

«УТВЕРЖДАЮ»

Проректор по научной работе  
ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский  
государственный университет»  
профессор

  
С. В. Аплонов

«» декабря 2017 г.



### Отзыв

ведущей организации о диссертационной работе Краско Евгения Сергеевича «Перечисление карт с одной гранью», представленной на соискание ученой степени кандидата физ.-мат. наук по специальности 01.01.09 — дискретная математика и математическая кибернетика, в диссертационный совет Д 002.202.02 при Санкт-Петербургском отделении Математического института им. В. А. Стеклова РАН

Диссертация Е. С. Краско содержит результаты, посвященные перечислению различных классов карт на поверхностях. Особый интерес в этой области представляют задачи перечисления непомеченных карт. Основы современного подхода к перечислению непомеченных карт были разработаны Лисковцом и развиты Медных, Неделой и другими авторами.

Данная область комбинаторики начала привлекать внимание исследователей из-за ее связей с современной теорией узлов, биоинформатикой, а также различными задачами теоретической физики. Тема диссертации актуальна, она находится на стыке современной перечислительной комбинаторики, комбинаторной топологии и теории групп.

В первой главе работы Е. С. Краско рассматривается классическая задача о перечислении  $(1 + d)$ -деревьев на плоскости. Несмотря на то, что рекуррентные формулы, описывающие количество подобного рода деревьев в непомеченном случае, были получены еще Харари (1975), явных формул и производящих функций до настоящего времени не существовало. Сложности в решении этой задачи были связаны, прежде всего, с трудностью учета симметрии отражения при использовании классических методов перечисления деревьев, таких как, например, формула Оттера. В диссертации используется оригинальный подход Брауна для учета симметрий отражения и выводится решение задачи перечисления непомеченных  $(1 + d)$ -деревьев на плоскости в виде производящей функции. Диссертант обобщает полученные результаты на случай  $S$ -деревьев и находит асимптотические оценки для их числа.

Вторая глава диссертации посвящена перечислению беспетлевых и простых хордовых диаграмм как в помеченном, так и в непомеченном случае. Предварительный анализ задачи перечисления беспетлевых хордовых диаграмм был проведен

Сингмастером (1975). Для помеченного случая комбинаторные доказательства рекуррентных формул, описывающих количество беспетлевых диаграмм, были получены Хазевинкелем и Калашниковым (1995). В диссертации Е. С. Краско описанная задача рассматривается весьма подробно. Для помеченного случая диссертант выводит рекуррентные соотношения и сводит их решение к решению определенного уравнения в частных производных, что позволяет получить явный вид производящих функций для соответствующих последовательностей. Для непомеченного случая диссертантом проводится тщательный анализ всех симметрий, которыми могут обладать беспетлевые хордовые диаграммы, и на основании результатов этого анализа выводятся рекуррентные соотношения для количества соответствующих диаграмм. Во второй части второй главы диссертант развивает разработанную технику и перечисляет простые помеченные и непомеченные хордовые диаграммы.

Третья и четвертая главы диссертации посвящены вопросам перечисления карт на поверхностях заданного рода  $g$ . В третьей главе диссертант исследует вопросы перечисления  $d$ -регулярных карт с одной гранью. Е. С. Краско исследует орбиболды, возникающие при факторизации поверхностей, на которые могут быть уложены такие карты, и делает вывод о том, что они допускают явное описание, и это позволяет автору получить явные формулы для количества непомеченных 3-регулярных и 4-регулярных карт с одной гранью. Автор приводит формулы для непомеченных  $d$ -регулярных карт и для других  $d$ , однако отмечает, что эффективное вычисление по этим формулам возможно лишь при использовании решения соответствующей задачи для помеченных карт. Далее Е. С. Краско решает задачу перечисления максимальных карт с учетом всех симметрий, включая симметрии отражения. Наконец, в четвертой главе автор обобщает результаты, касающиеся  $d$ -регулярных карт с одной гранью, на соответствующие карты с произвольным числом граней.

Работа производит хорошее впечатление: она написана ясным языком, все доказательства корректны. Основные результаты диссертации являются новыми и актуальными. Рассчитанные по полученным формулам числовые последовательности находятся в соответствии с результатами явной генерации.

Работа носит теоретический характер. Разработанные в ней методы и подходы могут быть использованы для дальнейшего изучения свойств различных типов карт на поверхностях рода  $g$ .

Отметим недостатки диссертации.

1. В диссертации мало внимания уделяется мотивации исследования. Связи задачи перечисления непомеченных карт с другими областями математики лишь перечисляются.

2. Асимптотические оценки получены лишь для малого числа новых числовых последовательностей, описанных в диссертации. Так, диссертант рассматривает соответствующий вопрос в главе 1, однако не возвращается к нему в последующих главах. В случае, когда соответствующие оценки уже известны для корневых карт, а вопрос для рассматриваемых в диссертации некорневых карт не представляет отдельного интереса, желательно было бы отметить этот факт и привести ссылки на соответствующие работы.

Отмеченные недостатки, однако, не снижают общей высокой оценки работы диссертанта и не ставят под сомнение ее научную значимость. Диссертация Е. С. Краско вносит заметный вклад в перечисление карт на поверхностях. С её результатами следует ознакомить МГУ, НГУ, математический институт им. Соболева и другие организации, занимающиеся комбинаторикой и теорией графов.

Основные результаты диссертации докладывались на одной конференции и опубликованы в 4 работах автора. Все работы опубликованы в журналах из Перечня ВАК. В диссертации указан вклад автора в совместных публикациях.

Диссертационная работа соответствует требованиям, предъявляемым к диссертациям, защищаемым по специальности 01.01.09 «Дискретная математика и математическая кибернетика», а ее автор Е. С. Краско заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физ.-мат. наук.

Отзыв составил профессор кафедры исследования операций федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Санкт-Петербургский государственный университет» В. Н. Малоземов. Отзыв заслушан, обсужден и утвержден на заседании кафедры исследования операций мат.-мех. факультета СПбГУ, протокол № 4 от 30.11.2017. *номер прот. 79.08/11-04-5*

Доктор физ.-мат. наук,  
профессор

В. Н. Малоземов

Заведующий кафедрой  
исследования операций,  
доктор физ.-мат. наук, профессор

И. В. Романовский

Сведения о ведущей организации: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Санкт-Петербургский государственный университет», г. Санкт-Петербург, Университетская набережная, д. 7/9; эл. почта: [spbu@spbu.ru](mailto:spbu@spbu.ru); Вэб-сайт: <http://spbu.ru>; тел.: +7(812) 328-20-00.