**ОТЗЫВ**
**официального оппонента**
**на диссертационную работу**
**Целищева Антона Сергеевича**
**"Два сюжета из гармонического анализа:**
**квадратичные функции и задача об изоморфизме",**
представленную на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
по специальности 01.01.01
— вещественный, комплексный и функциональный анализ

**Актуальность темы диссертации.** Диссертация является исследованием в области гармонического анализа. Изучаются вопросы, связанные с теорией Литтлвуда–Пэли, а также геометрических свойств функциональных пространств гладких функций от нескольких переменных на торе. В работе используются идеи и методы современного гармонического анализа, в особенности теории сингулярных интегральных операторов и теории мартингальных преобразований.

Основным объектом исследования в диссертации является теория Литтлвуда–Пэли. Под ней обычно понимаются многочисленные неравенства, оценивающие нормы функций из различных функциональных пространств (например, пространств Лебега $L^p$, пространств Харди $H^p$, пространств BMO) через нормы различных квадратичных выражений. В простейшем случае такие выражения содержат разложения функции $f$ на сумму функций с локализованными частотами. Теория Литтлвуда–Пэли предоставляет теоретическую основу для распространения некоторых результатов о $L^2$-функциях на $L^p$-функции при других $p$. Вклад в эту теорию внесли Дж. Э. Литтлвуд, Р. Пэли, А. Зигмунд, Ю. Марцинкевич, Э. М. Стейн, Ж. Л. Рубио де Франсиа, Ж. Бургейн. В последние десятилетия акцент при изучении этой теории сместился на рассмотрение нетригонометрического анализа Фурье и банаховозначных функций (С. В. Кисляков, М. Т. Лэйси, Н. Н. Осипов, Д. Потапов, Ф. Сукочев, К. Сюй, другие авторы), а также на описание функциональных пространств в терминах проекторов Литтлвуда–Пэли (С. В. Бочкарев, П. Коскела, Д. Йонг, Й. Хан, Я. Чжоу, А. Эль Барака, другие авторы). В диссертации доказываются неравенства Литтлвуда–Пэли–Рубио де Франсиа, связанные с разложением функции в ряды по системе Уолша и системам Виленкина. Эти ортогональные системы в последние полвека играют важную роль в нетригонометрическом анализе Фурье, в том числе в связи с многочисленными приложениями. При этом в работе используются методы, позволяющие распространять полученные результаты со случая комплекснозначных на случай банаховозначных функций.

В диссертации также изучается ряд свойств банаховых пространств гладких функций на торе, связанных с наличием локальной структуры. Классический результат А. Гротендика состоит в том, что пространство $C^k(\mathbb{T}^n)$ $k$ раз непрерывно дифференцируемых на $\mathbb{T}^n$ функций, не изоморфно пространству непрерывных функций $C(\mathbb{T}^n)$. Эта теорема обобщалась многими авторами. Большой толчок в развитии этой теории произошел с появлением работы С. В. Кислякова, Д. В. Максимова и Д. М. Столярова 2015 г., в которой рассматривается пространство $C^{\mathcal{T}}(\mathbb{T}^n)$, порожденное конечным набором $\mathcal{T}$ дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами, и для случая, когда хотя бы две старшие части таких операторов линейно независимы, доказывается, что $C^{\mathcal{T}}(\mathbb{T}^n)$ не имеет локальной безусловной структуры. В этом направлении работали также Г. М. Хенкин, С. Квапень, А. Пелчински, Н. Г. Сидоренко и другие авторы.

Сказанное подтверждает актуальность тематики, рассматриваемой в представленной диссертационной работе.

**Краткое содержание диссертации и общая характеристика.** Диссертация содержит пять глав (одна из которых является введением), разбитых на параграфы, и список литературы. Объем работы составляет 94 страницы, список литературы содержит 60 наименований, в том числе 4 работы автора по теме диссертации.

В первой главе, являющейся введением, приведены исторические сведения по изучаемым вопросам, обоснована актуальность исследования, кратко изложено содержание диссертации, приведена апробация результатов и даны основные определения.

Вторая глава посвящена характеризации пространства BMO. В 1995 г. С. В. Бочкарев дал тригонометрическую характеризацию пространства $\mathrm{BMO}(\mathbb{T})$, построив норму, использующую квадраты сверток функции $f$ с ядрами Валле-Пуссена, эквивалентную норме $\| * \|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{T})}$. (В более поздней работе 2014 г. С. В. Бочкарев использовал полученную характеризацию при получении тонких результатов в теории тригонометрических рядов.) Естественно возник вопрос — нельзя ли заменить операторы свёртки с ядрами Валле-Пуссена на некоторые более общие мультипликаторы Фурье? В диссертации построен (теорема 1) широкий естественный класс мультипликаторов Фурье $\{\psi_n\}$ в $L^1(\mathbb{R}^d)$, каждый из которых порождает норму, эквивалентную $\|f\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^d)}$. Более точно, если $\{\psi_n\}$ — мультипликатор из построенного класса, то он определяет оператор $\Delta_n f := \left(\psi_n \widehat{f}\right)^{\vee}$, с помощью которого строится норма

$$\|f\|_D := \sup_Q \left( \frac{1}{Q} \int_Q \sum_{2^{-n} \le l(Q)} |\Delta_n f(x)|^2 dx \right)^{1/2},$$

эквивалентная $\|f\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^d)}$. Здесь супремум берется по всем кубам $Q$ с гранями, параллельными координатным плоскостям, $l(Q)$ — длина ребра куба $Q$. Условия на набор функций $\{\psi_n\}$ аналогичны условиям из классической теоремы Хёрмандера–Михлина о мультипликаторах. Приведенный результат верен и для случая тора $\mathbb{R}^d$ и уже в случае $d = 1$ дает достаточно широкий класс норм, эквивалентных $\| * \|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{T})}$, тем самым обобщая результат С. В. Бочкарева. В диссертации достигнуто значительное продвижение в вопросе характеризации пространств функций ограниченной средней осцилляции.

Третья глава посвящена нетригонометрическому анализу Фурье. В ней доказан аналог неравенства Литтлвуда–Пэли–Рубио де Франсиа для ограниченных систем Виленкина: *если $\{\omega_n\}$ — ограниченная система Виленкина, $\{I_s\}$ — набор попарно не пересекающихся конечных интервалов в $\mathbb{N} \cup \{0\}$, а функции $f_s$ таковы, что спектр $f_s$ относительно системы $\{\omega_n\}$ лежит в $I_s$ (другими словами, каждая функция $f_s$ — полином Виленкина по номерам из $I_s$), то при $1 < p \le 2$ справедливо неравенство*

$$\left\| \sum_s f_s \right\|_p \le C \left\| \left( \sum_s |f_s|^2 \right)^{1/2} \right\|_p.$$

Ограниченность системы Виленкина означает ограниченность порождающей ее последовательности $\{p_i\}$. Требование ограниченности существенно для доказательства теоремы 2, что является типичным для анализа по системам Виленкина. В простейшем случае, когда $\{p_i\}$ состоит из двоек, а система Виленкина превращается в систему Уолша, теорема 2 была доказана в 2016 г. Н. Н. Осиповым, но для распространения результата на общий случай соискателю пришлось существенно модифицировать основную комбинаторную конструкцию, связанную с разбиением интервалов в $\mathbb{N}_0$.

В четвертой главе был найден класс банаховых решеток $X$, на которые переносится неравенство Литтлвуда–Пэли–Рубио де Франсиа для системы Уолша на случай функций, принимающих значения в $X$. Показано, что при $2 < p < \infty$ это можно сделать, если банахова решётка $X$ такова, что ассоциированная с ней 2-вогнутая решётка $X_{(2)}$ является банаховой решёткой со свойством UMD.

В главе 5 изучаются банаховы пространства гладких функций на торе $\mathbb{T}^n$. Основной результат здесь состоит в следующем. Выбирается шаблон однородности, задающийся некоторой гиперплоскостью в $\mathbb{R}^n$, пересекающей положительные координатные полуоси. Рассматриваются дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами, понятие старшей части которых понимается относительно заданного шаблона. Вводится пространство $C^{\mathcal{T}}(\mathbb{T}^n)$, порожденное конечным набором $\mathcal{T}$ таких операторов. Доказывается, что если хотя бы две старшие части операторов из $\mathcal{T}$ линейно независимы, то $C^{\mathcal{T}}(\mathbb{T}^n)$ не имеет локальной безусловной структуры.

**Новизна и основные результаты.** В диссертации проделана большая и содержательная работа. Все заявленные результаты получены диссертантом самостоятельно и являются новыми. Для их получения им найден ряд новых подходов для решения актуальных задач гармонического анализа. Наиболее значимыми из них являются следующие:

1. Получена наиболее общая из существующих на данный момент характеризация пространства $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^d)$ с помощью построенного в работе широкого класса проекторов Литтлвуда–Пэли.

2. Доказано неравенство Литтлвуда–Пэли–Рубио де Франсиа для ограниченных систем Виленкина.

3. Получено обобщение неравенства Литтлвуда–Пэли–Рубио де Франсиа для системы Уолша на случай функций, принимающих значения в некоторых банаховых решётках.

4. Показано, что пространство гладких функций, порожденное набором дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами со смешанной однородностью, не имеет локальной безусловной структуры.

**Степень обоснованности научных положений и выводов, сформулированных в диссертации, их достоверность.** Полученные в диссертации результаты сформулированы в виде корректных математических утверждений, снабжены строгими доказательствами. Основные результаты диссертации опубликованы в 4 статьях в журналах Mathematische Nachrichten, Математический сборник, Studia Mathematica и Записки научного семинара ПОМИ, входящие в перечень ВАК и международные реферативные базы данных Web of Science и Scopus. Одна из работ написана в соавторстве с И. М. Васильевым; результаты соавторов этой статьи разделены и в диссертации приводятся результаты, полученные соискателем. Основные результаты доложены на 3 представительных семинарах и конференциях. Таким образом, результаты являются строго обоснованными и достоверными.

Автореферат диссертации правильно и полно отражает содержание диссертации.

**Замечания.** Диссертация написана живым и ясным языком, изложение материала четкое и понятное. Вместе с тем имеется небольшое количество замечаний.

1. В начале пункта 1.3 автор диссертации приводит формулировку теоремы Рубио де Франсиа со ссылкой на работу [46]. Однако в приведенной формулировке фигурирует дискретный спектр функций, а в оригинальной версии в [46] рассматривался непрерывный спектр. Справедливости ради отметим, что в рассматриваемых вопросах разница между такими настройками несущественна.