УТВЕРЖДАЮ:

Директор ФГБУН "Институт математики
им. С. Л. Соболева Сибирского отделения РАН"
академик РАН, д.ф.-м.н.,
профессор С. С. Гончаров

03 сентября 2021 года
630090, г. Новосибирск, ул. Пирогова 4;
+7(383)-333-28-92; im@math.nsc.ru

ОТЗЫВ ВЕДУЩЕЙ ОРГАНИЗАЦИИ

о диссертационной работе Иевлева Павла Николаевича
"Операторный подход к построению
комплексных и отражающихся случайных процессов",
представленной на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук
по специальности 01.01.05 — теория вероятностей
и математическая статистика

Актуальность темы. Диссертационная работа посвящена построению вероятностных аппроксимаций для решений задачи Коши для уравнения Шрёдингера и начально-краевых задач Неймана и Дирихле для оператора Лапласа и операторов Леви в $\mathbb{R}^d$. Также в работе изучена структура полугрупп и построено разложение Скорохода, отвечающие отражающимся версиям броуновского движения в $d-$мерном шаре и симметричным процессам Леви в ограниченных гладких областях. Решения соответствующих задач для уравнений в частных производных решены в работе с помощью так называемых свободных процессов, т. е. построены решения в виде математических ожиданий от некоторых функционалов от случайного процесса. В работе использован функционально – операторный подход построения версий свободных процессов, этот подход связан с определением операций над траекториями через операции над функционалами и операторами. В отличие от классического подхода, где версии свободных процессов строятся с помощью непосредственного преобразования траекторий, функционально – операторный подход позволяет получить вероятностное представление для решений задач математической физики для случаев, когда фундаментальное решение не является вероятностным распределением. Полученные результаты являются существенным развитием техники и идей более ранних работ И.А. Ибрагимова и Н.В. Смородиной. Результаты работы являются актуальными и интересными как для специалистов в области случайных процессов, так и в области уравнений в частных производных.

Отметим также результаты, связанные с построением отражающихся процессов. По видимому, для чисто скачкообразного процесса Леви реализованный операторный подход на сегодняшний день является единственным возможным вследствие отсутствия у процесса локального времени. Отражающиеся процессы имеют широкое применение в моделях стохастического управления и финансовой математики, также являются удобным инструментом для изучения времени ожидания в очередях с конечной пропускной способностью. Таким образом, результаты работы также актуальны для специалистов смежных областей — финансовой и актуарной математики.

Научная значимость и новизна результатов, выносимых на защиту.

Перейдем к более детальному анализу содержания диссертации.

Диссертация общим объёмом 75 страниц состоит из введения, основного текста из 4 глав, заключения, приложения и списка литературы, содержащего 48 наименований. Основной объем диссертации приходится на доказательства результатов, принадлежащих автору.

В первой главе рассматривается задача Коши для уравнения Шредингера

$$\begin{cases} -iu_t = \triangle u/2, \\ u(0,\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}), \end{cases}$$

для $\varphi \in L_2(\mathbb{R}^d)$.

Легко видеть, что распределения, соответствующие уравнению Шредингера, являются комплексными мерами в $\mathbb{R}^d$, а значит, не могут быть вероятностными. Чтобы обойти эту трудность, автор рассматривает обобщенные случайные функции и вводит операции над ними. Далее строятся обобщенные случайные функции по последовательностям пуассоновских случайных мер и сложных пуассоновских процессов, слабо сходящихся к винеровскому процессу. А затем доказывается сходимость в L_2 полугрупп операторов (построенных по этим обобщенным функциям) от функции, задающей начальное условие к решению уравнения Шредингера. Также оценивается сверху скорость этой сходимости.

Отметим, что результаты первой главы являются новыми и распространяют более ранние результаты И.А. Ибрагимова, Н.В. Смородиной, М.М. Фаддеева на многомерный случай.

Во второй главе рассмотрена краевая задача Дирихле для оператора Лапласа

$$\begin{cases} u_t = \sigma^2 \triangle u/2, \ \mathbf{x} \in D, \\ u(0,\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \\ u|_{\partial D} = \gamma_0 f, \end{cases}$$

где $\sigma = e^{i\phi}$, $\phi \in [0, \pi/4]$, начальная функция $f \in W_2^2(D)$.

Для этой задачи строится операторными методом комплексное броуновское движение с поглощением на границе и выписывается решение краевой задачи Дирихле как оператор, построенный по полугруппе этого процесса от функции f.

Также во второй главе рассмотрена краевая задача Неймана для оператора Лапласа

$$\begin{cases} u_t = \sigma^2 \triangle u/2, \ \mathbf{x} \in D, \\ u(0,\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}|_{\partial D} = \gamma_0 \dfrac{\partial f}{\partial n}. \end{cases}$$

Для этой задачи строится операторными методом комплексное броуновское движение с отражением на границе и выписывается решение краевой задачи Неймана как оператор, построенный по полугруппе этого процесса от функции f.

Отметим, что в этой главе также построены аппроксимации решений этих задач с помощью обобщенного пуассоновского процесса, слабо сходящегося к винеровскому, и получена оценка сверху скорости сходимости.

Результаты второй главы являются новыми, их доказательства требуют применение сложной математической техники. Отметим также, что результаты этой главы распространяют более ранние результаты И.А. Ибрагимова, Н.В. Смородиной, М.М. Фаддеева на многомерный случай.

В третьей главе получен аналог разложения Скорохода для отражающегося броуновского движения в шаре, т. е. показано, что полугруппа отражающегося процесса отличается от полугруппы свободного процесса на некоторое операторное семейство, сосредоточенное на границе. Это семейство автор называет накопленным импульсом. При этом доказано, что в одномерном случае предложенная конструкция отражения дает обычное разложение Скорохода.

Также построен сложный пуассоновский процесс в шаре с отражением на границе. Затем рассмотрена аппроксимация броуновского движения в шаре с отражением на границе такими процессами и доказана сходимость соответствующих операторов в L_2. Отметим, что также получена оценка сверху этой сходимости.

В четвертой главе построен отражающийся симметричный чисто скачкообразный процесс Леви в произвольной гладкой ограниченной области. Показано, что как и в случае броуновского движения, разность полугрупп свободного процесса и процесса с отражением сосредоточена на границе. Построен оператор случайного накопленного импульса. В конце главы проведено обсуждение о том, как можно обобщить полученные результаты на симметричные устойчивые процессы.

Результаты главы 4 являются интересными, так как, по видимому, на данный момент это единственный разумный подход построения отражающихся версий чисто скачкообразных процессов.

Отметим, что результаты глав 3, 4 являются новыми и распространяют известные более ранние результаты на многомерный случай.

Диссертация также содержит приложения, куда вынесены вспомогательные результаты, что облегчило прочтение работы.

Диссертация не содержит математических ошибок. Работа написана хорошим литературным языком и почти не содержит опечаток. Есть и некоторые замечания.

1. На стр. 9 (3 абзац сверху) речь идет о пятой части работы, которой нет.

2. То же самое на стр. 11 (1 абзац снизу).

3. На стр. 62 (1 абзац сверху) речь идет о 5, 6 главах, а их четыре.

4. Нумерация разделов и результатов приложения продолжает нумерацию 4-ой главы.

Отмеченные недочеты связаны с некоторой небрежностью при оформлении работы. По видимому, на первом этапе подготовки диссертации было больше глав, которые впоследствии были объединены в более крупные. В любом случае, из текста понятно, о каких результатах идет речь, и эти замечания никак не связаны с математической составляющей диссертации.

Заключение. Представленная диссертация посвящена решению актуальных задач теории случайных процессов и уравнений математической физики. Она является самостоятельным законченным фундаментальным исследованием и соответствует специальности 01.01.05 — теория вероятностей и математическая статистика. Поставленные задачи полностью решены, доказательства теорем проведены на строгом математическом уровне. Получение большинства результатов, представленных в диссертации, потребовало от автора применения не только вероятностных методов, но и современных методов теории операторов и теории обобщённых функций, что свидетельствует о несомненном наличии у него достаточно высокой математической квалификации. По теме диссертации автором опубликовано 4 работы в изданиях из перечня рецензируемых научных журналов ВАК, их переводные версии также входят в базы данных WoS и Scopus. Научные положения, выносимые на защиту, достаточно полно отражены в опубликованных работах. Основные результаты диссертации докладывались на различных математических семинарах и конференциях.

Автореферат полно и правильно отражает содержание диссертации.

Представленная диссертационная работа соответствует требованиям, предъявляемым к кандидатским диссертациям по специальности «01.01.05 — теория вероятностей и математическая статистика», а ее автор, Иевлев Павел Николаевич, безусловно заслуживает присуждения ему степени кандидата физико-математических наук.

Результаты диссертации можно рекомендовать к использованию в исследованиях, проводимых в МГУ им. М. В. Ломоносова, МИ РАН им. В. А. Стеклова, СПОМИ РАН им. В. А. Стеклова, ИМ СО РАН им. С. Л. Соболева, Санкт-Петербургском и Новосибирском государственных университетах.

Основные результаты диссертации доложены автором в режиме онлайн на заседании семинара лаборатории теории вероятностей и математической статистики Института математики им. С.Л. Соболева 24 августа 2021 г., протокол № 3. Принято решение — одобрить положительный отзыв.

Старший научный сотрудник лаборатории
теории вероятностей и математической статистики ИМ СО РАН
к.ф.-м.н. А. В. Логачев

630090, г. Новосибирск, пр. Коптюга 4;
+7(913)-718-07-78; omboldovskaya@mail.ru

Заведующий лабораторией теории вероятностей
и математической статистики ИМ СО РАН
д.ф.-м.н., профессор В. И. Лотов

630090, г. Новосибирск, пр. Коптюга 4;
+7(913)-895-62-49; lotov@math.nsc.ru

Подпись А.В. Логачева, В. И. Лотова
удостоверяю
Зав. оргтделом А. П. Головкина
ИМ СО РАН
«03» 09 2021 г.