МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ
ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ МАШИНОВЕДЕНИЯ
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК
(ИПМаш РАН)

В.О., Большой проспект, д.61, Санкт-Петербург, 199178
Тел.: (812)-321-4778; факс: (812)-321-4771; www.ipme.ru

ОГРН 1037800003560, ИНН/КПП 7801037069/780101001

УТВЕРЖДАЮ
Директор ФГБУН ИПМаш РАН

_______________ / В. А. Полянский /

«___» _______________ 2021 г.

Отзыв ведущей организации
на диссертационную работу Марка Александровича Дородного
"Усреднение нестационарных периодических уравнений",
представленную на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
по специальности 01.01.03 — Математическая физика

Диссертация М. А. Дородного относится к теории усреднения (гомогенизации) дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Это обширная область теоретической и прикладной науки, активно развивающаяся в разных направлениях. С физической точки зрения усреднение среды состоит в том, что среда с быстро осциллирующими параметрами в пределе ведет себя как однородная среда с эффективными параметрами. Математически это означает, что решение дифференциального уравнения с периодическими коэффициентами в пределе малого периода сходится к решению осредненного (эффективного) уравнения. Представляет интерес исследование типа такой сходимости и получение оценок погрешности приближения. В диссертации речь идет о так называемых *операторных оценках погрешности* в задачах усреднения, которые интенсивно исследуются в течение последних двадцати лет. Начало этому направлению в гомогенизации было положено М. Ш. Бирманом и Т. А. Суслиной в 2001 году. В их работах был предложен новый теоретико-операторный подход, с помощью которого были получены операторные оценки погрешности для эллиптических задач гомогенизации. Речь шла об оценках разности резольвент исходного и эффективного операторов по операторной норме в L_2. В дальнейшем этим методом были исследованы и параболические задачи, то есть были получены оценки разности полугрупп исходного и эффективного операторов по операторной норме в L_2. Вскоре в работах В. В. Жикова и С. Е. Пастуховой появился другой подход к получению подобных результатов — так называемый метод сдвига. К настоящему времени имеется большое число работ разных авторов по этой тематике. Операторные оценки для эллиптических и параболических уравнений уже хорошо изучены.

Существенно более сложным является вопрос об усреднении нестационарных задач, связанных с распространением волн. В этом направлении многие проблемы оставались нерешенными. В диссертации М. А. Дородного изучаются операторные оценки при усреднении нестационарных уравнений типа Шрёдингера и гиперболических уравнений.

Остановимся на постановке задачи. В пространстве $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ рассматривается матричный дифференциальный оператор второго порядка вида

$$A_\varepsilon = b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}/\varepsilon) b(\mathbf{D}), \quad \varepsilon > 0. \tag{1}$$

Матрица коэффициентов $g(\mathbf{x})$ не предполагается гладкой. Она ограничена, положительно определена и периодична относительно решетки Γ; $b(\mathbf{D})$ — дифференциальный оператор первого порядка. Делаются предположения, при которых оператор A_ε сильно эллиптичен. Рассматривается также более общий оператор B_ε с включением членов младшего порядка:

$$B_\varepsilon = A_\varepsilon + \sum_{j=1}^{d} \left(a_j(\mathbf{x}/\varepsilon) D_j + D_j a_j^*(\mathbf{x}/\varepsilon) \right) + Q(\mathbf{x}/\varepsilon). \tag{2}$$

Периодические матричные коэффициенты a_j, Q, вообще говоря, неограничены. Операторы A_ε, B_ε самосопряжены; предполагается, что оператор (2) положительно определен.

При $\varepsilon \to 0$ оператор A_ε "ведет себя" как эффективный оператор A^0 с постоянными коэффициентами. Эффективный оператор имеет вид $A^0 = b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D})$, где g^0 — так называемая эффективная матрица. Аналогично, B_ε "ведет себя" как некоторый эффективный оператор B^0 с постоянными коэффициентами.

Изучение нестационарных уравнений типа Шрёдингера и гиперболического типа в операторных терминах сводится к изучению оператор-функций e^{-isA_ε}, $\cos(sA_\varepsilon{}^{1/2})$ и $A_\varepsilon{}^{-1/2}\sin(sA_\varepsilon{}^{1/2})$, где $s \in \mathbb{R}$. Такие оператор-функции исследовались в работе М. Ш. Бирмана и Т. А. Суслиной 2008 года, где было обнаружено, что ситуация существенно отличается от случая резольвенты $(A_\varepsilon + I)^{-1}$ или полугруппы e^{-sA_ε} (при $s > 0$). Оказалось, что для исследуемых оператор-функций уже не удается получить приближения по операторной норме в $L_2(\mathbb{R}^d)$. Авторы изменили тип операторной нормы и установили оценки в нормах, действующих из подходящего пространства Соболева в $L_2(\mathbb{R}^d)$:

$$\|e^{-isA_\varepsilon} - e^{-isA^0}\|_{H^3(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1+|s|)\varepsilon, \tag{3}$$

$$\|\cos(sA_\varepsilon^{1/2}) - \cos(s(A^0)^{1/2})\|_{H^2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1+|s|)\varepsilon. \tag{4}$$

Для оператора $A_\varepsilon{}^{-1/2}\sin(sA_\varepsilon{}^{1/2})$ похожая оценка была найдена в 2019 году Ю. М. Мешковой:

$$\|A_\varepsilon^{-1/2}\sin(sA_\varepsilon^{1/2}) - (A^0)^{-1/2}\sin(s(A^0)^{1/2})\|_{H^1(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1+|s|)\varepsilon. \tag{5}$$

Представляет интерес вопрос о точности этих результатов. В работе Т. А. Суслиной 2017 года было показано, что оценку (3) в общем случае нельзя улучшить по типу нормы (то есть нельзя заменить $(H^3 \to L_2)$-норму на $(H^\sigma \to L_2)$-норму при $\sigma < 3$ с сохранением порядка $O(\varepsilon)$). Однако, были указаны дополнительные условия, которые позволяют получить следующее усиление:

$$\|e^{-isA_\varepsilon} - e^{-isA^0}\|_{H^2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1+|s|)\varepsilon. \tag{6}$$

Вопрос о точности оценок в отношении зависимости от параметра s (времени) ранее не изучался.

В диссертации М. А. Дородного изучаются следующие проблемы: вопрос о точности оценки (3) по времени; вопрос о точности оценок (4) и (5) в отношении типа нормы, а также в отношении зависимости от времени; вопрос об аппроксимации операторной экспоненты для оператора B_ε вида (2).

Остановимся на основных результатах диссертации.

В отношении уравнений типа Шрёдингера получено следующее:

Установлено, что в общем случае оценку (3) нельзя улучшить не только по типу нормы (это было известно — результат Т. А. Суслиной), но и в отношении зависимости от времени. Это означает, что в правой части коэффициент при ε растет при большом $|s|$ как $O(|s|)$ и его нельзя заменить на $o(|s|)$. С другой стороны, найдены дополнительные условия, при которых справедлива усиленная оценка:

$$\|e^{-isA_\varepsilon} - e^{-isA^0}\|_{H^2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1+|s|)^{1/2}\varepsilon. \tag{7}$$

Эти условия формулируются в терминах спектральных характеристик оператора на краю спектра. Далее, диссертанту удалось показать, что при упомянутых дополнительных предположениях оценка (7) снова неулучшаема.

Исследована операторная экспонента e^{-isB_ε}. В общем случае получена оценка

$$\|e^{-isB_\varepsilon} - e^{-isB^0}\|_{H^3(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1+|s|)\varepsilon. \tag{8}$$

Доказана точность этой оценки по типу нормы (в общем случае). При дополнительных условиях получен более сильный результат:

$$\|e^{-isB_\varepsilon} - e^{-isB^0}\|_{H^2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1+|s|)\varepsilon.$$

В отношении гиперболических уравнений получено следующее:

Показано, что в общем случае оценки (4) и (5) точны и по типу нормы, и в отношении зависимости от времени. С другой стороны, при дополнительных условиях получены более сильные результаты:

$$\|\cos(sA_\varepsilon^{1/2}) - \cos(s(A^0)^{1/2})\|_{H^{3/2}(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1+|s|)^{1/2}\varepsilon, \tag{9}$$

$$\|A_\varepsilon{}^{-1/2}\sin(sA_\varepsilon^{1/2}) - (A^0)^{-1/2}\sin(s(A^0)^{1/2})\|_{H^{1/2}(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1+|s|)^{1/2}\varepsilon, \tag{10}$$

и, в свою очередь, подтверждена их точность.

Исследование опирается на теоретико-операторный (спектральный) подход, основанный на масштабном преобразовании, теории Флоке–Блоха и аналитической теории возмущений. За счет масштабного преобразования оператор A_ε унитарно эквивалентен оператору $\varepsilon^{-2}A$, где $A = b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})$. Поэтому изучение оператор-функций от A_ε можно свести к анализу оператор-функций от оператора $\varepsilon^{-2}A$. Далее, с помощью теории Флоке–Блоха оператор A раскладывается в прямой интеграл по операторам $A(\mathbf{k})$, действующим в $L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)$. Здесь Ω — ячейка решетки Γ. Квазиимпульс $\mathbf{k}$ принадлежит множеству $\widetilde{\Omega}$ (центральной зоне Бриллюэна двойственной решетки). Оператор $A(\mathbf{k})$ отвечает дифференциальному выражению $b(\mathbf{D}+\mathbf{k})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}+\mathbf{k})$ с периодическими граничными условиями. Поскольку зависимость операторного семейства $A(\mathbf{k})$ от квазиимпульса квадратичная, а резольвента компактна, то можно применять аналитическую теорию возмущений. Из-за трудностей аналитической теории возмущений с многомерным параметром, удобно выделить одномерный параметр — модуль квазиимпульса $t = |\mathbf{k}|$. Но необходимо следить за равномерностью доказываемых оценок по направлению квазиимпульса, то есть по параметру $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{k}/|\mathbf{k}|$. Для изучаемых задач важны только первые n собственных значений $\lambda_l(t, \boldsymbol{\theta})$, $l = 1, \dots, n$, операторного семейства $A(\mathbf{k}) = A(t\boldsymbol{\theta})$, аналитических по t. Степенные разложения для собственных значений имеют вид

$$\lambda_l(t, \boldsymbol{\theta}) = \gamma_l(\boldsymbol{\theta})t^2 + \mu_l(\boldsymbol{\theta})t^3 + \nu_l(\boldsymbol{\theta})t^4 + \dots, \quad l = 1, \dots, n,$$

причем коэффициенты $\gamma_l(\boldsymbol{\theta})$ положительны. В диссертации показано, что если $\mu_l(\boldsymbol{\theta}_0) \neq 0$ при каком-либо l и $\boldsymbol{\theta}_0$, то оценки (4), (5) неулучшаемы как по типу нормы, так и в отношении зависимости от времени. При том же условии оценка (3) точна в отношении зависимости от s. В случае, когда коэффициенты $\mu_l(\boldsymbol{\theta})$ равны нулю (при всех l) и числа $\gamma_l(\boldsymbol{\theta})$, $l = 1, \dots, n$, различны при каждом $\boldsymbol{\theta}$, то имеют место более сильные результаты (7), (9), (10). Получены и другие (более свободные) варианты условий, при которых есть усиление.

В диссертации установлено, что если все коэффициенты $\mu_l(\boldsymbol{\theta})$ равны нулю, но $\nu_j(\boldsymbol{\theta}_0) \neq 0$ (при некоторых j и $\boldsymbol{\theta}_0$), то оценки (7), (9), (10) точны. Как правило, указанное условие выполнено.

Результаты об экспоненте e^{-isB_ε} получены тем же методом, но технических проблем здесь гораздо больше. Соответствующее операторное семейство $B(\mathbf{k}, \varepsilon)$ в $L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)$ зависит не только от $\mathbf{k}$, но и от ε. Оно изучается методами аналитической теории возмущений по одномерному параметру $\tau = (|\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2)^{1/2}$.

Полученные результаты применяются к исследованию поведения решений задач Коши для уравнений типа Шрёдингера $i\partial_s \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, s) = (A_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon)(\mathbf{x}, s)$ и $i\partial_s \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, s) = (B_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon)(\mathbf{x}, s)$ и гиперболического уравнения $\partial_s^2 \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, s) = -(A_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon)(\mathbf{x}, s)$. Рассмотрены конкретные приложения, такие как нестационарное магнитное уравнение Шрёдингера, двумерное уравнение Паули, нестационарные уравнения акустики и теории упругости. Обнаружилось, что для уравнения акустики всегда справедлив более сильный результат, а для системы теории упругости общие результаты улучшить нельзя. Для уравнения Шрёдингера есть усиление, а для двумерного уравнения Паули общие результаты точны. Построены интересные примеры, демонстрирующие ту и другую ситуации.

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. В первой главе строится абстрактная теоретико-операторная схема; здесь основные результаты получены на абстрактном уровне. Во второй главе рассматриваются периодические дифференциальные операторы в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$; обсуждается разложение в прямой интеграл. К возникающим операторным пучкам, зависящим от квазиимпульса $\mathbf{k}$, применяются результаты главы 1. В главе 3 получены основные результаты работы — операторные оценки погрешности для уравнений типа Шрёдингера и гиперболических уравнений. Рассмотрены приложения к различным уравнениям математической физики. Материал диссертации хорошо структурирован, изложение ясное.

По тексту имеется пара замечаний редакционного характера:

1) При ссылках на книгу Т. Като “Теория возмущений линейных операторов” объемом 740 страниц (см. стр. 24 диссертации) или на книгу В. В. Жикова, С. М. Козлова и О. А. Олейник “Усреднение дифференциальных операторов” объемом 464 страницы (см. стр. 144 диссертации) следовало бы указать номер главы или параграфа из этих книг.

2) Названия разделов в диссертации не всегда удачны и информативны. Например, нынешнее название главы 3 "Задачи усреднения для гиперболических уравнений" следовало бы заменить на "Задачи усреднения для уравнений типа Шрёдингера и гиперболических уравнений", поскольку в этой главе изучаются и те, и другие уравнения.

Сделанные замечания нисколько не умаляют общей высокой оценки работы. Диссертация М. А. Дородного является содержательным, полным и законченным фундаментальным исследованием, выполненным на высоком научном уровне. Результаты диссертации являются новыми и представляют большой интерес как в теоретическом плане, так и для приложений. Автор проявил уверенное владение современными методами теории усреднения и спектральной теории операторов и продемонстрировал техническую изобретательность. Результаты диссертации со всей полнотой отражены в шести публикациях в ведущих российских и западных математических журналах (входящих в список ВАК и в международные базы данных Web of Science и Scopus). М. А. Дородный многократно выступал с докладами по результатам диссертации на научных семинарах и престижных международных конференциях. Автореферат правильно отражает содержание диссертации.

Полученные в диссертации результаты могут быть использованы специалистами по математической физике, теории усреднения и теории дифференциальных уравнений в частных производных, работающими в Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова, Санкт-Петербургском государственном университете, Математическом институте им. В. А. Стеклова, Санкт-Петербургском отделении математического института им. В. А. Стеклова, Институте проблем машиноведения РАН и в других университетах и научных институтах.

Диссертация М. А. Дородного "Усреднение нестационарных периодических уравнений" удовлетворяет всем требованиям ВАК, предъявляемым к кандидатским диссертациям, а ее автор заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.03 — "Математическая физика".

Основные результаты диссертации были доложены М.А. Дородным в режиме онлайн на заседании семинара лаборатории математических методов механики материалов Института проблем машиноведения РАН 18 марта 2021 года, протокол № 1. Принято решение – одобрить положительный отзыв.

Заведущий лабораторией математических методов
механики материалов
Института проблем машиноведения РАН,
главный научный сотрудник,
доктор физ.-мат. наук — А.Б. Фрейдин

Ведущий научный сотрудник
лаборатории математических методов
механики материалов
Института проблем машиноведения РАН,
доктор физ.-мат. наук — А.С. Слуцкий

Подпись Фрейдина А.Б. и Слуцкого А.С.
удостоверяю: Помощник директора ИПМаш РАН
(Андреева С.И.)
мая 2021 г.