



САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
SAMARA UNIVERSITY

федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева»

ул. Московское шоссе, д. 34, г. Самара, 443086
Тел.: +7 (846) 335-18-26, факс: +7 (846) 335-18-36
Сайт: www.ssau.ru, e-mail: ssau@ssau.ru
ОКПО 02068410, ОГРН 1026301168310,
ИНН 6316000632, КПП 631601001

УТВЕРЖДАЮ



Первый проректор –
проректор по науке
кандидат юридических наук,
доцент

А.И. Розенцвайг

ampers 2026 г.

13 АПР 2026

№ 104-2026

На № _____ от _____

ОТЗЫВ ВЕДУЩЕЙ ОРГАНИЗАЦИИ

на диссертационную работу Горшановой Анастасии «Некоторые вопросы аппроксимации системами всплесков», представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (специальность 1.1.1 – вещественный, комплексный и функциональный анализ)

Теория аппроксимации, являясь классическим разделом математики, продолжает бурно развиваться в настоящее время. Связано это как с развитием собственно теории, так и с конкретными практическими проблемами, а также применением уже имеющихся результатов к их решению. В частности, теория всплесков, возникшая в 80-ые годы 20-го века в связи с решением практических задач обработки сигналов, активно развивалась в последующие годы в том числе благодаря применению ее методов в различных инженерных задачах, в частности, в задачах математической физики, аппроксимации и интерполяции функций.

Рецензируемая диссертация посвящена исследованию вопросов, так или иначе относящихся к аппроксимационным свойствам различных систем всплесков. Несмотря на серьезные достижения, систематически описанные в целом ряде монографий (см., например, Новиков И. Я., Протасов В. Ю., Скопина М. А. Теория всплесков (2006), Trigub R. M., Belinsky E. S. Fourier Analysis and Approximation of Functions (2004)), многие важные вопросы, относящиеся к этой проблематике, остаются неизученными или были исследованы лишь при дополнительных условиях. Данное

диссертационное исследование содержит новые интересные результаты, и поэтому, несомненно, актуально.

Диссертация состоит из Введения, трех глав, Заключения, списка обозначений и списка литературы. Содержание Введения, в основном, совпадает с содержанием автореферата. Здесь соискатель приводит краткий обзор литературы, дает обоснование актуальности темы исследования, приводит основные определения и обозначения, а также формулирует и комментирует основные результаты диссертационной работы.

В первой главе изучаются аппроксимационные свойства разложений по системе нестационарных периодических всплесков в зависимости от структурных свойств приближаемой функции. Центральный результат первой главы — вариант прямой теоремы типа Джексона в этом случае. Напомним, что в классической теореме Джексона речь идет о наилучшем приближении $E_N(f)$ функции f тригонометрическими полиномами степени $\leq N$ в пространстве $C[0, 2\pi]$ или конкретнее о неравенстве

$$E_N(f) \leq 2\omega(f, 3\pi/(N+1)),$$

где $\omega(f, \cdot)$ — модуль непрерывности функции f . В дальнейшем были получены аналоги этого неравенства для различных пространств и приближающих систем функций. Соответствующие теоремы называют прямыми теоремами типа Джексона. Утверждения, в которых доказывается обратное неравенство, называют обратными теоремами. Прямые и обратные теоремы типа Джексона приобрели широкое распространение в теории аппроксимации благодаря тому, что они позволяют выявить взаимосвязь между гладкостью функции и её конструктивными свойствами, которые характеризуются поведением наилучших приближений.

В главе 1 диссертации получено описание аппроксимационных свойств биортогональных базисов периодических нестационарных систем всплесков в пространствах L_p , $1 \leq p < \infty$, и в пространстве непрерывных функций. В отличие от ранее известных аналогичных результатов для периодических базисов всплесков в теореме 1 из § 1.3 речь идет о нестационарной системе всплесков (т.е. она может не иметь порождающей её непериодической функции), которая, вообще говоря, не имеет мажоранты. В главе 1 также приведены аналоги прямой теоремы Джексона с ослаблением условий на гладкость всплесковых функций.

Наиболее протяженная вторая глава посвящена построению и изучению аппроксимационных свойств периодических фреймов Парсеваля системы всплесков в пространстве L_2 . Как известно, структура фрейма отлична от структуры базиса главным образом тем, что допускает

избыточность систем всплесков. В то же время фреймы полны и обеспечивают стабильное восстановление.

Для каждого $j \in \mathbb{Z}_+$ зафиксируем натуральное число ρ_j и рассмотрим функции $\psi_j^m \in L_2$, $m = 1, \dots, \rho_j$. Системой периодических всплесков называют семейство функций

$$\Psi = \{S_j^k \psi_j^m : j \in \mathbb{Z}_+, m = 1, \dots, \rho_j, k \in R_j\},$$

где S_j^k — стандартный оператор двоичного сдвига на множестве $R_j = \{-2^{j-1}+1, -2^{j-1}+2, \dots, 2^{j-1}\}$. В первой части главы описаны конструктивные необходимые и достаточные условия, при которых это семейство образует фрейм Парсевала. В § 2.2 (см. теоремы 1 и 2) даны необходимые и достаточные условия, при которых система Ψ образует фрейм Парсевала периодических всплесков в терминах коэффициентов Фурье и последовательности масштабирующих функций соответственно. Эти утверждения используются затем для доказательства основного результата главы — конструктивного критерия фреймовости системы всплесков в теореме 3 и более общей теореме 4. В отличие от более ранних утверждений подобного характера во второй из этих теорем соискателю удастся обойтись без дополнительных условий на масштабирующие функции.

В следующем § 2.3 приведены примеры применения доказанных критериев для построения конкретных фреймов. Далее в главе описываются аппроксимационные свойства систем всплесков, построенных с помощью теоремы 4, и аппроксимационные свойства связанных с ними систем сдвигов масштабирующих функций. При этом способность фрейма всплесков приближать функции в пространстве L_2 оценивается с помощью порядков аппроксимации. В связи с этим изучается взаимосвязь между порядком аппроксимации фреймом и порядком аппроксимации соответствующим периодическим кратномасштабным анализом $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}_+}$ (ПКМА). Заметим, что здесь используется определение ПКМА, включающее в себя наименьшее возможное количество аксиом: условие вложенности подпространств и условие плотности их объединения в пространстве L_2 . Сначала в параграфе 2.4. рассматриваются аппроксимационные свойства ПКМА. В частности, теорема 5 этого параграфа содержит необходимые и достаточные условия, при которых может быть получен определённый порядок аппроксимации ПКМА. В последнем параграфе главы 2 изучаются аппроксимационные свойства периодических фреймов Парсевала системы всплесков, масштабирующие функции (соотв. всплеск-функции) которых удовлетворяют определённому масштабирующему уравнению (соотв. всплесковому уравнению).

В третьей главе диссертации рассматриваются аппроксимационные свойства систем диадических всплесков в пространствах Лебега, заданных на положительной полупрямой с операцией двоичного сложения. Заметим, что прежние результаты подобного рода содержат либо предположение о регулярности масштабирующей функции и выполнении условия Стрэнга-Фикса некоторого порядка, либо условие существования четной, суммируемой, убывающей на положительном луче мажоранты. Особенности операции двоичного сложения позволяют соискателю обойтись без предположений о гладкости или существовании мажоранты и доказать, конструируя системы всплесков с помощью унитарного принципа расширения, теоремы 6 и 7 о сходимости систем диадических всплесков почти везде и в пространствах $L^p(\mathbb{R}_+)$, $1 \leq p < \infty$. При доказательстве этих результатов соискателю пришлось преодолеть значительные технические трудности.

В Заключении соискатель перечисляет основные результаты работы. Далее приведен список обозначений, а также список своих публикаций по теме диссертации и общий список литературы, содержащий 45 наименований.

Диссертация представляет из себя в целом завершенное научное исследование; все утверждения приведены в ней с полными и подробными доказательствами, выполненными на достаточно высоком техническом уровне. Полученные результаты, несомненно, являются серьезным вкладом в теорию аппроксимации и теорию всплесков. Работа очень тщательно и аккуратно оформлена, даны все необходимые доказательства, приведены ссылки на используемые факты, все утверждения и выводы грамотно обоснованы.

В то же время есть одно замечание общего характера. Трудно назвать другую область анализа, которая бы развивалась столь бурно, как теория всплесков. Поэтому было бы весьма уместно в диссертации уделить больше внимания истории рассматриваемых вопросов. Это бы позволило лучше понять, в чем состоит преимущество того или иного результата по сравнению с тем, что было. К сожалению, в данной диссертации сведения об известных результатах очень скудны, практически ни один из них не цитируется.

Есть также следующие более мелкие замечания:

1. Стр. 3, -1: не совсем понятно, что означает индекс "г" в обозначении модуля непрерывности ω_τ .

2. Стр. 4, -12: следующая ссылка выглядит весьма странно: "Характеризация фрейма всплесков для непериодических функций при различных предположениях на всплесковые генераторы описана в работах

и монографии [11,19,27,36] П.-Г. Лемарье, И. Добеши, Г. Грипенберга, И.Я. Новикова, В.Ю. Протасова и М.А. Скопиной."

Разумеется, сделанные замечания никак не влияют на значимость результатов, полученных соискателем.

По теме диссертации опубликовано 4 статьи в рецензируемых научных журналах, входящих в перечень, рекомендованный ВАК Минобрнауки РФ. Результаты докладывались на ряде представительных конференций, в том числе и международных.

Работа носит теоретический характер. Полученные в ней результаты могут быть использованы при исследовании проблем теории приближений и, в частности, теории всплесков, а также их приложений к решению различных задач, возникающих при обработке сигналов и работе с изображениями. Они будут интересны специалистам из Московского, Казанского, Новосибирского, Самарского, Санкт-Петербургского, Саратовского университетов. Возможно также использование результатов диссертации при чтении курсов по выбору в университетах для магистрантов и аспирантов физико-математических специальностей. Автореферат диссертации полностью и адекватно отражает содержание диссертации.

Суммируя вышесказанное, можно определенно констатировать, что диссертационная работа "Некоторые вопросы аппроксимации системами всплесков" соответствует специальности 1.1.1 – вещественный, комплексный и функциональный анализ, удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени кандидата наук, а ее автор, Горшанова Анастасия, заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.1 – вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Отзыв обсужден на заседании кафедры функционального анализа и теории функций Самарского университета, протокол № 7 от 27 марта 2026 г.

Заведующий кафедрой
функционального анализа
и теории функций Самарского
университета (443086 г. Самара,
ул. Московское шоссе, 34,
тел. 8 (846) 3345437
e-mail: astash@ssau.ru),
доктор физ.-мат. н.,
профессор



Асташкин Сергей Владимирович