Отзыв научного руководителя
о диссертации Марка Александровича Дородного
“Усреднение нестационарных периодических уравнений”,
представленной на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
по специальности 01.01.03 — математическая физика

Марк Александрович Дородный окончил магистратуру физического факультета СПбГУ по кафедре высшей математики и математической физики в 2016 году; его магистерская диссертация была отмечена премией имени Владимира Дейча как лучшая магистерская работа. В 2016–2020 гг. Марк Дородный обучался в аспирантуре СПбГУ на той же кафедре. В 2020 году успешно окончил аспирантуру. Я руководила работой Марка Дородного в бакалавриате, магистратуре и аспирантуре. В настоящее время им закончена подготовка кандидатской диссертации, работа прошла необходимую апробацию и готова к защите.

Тематика исследований Марка Дородного относится к теории усреднения (гомогенизации) дифференциальных операторов (ДО). Теория усреднения изучает свойства решений дифференциальных уравнений с периодическими быстро осциллирующими коэффициентами. Речь пойдет о так называемых операторных оценках погрешности в задачах усреднения. Для эллиптических и параболических уравнений такие оценки уже достаточно хорошо изучены. А в более сложном случае нестационарных уравнений типа Шрёдингера и гиперболического типа оставалось много открытых вопросов. Именно этим вопросам и посвящена диссертация Марка Дородного.

Введем класс изучаемых операторов. В пространстве $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ рассматривается матричный ДО A_ε второго порядка, заданный в факторизованном виде

$$A_\varepsilon = b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}/\varepsilon) b(\mathbf{D}), \quad \varepsilon > 0. \tag{1}$$

Матрица коэффициентов $g(\mathbf{x})$ ограничена, положительно определена и периодична относительно некоторой решетки Γ; $b(\mathbf{D})$ — матричный ДО первого порядка. Накладываются условия, обеспечивающие сильную эллиптичность оператора A_ε. Строгое определение оператора A_ε дается через квадратичную форму. В частности, к этому классу относятся операторы акустики и теории упругости. Рассматривается также более общий оператор с включением членов младшего порядка:

$$B_\varepsilon = A_\varepsilon + \sum_{j=1}^{d} \left(a_j(\mathbf{x}/\varepsilon) D_j + D_j a_j^*(\mathbf{x}/\varepsilon) \right) + Q(\mathbf{x}/\varepsilon). \tag{2}$$

Матричные коэффициенты a_j, Q периодичны и принадлежат подходящим L_q-классам на ячейке периодичности. Предполагается, что оператор (2) положительно определен.

Эффект усреднения состоит в том, что в пределе малого периода (т.е. при $\varepsilon \to 0$) оператор A_ε ведет себя как эффективный оператор A^0 с постоянными коэффициентами. Эффективный оператор имеет вид $A^0 = b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D})$, матрицу g^0 называют эффективной матрицей.

В работах Бирмана и Суслиной был предложен теоретико-операторный подход к задачам усреднения. Изучались эллиптические и параболические задачи. Было показано, что при $\varepsilon \to 0$ резольвента оператора A_ε сходится к резольвенте эффективного оператора A^0 по операторной норме в $L_2(\mathbb{R}^d)$; при этом погрешность имеет точный порядок $O(\varepsilon)$. Аналогичный результат имеет место и для параболической полугруппы e^{-sA_ε}, $s > 0$.

Иначе обстоит дело с усреднением нестационарных уравнений типа Шрёдингера и гиперболического типа. В операторных терминах речь идет о поведении оператор-функций e^{-isA_ε}, $\cos(sA_\varepsilon{}^{1/2})$ и $A_\varepsilon{}^{-1/2}\sin(sA_\varepsilon{}^{1/2})$. В работе Бирмана и Суслиной 2008 года было выяснено, что для этих операторов невозможно получить аппроксимации по операторной норме в $L_2(\mathbb{R}^d)$, а потому приходится менять тип операторной нормы. Для экспоненты e^{-isA_ε} была получена точная по порядку оценка погрешности по норме операторов, действующих из пространства Соболева $H^3(\mathbb{R}^d)$ в $L_2(\mathbb{R}^d)$:

$$\|e^{-isA_\varepsilon} - e^{-isA^0}\|_{H^3(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1+|s|)\varepsilon. \tag{3}$$

Для оператора $\cos(sA_\varepsilon^{1/2})$ найдена оценка по $(H^2 \to L_2)$-норме:

$$\|\cos(sA_\varepsilon^{1/2}) - \cos(s(A^0)^{1/2})\|_{H^2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1+|s|)\varepsilon. \tag{4}$$

Аналогичный результат для оператор-функции $A_\varepsilon{}^{-1/2}\sin(sA_\varepsilon{}^{1/2})$ был получен Мешковой (2019):

$$\|A_\varepsilon^{-1/2}\sin(sA_\varepsilon^{1/2}) - (A^0)^{-1/2}\sin(s(A^0)^{1/2})\|_{H^1(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1+|s|)\varepsilon. \tag{5}$$

Встает естественный вопрос о точности этих результатов в отношении типа операторной нормы. Скажем, можно ли в (3) заменить $(H^3 \to L_2)$-норму на $(H^s \to L_2)$-норму при некотором $s < 3$ с сохранением прежнего порядка погрешности? Этот вопрос изучался в работе Суслиной (2017), где было выяснено, что оценка (3) в общем случае неулучшаема в отношении типа операторной нормы, но при некоторых дополнительных условиях можно усилить результат и получить оценку

$$\|e^{-isA_\varepsilon} - e^{-isA^0}\|_{H^2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1+|s|)\varepsilon. \tag{6}$$

Аналогичные вопросы для оценок (4) и (5) исследованы ранее не были. Кроме того, не было результатов для более общего оператора B_ε вида (2).

Перед диссертантом стояли следующие задачи:

- Исследовать точность оценок (4) и (5) относительно типа операторной нормы.
- Исследовать точность оценок (3)–(5) относительно зависимости от времени s (выяснить, можно ли заменить множитель $(1+|s|)$ на $(1+|s|)^\alpha$ с $\alpha < 1$).
- Исследовать возможность усиления описанных результатов при дополнительных предположениях.
- Получить операторные оценки погрешности для экспоненты e^{-isB_ε} в случае оператора вида (2) с младшими членами.

Все эти задачи были успешно решены в диссертации. Остановимся на основных результатах диссертации.

1. С одной стороны, показано, что в общем случае оценки (4) и (5) являются точными как в отношении типа операторной нормы, так и в отношении зависимости от s (при большом $|s|$). Множитель $(1+|s|)$ в правой части оценок нельзя заменить на $(1+|s|)^\alpha$ с $\alpha < 1$.

С другой стороны, указаны дополнительные условия на оператор, которые позволяют усилить результаты и получить оценки вида

$$\| \cos(sA_\varepsilon^{1/2}) - \cos(s(A^0)^{1/2})\|_{H^{3/2}(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1+|s|)^{1/2}\varepsilon, \qquad (7)$$

$$\|A_\varepsilon^{-1/2}\sin(sA_\varepsilon^{1/2}) - (A^0)^{-1/2}\sin(s(A^0)^{1/2})\|_{H^{1/2}(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1+|s|)^{1/2}\varepsilon. \qquad (8)$$

Более того, показано, что результаты (7), (8), в свою очередь, неулучшаемы.

2. Показано, что в общем случае оценка (3) точна в отношении зависимости от s. (Точность по типу нормы была исследована ранее.) С другой стороны, при дополнительных условиях диссертанту удалось усилить эту оценку:

$$\|e^{-isA_\varepsilon} - e^{-isA^0}\|_{H^2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1+|s|)^{1/2}\varepsilon. \qquad (9)$$

Более того, показано, что оценка (9), в свою очередь, неулучшаема.

3. Была исследована экспонента e^{-isB_ε}: в общем случае получена оценка

$$\|e^{-isB_\varepsilon} - e^{-isB^0}\|_{H^3(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1+|s|)\varepsilon. \qquad (10)$$

Показано, что эта оценка точна относительно типа нормы. С другой стороны, при дополнительных условиях получено усиление:

$$\|e^{-isB_\varepsilon} - e^{-isB^0}\|_{H^2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1+|s|)\varepsilon.$$

Метод основан на масштабном преобразовании, теории Флоке–Блоха и аналитической теории возмущений. С помощью масштабного преобразования изучение оператор-функций от A_ε сводится к изучению аналогичных оператор-функций от оператора $\varepsilon^{-2}A$, где $A = b(\mathbf{D})^*g(\mathbf{x})b(\mathbf{D})$. Затем с помощью унитарного преобразования Гельфанда оператор A раскладывается в прямой интеграл по операторам $A(\mathbf{k})$, действующим в $L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)$. Здесь Ω — ячейка решетки Γ. Параметр $\mathbf{k}$ (квазиимпульс) пробегает центральную зону Бриллюэна двойственной решетки. Оператор $A(\mathbf{k})$ задан выражением $A = b(\mathbf{D}+\mathbf{k})^*g(\mathbf{x})b(\mathbf{D}+\mathbf{k})$ с периодическими граничными условиями. Операторное семейство $A(\mathbf{k})$ изучается методами аналитической теории возмущений по одномерному параметру $t = |\mathbf{k}|$. При этом приходится следить за равномерностью оценок по параметру $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{k}/|\mathbf{k}|$. Спектр оператора $A(\mathbf{k})$ дискретен. Для исследуемых вопросов существенную роль играют только первые n собственных значений $\lambda_l(t,\boldsymbol{\theta})$, $l = 1,\dots,n$, аналитических по t. Степенные разложения для собственных значений имеют вид

$$\lambda_l(t,\boldsymbol{\theta}) = \gamma_l(\boldsymbol{\theta})t^2 + \mu_l(\boldsymbol{\theta})t^3 + \nu_l(\boldsymbol{\theta})t^4 + \dots, \quad l = 1,\dots,n.$$

Здесь коэффициенты $\gamma_l(\boldsymbol{\theta})$ строго положительны: $\gamma_l(\boldsymbol{\theta}) \geqslant c_* > 0$. В работе доказано, что если хотя бы один коэффициент $\mu_l(\boldsymbol{\theta})$ отличен от нуля в некоторой точке: $\mu_l(\boldsymbol{\theta}_0) \neq 0$, то оценки (4), (5) неулучшаемы ни по типу нормы, ни в отношении зависимости от s. Установлено, что при том же условии оценку (3) нельзя улучшить в отношении зависимости от s. Если же все коэффициенты $\mu_l(\boldsymbol{\theta})$ тождественно равны нулю и, дополнительно, числа $\gamma_l(\boldsymbol{\theta})$, $l = 1,\dots,n$, различны при каждом $\boldsymbol{\theta}$, то имеют место более сильные результаты (7)–(9).

(На самом деле, усиление получено при более широких предположениях; для краткости, мы ограничились простейшим вариантом условий.)

Далее, в диссертации показано, что если коэффициенты $\mu_l(\boldsymbol{\theta})$ тождественно равны нулю, но при этом хотя бы один коэффициент при t^4 отличен от нуля в некоторой точке: $\nu_l(\boldsymbol{\theta}_0) \neq 0$, то оценки (7)–(9) неулучшаемы. Отметим, что последнее условие, как правило, выполнено.

Результаты о поведении операторной экспоненты e^{-isB_ε} получены на том же пути, но технику пришлось существенно модифицировать. После масштабного преобразования вместо оператора B_ε нужно рассматривать оператор $\varepsilon^{-2}B(\varepsilon)$, где

$$B(\varepsilon) = A + \varepsilon \sum_{j=1}^{d} \big(a_j(\mathbf{x})D_j + D_j a_j^*(\mathbf{x})\big) + \varepsilon^2 Q(\mathbf{x}),$$

а после разложения в прямой интеграл нужно изучать операторное семейство $B(\mathbf{k},\varepsilon)$ в $L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)$. Оператор $B(\mathbf{k},\varepsilon)$ задан дифференциальным выражением

$$B(\mathbf{k},\varepsilon) = A + \varepsilon \sum_{j=1}^{d} \big(a_j(\mathbf{x})(D_j+k_j) + (D_j+k_j)a_j^*(\mathbf{x})\big) + \varepsilon^2 Q(\mathbf{x})$$

с периодическими граничными условиями. В отличие от семейства $A(\mathbf{k})$, это семейство зависит не только от $\mathbf{k}$, но и от ε. Оно изучается методами аналитической теории возмущений по одномерному параметру $\tau = (|\mathbf{k}|^2+\varepsilon^2)^{1/2}$. Поэтому технически все рассмотрения в случае оператора (2) сложнее, нежели для оператора (1). Доказательство точности оценки (10) относительно типа нормы потребовало от диссертанта особой технической изобретательности. Мы не будем входить в дальнейшие подробности.

Результаты, полученные в операторных терминах, применяются затем к вопросам о поведении решений соответствующих задач Коши для уравнений типа Шредингера

$$i\partial_s \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},s) = (A_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon)(\mathbf{x},s) \quad \text{или} \quad i\partial_s \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},s) = (B_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon)(\mathbf{x},s)$$

и гиперболического уравнения

$$\partial_s^2 \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},s) = -(A_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon)(\mathbf{x},s).$$

В частности, рассмотрены конкретные приложения: нестационарное уравнение Шрёдингера, магнитное уравнение Шрёдингера, двумерное уравнение Паули (это примеры уравнений типа Шрёдингера), нестационарные уравнения акустики и упругости (это примеры гиперболических уравнений). Оказалось, что для оператора акустики имеет место более сильный результат, а для оператора упругости (даже в изотропном случае) результаты (4), (5) неулучшаемы. Для уравнения Шрёдингера (обычного и магнитного) есть усиление, а для двумерного оператора Паули общие результаты неулучшаемы. Марку удалось построить подкрепляющие примеры, что потребовало немалых усилий и изобретательности.

Результаты отражены в шести статьях диссертанта (четыре статьи совместные с научным руководителем и две статьи без соавторов) в ведущих российских и западных математических журналах: “Алгебра и анализ”, “Функциональный анализ и его приложения”, “Journal of Differential Equations”, “Applicable Analysis”. В совместных статьях определяющий вклад принадлежит диссертанту. Помимо этих статей Марк Дородный является автором еще двух работ, посвященных усреднению нестационарной системы Максвелла с периодическими коэффициентами (этот материал не включен в диссертацию по причине большого объема). Марк Дородный выступал с докладами по теме диссертации на математических семинарах Санкт-Петербурга и на 11 международных конференциях в Москве, Санкт-Петербурге, Ростове-на-Дону, Сочи, Майнце. Его успехи отмечены престижными премиями для молодых ученых: стипендией СПбМО имени О. А. Ладыженской (2016), стипендией СПбМО имени В. А. Рохлина (2017), стипендией Правительства РФ для аспирантов (2018). В 2019 году Марк победил в конкурсе "Молодая математика России". М. А. Дородный является участником научных проектов, поддержанных РФФИ и РНФ.

Считаю, что в диссертации Марка Александровича Дородного получены важные новые результаты по теории усреднения. Диссертация выполнена на высоком научном уровне и безусловно удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к кандидатским диссертациям по специальности 01.01.03 — математическая физика. В процессе работы Марк Дородный проявлял самостоятельность, упорство, инициативу и техническую изобретательность. Подчеркну, что задача об исследовании точности оценок относительно зависимости от времени, была поставлена самим диссертантом. Марк Александрович Дородный сформировался как способный исследователь с большим потенциалом.

22.03.2021

Доктор физико-математических наук,
профессор кафедры высшей математики
и математической физики СПбГУ — Т. А. Суслина

Личную подпись
Т. А. Суслиной
заверяю
И.О. начальника отдела кадров №3
И.И. Константинова
22.03.2021