О Т З Ы В

о диссертации К. П. Исаева “**Представление функций рядами экспонент**”, представленной на соискание учёной степени доктора физико-математических наук по специальности 01. 01. 01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертация посвящена вопросам представления функций рядами по системам экспонент и воспроизводящих ядер. Охвачен круг употребительных в комплексном анализе локально выпуклых, нормированных и гильбертовых функциональных пространств (проективные и индуктивные пределы весовых пространств аналитических функций; гильбертовы пространства целых функций; весовые пространства функций, локально интегрируемых на интервале вещественной оси). Спектр рассмотренных в работе задач подчинён единому замыслу и при этом довольно широк: описание сопряжённых к пространствам аналитических функций с помощью преобразования Фурье–Лапласа; существование дискретных достаточных множеств с оценкой меры их избыточности; наличие представляющих систем экспонент и безусловных базисов из экспонент и значений воспроизводящих ядер в различных классах функциональных пространств; построение целых функций со специальными асимптотическими свойствами. Современные требования к глубине исследования подобных задач предполагают активное использование как мощных абстрактных инструментов функционального анализа, так и очень конкретных методов, связанных с тонкими аналитическими конструкциями. Эффективное совмещение указанных подходов является сильной стороной представленной диссертантом работы.

Основополагающими в данной тематике являются выдающиеся исследования А. Ф. Леонтьева по разложению аналитических в выпуклой области функций в ряды экспонент и их естественных обобщений. Его результаты, известные во всем мире, послужили фундаментом для возникновения и развития в работах Ю. Ф. Коробейника, а впоследствии и его учеников А. В. Абанина, С. Н. Мелихова и др., общей теории представляющих и абсолютно представляющих систем (по сути — квазибазисов) в произвольных локально выпуклых пространствах. Не имея возможности останавливаться на достижениях других научных школ, отметим только, что в наши дни широкие исследования в близких направлениях проводятся научными коллективами Москвы, Санкт-Петербурга, Уфы, Ростова-на-Дону, Украины, Израиля, Германии и многих других стран ближнего и дальнего зарубежья. Тем самым, актуальность тематики диссертации К. П. Исаева не вызывает сомнений.

В первой главе диссертации доказана серия теорем о существовании целых функций с заданными асимптотическими характеристиками. В их ряду выделим особо теорему 1.3 о «раздельной» аппроксимации. Коротко суть этих результатов можно передать так: на достаточно массивном подмножестве комплексной плоскости логарифм модуля предъявляемой целой функции $f(\lambda)$ близок к заранее заданной субгармонической функции $u(\lambda)$ с предписанными ограничениями на рост. Принципиальные, хорошо известные специалистам результаты в этом направлении были получены Р. С. Юлмухаметовым. Важной отличительной особенностью утверждений из первой главы является наличие дополнительной информации о поведении производной $f'(\lambda)$ на множестве корней $N(f)$ целой функции $f(\lambda)$. Благодаря такому добавлению удаётся (во второй главе диссертации) использовать новые аппроксимационные утверждения в задаче о построении дискретных достаточных множеств в проективных и индуктивных пределах весовых пространств целых функций, а также в проблеме описания сопряжённых пространств при реализации их с помощью преобразования Фурье–Лапласа. Эти результаты диссертанта имеют не только самостоятельный, «внутренний» интерес, но и явную нацеленность на приложения.

Интересное воплощение двойственной связи между введёнными Эренпрайсом достаточными множествами и представляющими системами экспонент дано в конце второй главы для инвариантных оболочки и ядра специальных нормированных пространств аналитических в выпуклой области функций. По ходу дела выявлены некоторые неочевидные свойства таких представляющих систем, в частности, описан характер их избыточности (см. теоремы 2.4.1–2.4.4). Сюда тесно примыкают результаты третьей главы, где строятся системы экспонент, в ряды по которым раскладываются соответственно элементы исходного пространства (со сходимостью по более слабой норме); элементы его собственного подпространства (со сходимостью по норме исходного пространства).

Четвёртая глава отведена изучению безусловных базисов из воспроизводящих ядер в устойчивых относительно деления общих гильбертовых пространствах целых функций, а пятая глава — безусловных базисов из экспонент в весовых пространствах локально интегрируемых на вещественном интервале функций. Многие из результатов этих разделов носят «отрицательный» характер, гарантируя отсутствие таких базисов в соответствующих пространствах. Но подобное положение вещей отвечает существу вопроса — в тех редких случаях, когда безусловные базисы удаётся построить, наглядно продемонстрирована «изысканность» исключительных ситуаций. Отметим особо непростую теорему 4.2.1 об отсутствии безусловных базисов из воспроизводящих ядер в пространствах типа Фока $\mathcal{F}_\varphi$, порождённых сколь угодно медленно растущими весовыми функциями $\varphi(r)$ с условием $\ln r = o(\varphi(r)),\ r \to +\infty$.

Все основные результаты диссертации являются новыми, снабжены строгими и подробными математическими доказательствами, потребовавшими от диссертанта как развития известных, так и разработки оригинальных методов. Подчас «свежими» являются сами постановки задач, что дает хорошие перспективы для продолжения исследований. Усилены и обобщены многие классические и современные результаты по тематике работы. В необходимых случаях полученные общие утверждения сравниваются с теоремами предшественников.

Таким образом, диссертационная работа К. П. Исаева вносит важный вклад в комплексный и функциональный анализ, существенно развивая ключевые направления, связанные с разложением функций в ряды и с аналитическим описанием сопряжённых к пространствам голоморфных функций.

Автореферат в полном объёме и правильно отражает содержание диссертации. Основные результаты её автора прошли хорошую апробацию, в том числе — на 14 международных конференциях, и опубликованы в 17 статьях в журналах, входящих в список ВАК РФ, или в ведущих иностранных изданиях.

Ниже приведён список замечаний.

1. В той части «Введения», где описывается история вопроса и обосновывается актуальность тематики, мало внимания уделено достижениям ростовской школы комплексного анализа, непосредственно связанным с диссертационным исследованием. В частности, не хватает ссылок на работы по представляющим системам, вышедшие в свет после известной обзорной статьи Ю. Ф. Коробейника 1981 года в «Успехах математических наук». Речь идёт о работах самого Коробейника, например, в «Известиях АН» 1983 и 1986 годов; его монографии «Представляющие системы: теория и приложения», изданной во Владикавказе (ВНЦ РАН, 2009 г.) и посвящённой современному состоянию теории представляющих систем; работах С. Н. Мелихова; статьях А. В. Абанина с учениками С. В. Петровым (минимальные системы) и Т. М. Андреевой (описание сопряжённого с пространствами голоморфных функций заданного роста в областях комплексной плоскости). Отметим также, что диссертацию украсили бы относящиеся к существу дела ссылки на книгу А. М. Седлецкого «Классы аналитических преобразований Фурье и экспоненциальные аппроксимации». Указанная монография содержит обширную информацию об аппроксимационных свойствах систем экспонент, в частности, в соболевских пространствах на отрезке.

2. На стр. 11 неаккуратно сформулирована теорема B. На стр. 16 опечатки в теореме D ($|w_k| \geqslant R$) и теореме 1.1 ($n \in N(f)$). В теоремах 1.2 и 1.3 фраза «постоянная зависит от M, но не зависит от u» нуждается в пояснении, ведь константа M оценивает меру μ, которая определяется функцией u.

3. Из формулировки теоремы 1.4 со стр. 19 не ясно, выбираются φ_n произвольно из $[-\pi, \pi)$, либо определённым образом. В формулировке теоремы 1.5 (стр. 20) точки λ_n не определены, а в формулировках теорем 1.6, 1.7 (стр. 21) не задано множество W.

4. Утверждения 4.2.1–4.2.4 лучше вынести из доказательства технически сложной теоремы 4.2.1 и обосновать их перед её формулировкой. Сказанное относится и к связке «теорема 5.1.1, лемма 5.1.1».

5. Для представляющей системы элементов, не являющейся базисом, имеется нетривиальное разложение нуля по этой системе. Описание структуры таких разложений играет заметную роль в теории и приложениях. В рамках рассмотренных в диссертации задач для представляющих систем экспонент было бы интересно получить содержательные результаты о соответствующих нетривиальных разложениях нуля.

Часть замечаний носит рекомендательный характер, а указанные погрешности устранимы, не влияют на общую положительную оценку диссертации и не снижают высокую научную ценность содержащихся в ней результатов. Диссертация К. П. Исаева вполне соответствует предписаниям “Положения о порядке присуждения учёных степеней”.

Считаю, что диссертационная работа К. П. Исаева “**Представление функций рядами экспонент**” удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к докторским диссертациям по физико-математическим наукам, а её автор — Константин Петрович Исаев — заслуживает присуждения ему учёной степени доктора физико-математических наук по специальности 01. 01. 01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Официальный оппонент,
доктор физико-математических
наук по специальности 01. 01. 01,
профессор кафедры
высшей математики НИЯУ МИФИ

Шерстюков Владимир Борисович
2 июля 2021 года

115409, Москва, Каширское шоссе, д. 31,
Национальный исследовательский
ядерный университет МИФИ,
кафедра высшей математики,
тел.:+7(495)788-56-99,
E-mail: shervb73@gmail.com

Подпись удостоверяю
Заместитель начальника отдела
документационного обеспечения
НИЯУ МИФИ