диссертациям, а ее автор заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.03 — “Математическая физика”.

Главный научный сотрудник отдела дифференциальных уравнений
Института математики с вычислительным центром
Уфимского научного центра Российской академии наук,
доктор физико-математических наук

Борисов Денис Иванович

Адрес служебный:
450008, Россия, г. Уфа, ул.Чернышевского, 112
Тел.: (347)2725936
E-mail: BorisovDI@yandex.ru

Дата: 26.04.2021

Подпись Д.И. Борисова заверяю.
Учёный секретарь ИМВЦ УФИЦ РАН,
к.ф.-м.н. В.Ф. Вильданова