

## ОТЗЫВ ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕНТА

на диссертационную работу Рядовкина Кирилла Сергеевича «Ветвящиеся случайные блуждания на периодических графах с периодическими источниками ветвления»

представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.05 – теория вероятностей и математическая статистика

Теория ветвящихся случайных блужданий на графах является разделом теории случайных процессов и берет начало из генеалогических исследований XIX века. Сам же термин «Ветвящиеся случайные процессы» впервые появляется в одноименной работе А.Н. Колмогорова и Н.А. Дмитриева 1947г. На протяжении второй половины прошлого и начала нынешнего столетия ветвящиеся случайные процессы нашли массу приложений и исследовались во многих областях математики (теория массового обслуживания, спектральная теория), физики (кристаллография), а также использовались в различных химических и биологических моделях (процессы рождения и гибели). В течение последних десятилетий теория случайных блужданий на графах получила большое развитие в работах Е.Б. Яровой и ее соавторов Е.А. Антоненко, Л.В. Богачева, В.А. Ватутина, В.А. Топчия. В данных работах изучались случайные ветвящиеся случайные процессы на графах с различными условиями убывания на вероятности переходов между вершинами графов при наличии одного или конечного числа источников ветвления заданной интенсивности. В данных работах найдены асимптотические разложения по параметру времени для среднего числа частиц на решетке, общего числа частиц, а также вычислены асимптотики моментов распределения числа частиц. Аналогичные результаты были получены для процессов рождения и гибели в работах Севастьянова, Атрея и Неи, а также в недавней работе Доусона. Кроме того, асимптотики числа частиц изучались в работах Ватутина, Топчия и Яровой, а также Е.В. Бумынской для каталитических случайных блужданий – ветвящихся блужданий с асимметрией.

В данной диссертации автор рассматривает ветвящиеся случайные блуждания на решетке в  $Z^d$  с условиями периодичности и периодическими источниками ветвления. Таким образом число источников ветвления оказывается бесконечным, что качественно отличает данный случай от рассматривавшихся ранее. Для данного типа блуждания, при условии существования первого момента распределения числа потомков в источнике ветвления блуждания, автором получены следующие результаты: найден в явном виде главный член асимптотического разложения (по обратным степеням времени) среднего числа частиц в узле решетки; найдено полное асимптотическое разложение для среднего числа частиц на решетке при условии существования всех производных для интенсивностей вероятностей перехода между узлами решетки; указанные ведущие члены асимптотики вычислены явно для некоторых примеров на одномерной, двумерной и гексагональной решетках, что важно для приложений данных результатов. Данные результаты получены с помощью исследования спектральных свойств подходящего функционального преобразования для генератора случайного процесса с ветвлением. Это преобразование является дискретным аналогом преобразования Гельфанда, применяемого в теории Флоке-Блоха, при изучении спектра дифференциальных операторов. Полученное преобразование позволяет автору свести сложную задачу изучения спектра генератора – периодического линейного оператора на решетке – графе, действующего в бесконечномерном пространстве, к изучению спектра семейства линейных операторов, действующих в конечномерном пространстве (т.е. матриц), зависящих от параметра,

изменяющегося на компактном множестве – элементарной ячейке. Сам изучаемый оператор записывается в виде разложения в прямой интеграл от семейства конечномерных операторов – преобразований, берущийся по элементарной ячейке для параметра семейства. Данный прием позволяет описать спектр искомого оператора в терминах спектров операторов семейства, при условии достаточно подходящей и достаточно гладкой зависимости от параметра, что и удается автору.

В первой главе диссертации автор определяет случайное блуждание с ветвлением на графе – решетке и вычисляет генератор данного случайного процесса. Во второй главе диссертации автор вводит дискретный аналог преобразования Гельфанда для периодического линейного оператора на графе, доказывает корректность определения данного преобразования, а затем изучает спектральные свойства данного преобразования, для генератора изучаемого блуждания. В частности, в основном результате второй главы Теореме 2.3 описана структура спектра семейства операторов – преобразований и детально описана зависимость его от параметра семейства: достижение максимума в нуле, невырожденность на правом краю спектра, неперекрывание в нуле спектральных зон. Данное описание является ключевым техническим моментом в диссертации, и получено с помощью изобретательного анализа с применением теорем, описывающих тонкие спектральные свойства конечномерных операторов – матриц. В третьей главе полученное описание спектра операторов семейства позволяет получить асимптотики для среднего числа частиц в узлах графа – решетки. В четвертой главе посчитаны некоторые примеры, важные для физических, инженерных и статистических приложений.

Суммируя вышесказанное, можно отметить, что диссертация К.С. Рядовкина является законченным математическим исследованием в теории случайных блужданий с ветвлением на периодических графах, а ее результаты оригинальны и интересны как для теоретических исследований в данной области, так и для приложений. Вместе с тем необходимо отметить ряд замечаний.

#### **Замечания:**

- 1) Первое замечание касается формы изложения обзора литературы по теме диссертации: автор достаточно полно излагает результаты других авторов, касающиеся темы его диссертационного исследования, и приводит обширный список литературы с описанием их содержания, но при этом делает это в настолько сжатом виде, что не упоминает явно фамилии авторов работ за исключением пионерской работы Колмогорова и Дмитриева. В частности, автор не упоминает явно Яровую Е.Б. и ее соавторов на работы, на работы которых много и часто ссылается, сравнивая собственные результаты диссертации с полученными ранее. Впрочем, данный недостаток автор исправляет в автореферате диссертации.
- 2) На стр. 51 диссертации делает замечание, что из условия (2.9) на стр. 33

$$\sum_{u \in Z^d} \|u\|^N |a(u, v)| < \infty, \quad v \in Z^d$$

следует аналитичность зависимости от параметра  $\theta$  значений дискретного аналога преобразования Гельфанда  $\tilde{a}(u, v, \theta)$ , а это вообще говоря не так: данное условие гарантирует только существование всех производных по параметру  $\theta$ . Впрочем, данной аналитической зависимости для существования асимптотического разложения для среднего числа частиц в следующей за замечанием Теореме 3.4 не требуется – достаточно бесконечной гладкости. Нигде в диссертации, кроме стр. 51,

аналитичность зависимости  $\tilde{a}(u, v, \theta)$  более не упоминается, не используется и на справедливость результатов не влияет.


- 3) Автор не совсем удачно использует обозначение  $l^2(\Omega)$  для пространства, в котором действуют операторы семейства преобразований, когда на самом деле имеется ввиду конечномерное комплексное пространство. То же самое относится к термину собственная функция данного оператора, когда на самом деле имеется ввиду собственный вектор конечномерной матрицы. Данные нестандартные обозначение и термин могут вводить в заблуждение.

Вышеприведенные замечания носят частный характер и не влияют на общую положительную оценку работы. Результаты диссертации полностью изложены в 4 статьях, опубликованных в журналах, включенных в список ВАК, они докладывались на ряде международных конференций. Автореферат правильно и полно отражает содержание диссертации.

Диссертация Рядовкина К.С. «Ветвящиеся случайные блуждания на периодических графах с периодическими источниками ветвления» полностью отвечает требованиям Положения о порядке присуждения ученых степеней ВАК, предъявленным к кандидатским диссертациям. Полагаю, что Рядовкин Кирилл Сергеевич безусловно заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.05 – теория вероятностей и математическая статистика.

#### Официальный оппонент

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики  
Федерального государственного бюджетного образовательного  
учреждения высшего образования «Санкт-Петербургский  
государственный архитектурно-строительный университет»

 / Васильчук Владимир

«18» апреля 2019 г.

Почтовый адрес: 190005, Российская Федерация, Санкт-Петербург,  
2-я Красноармейская ул., дом 4, Санкт-Петербургский государственный  
архитектурно-строительный университет

Телефон: (812) 316-49-30

Адрес электронной почты: vvasilchuk@lan.spbgasu.ru

