УТВЕРЖДАЮ:

Директор ФГБУН "Институт математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения РАН" академик РАН, д.ф.-м.н., профессор С. С. Гончаров

29 марта 2021 года
630090, г. Новосибирск, ул. Пирогова 4;
+7(383)-333-28-92; im@math.nsc.ru

ОТЗЫВ ВЕДУЩЕЙ ОРГАНИЗАЦИИ

о диссертационной работе Салимова Рустема Фаридовича
"Оптимальные процедуры различения двусторонних гипотез и двустороннего доверительного оценивания в d-апостериорном подходе",
представленной на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук
по специальности 01.01.05 — теория вероятностей и математическая статистика

Актуальность темы. Диссертационная работа посвящена решению насущных проблем гарантийного статистического вывода при различении гипотез интервального типа, построении двусторонних доверительных интервалов и точечном оценивании с функцией потерь, учитывающей относительные и абсолютные отклонения от истинного значения параметра. Рассматривается байесовская ситуация, когда предполагается случайность изменения параметра от эксперимента к эксперименту. Байесовские методы имеют большое значение в прикладных областях математической статистики. Такие методы особенно полезны в ситуациях, когда одна и та же статистическая задача возникает многократно и требуется контролировать величину ошибки, усредненную по значениям параметра, относительно которого принимается решение. Стандартное байесовское определение риска, как средних потерь от всех принятых решений, не всегда может удовлетворить запросы практики. В проблеме аттестации и контроля качества гарантии должны быть связаны не с классическими вероятностями ошибок первого и второго рода, а со средними потерями в экспериментах, в которых было принято то или иное решение. В представляемой работе риск статистической процедуры вычисляется как условное математическое ожидание потерь при фиксированном принятом решении (полученной оценке). Подход, ориентированный на учет функции риска такого рода (d-риска), называется d-апостериорным. Предыстория этого подхода восходит к трудам С. Н. Бернштейна, К.Р. Рао, Л. Н. Большева.

Научная значимость и новизна результатов, выносимых на защиту.

Перейдем к более детальному анализу содержания диссертации.

Диссертация общим объёмом 105 страниц состоит из введения, основного текста из 3 глав, заключения и списка литературы, содержащего 51 наименование. Основной объем диссертации приходится на принадлежащие автору доказательства его результатов, а также представления результатов численных экспериментов в виде таблиц и графиков.

В первой главе рассматривается задача различения двух гипотез относительно неизвестного параметра θ распределения наблюдений

$$H_0:\ \theta \in [\theta_1, \theta_2], \qquad H_1:\ \theta \notin [\theta_1, \theta_2],$$

при этом истинное значение параметра θ в эксперименте есть реализация случайной величины Θ с известным априорным распределением.

В теореме 1.2 найдена асимптотическая формула для необходимого объема выборки n^* при малых (стремящихся к нулю) ограничениях на d-апостериорные ошибки 1-го и 2-го рода:

$$\mathbf{P}(\Theta \in [\theta_1, \theta_2] \mid \delta_{n^*} = d_1) \le \beta_1 \to 0,$$
$$\mathbf{P}(\Theta \notin [\theta_1, \theta_2] \mid \delta_{n^*} = d_0) \le \beta_0 \to 0,$$

где δ_n — решающая функция, которая по выборке объёма n принимает решение d_0 в пользу гипотезы H_0 или решение d_1 в пользу гипотезы H_1. Асимптотическая формула находится для регулярных вероятностных моделей, описывающих распределение выборочных данных; предполагается также, что априорное распределение имеет плотность относительно меры Лебега.

Точность полученной формулы исследуется на трёх примерах. Сложность численной реализации заключается в том, что для построения процедуры с минимальным необходимым объемом выборки нужно уметь вычислять распределение апостериорной вероятности нулевой гипотезы. Такая возможность появляется только для достаточно "удобных" вероятностных моделей (в частности, в первых двух примерах из диссертации). Проведенные в диссертации вычисления указывают путь построения оптимальных процедур для моделей экспоненциального типа. Для моделей, в которых нет одномерных достаточных статистик, единственным способом анализа точного значения необходимого объема выборки является метод стохастического моделирования (третий пример, модель Коши-Коши). Здесь также разработан оригинальный способ стохастической аппроксимации апостериорного распределения, пригодный для других вероятностных моделей.

Наконец, в третьем параграфе главы 1 проводится сравнение по объёму выборки гарантийных процедур с фиксированным числом наблюдений и универсальной последовательной процедурой первого перескока (т.е. процедуры, которая останавливается, как только байесовский апостериорный риск станет меньше заданного ограничения). Рассматривается нормально-нормальная модель; здесь также используется стохастическое моделирование.

В главе 2 проводится исследование свойств так называемого Б-доверительного семейства двусторонних интервалов (префикс — от фамилии Бернштейна С.Н., т.к. впервые нечто подобное было предложено им). В отличие от традиционного подхода, здесь трудно ожидать оптимальности от интервалов, определяемых в виде двух статистик. Следуя схеме, связывающей задачу проверки гипотез и задачу доверительного оценивания, ранее Володин И.Н. и Симушкин С.В. предложили способ описания наиболее точного доверительного (в d-апостериорном смысле) семейства интервалов. Идея состоит в следующем: по выборке выдается не значение одной-двух статистик, а некоторое семейство $\mathbf{B}$ всех интервалов, которые считаются “доверительными” на уровне $1 - \beta$, т.е. для него выполняется условие

$$\mathbf{P}(\Theta \in [\theta_1, \theta_2] \mid [\theta_1, \theta_2] \in \mathbf{B}) \ge 1 - \beta.$$

Другими словами, если интервал входит в семейство, то с высокой вероятностью параметр принадлежит этому интервалу. Ими же были изучены односторонние доверительные интервалы. Вопрос двустороннего оценивания оставался открытым. В общем случае конструкция этих семейств слишком сложная (см. рис. на стр. 57), чтобы можно было рекомендовать их для практического использования. В диссертации Салимова Р.Ф. рассматривается нормально-нормальная модель, в которой сначала реализуется указанный способ (для этого пришлось провести тщательный анализ зависимости функции надежности семейства от значений достаточной статистики и некоторых характеристик семейства), а затем предлагается новый способ построения асимптотически оптимального семейства. При доказательстве применяется классический способ исследования скорости сходимости к нулю интегралов лапласовского типа.

В главе 3 для одной специфической вероятностной модели строятся оценки с заданной точностью (функция потерь типа 0-1 с двусторонними ограничениями) и надежностью (в d-апостериорном смысле) — выборка поступает из нормального закона с известной дисперсией; среднее значение — исследуемый параметр, который имеет априорное показательное распределение с "малой" величиной математического ожидания. Такая вероятностная модель пригодна для описания ситуаций, когда изначально известно, что выводной параметр положителен и мал (например, характеризующий содержание вредных веществ в пищевом продукте). Изначально планировалось сравнить три оценочные функции: а) байесовскую, б) с равномерно минимальным d-риском и в) универсальную последовательную оценку (здесь также остановка происходит, когда апостериорный риск байесовской оценки становится меньше заданных ограничений). Оценка с равномерно минимальным d-риском строится по схеме, зеркальной к байесовской оценке — оценка принимает то значение, для которого минимум апостериорного риска (по результатам наблюдений — не по решениям) достигается на полученных выборочных данных. К сожалению, для обеих функций потерь (с абсолютной и относительной ошибкой) не удалось доказать существование оценки с равномерно минимальным d-риском. Однако удалось показать, что универсальная последовательная гарантийная оценочная процедура всегда останавливается не позднее минимального необходимого числа наблюдений для байесовской оценки. Кроме того, удалось найти огибающую функцию для d-риска оценочных функций (на фиксированном числе наблюдений) и сравнить с ней риски классических оценок (байесовской и близкой к выборочному среднему). Также было замечено, что с точки зрения минимизации необходимого гарантийного объема выборки байесовские оценки эквивалентны оценкам с равномерно минимальным d-риском.

Диссертация написана хорошим литературным языком и почти не содержит опечаток. Есть и некоторые замечания.

1. На стр. 25 формулой (1.2) определяются d-апостериорные вероятности ошибок решающей функции. Они впоследствии именуются d-риском, хотя для понимания дальнейшего материала это название надо бы сообщить сразу же при написании формулы (1.2), как это сделано в статье [45], тексту которой во многом следует автор.

2. Доказательство теоремы 1.2 заканчивается формулировками и доказательствами лемм 1.3 и 1.4. Было бы уместно добавить завершающие слова о том как их использование влечет основной результат теоремы.

3. В работе встречаются случаи, когда используются некоторые символы без объяснений, что они обозначают. Это может приводить к недоразумениям. Так в первой главе на стр. 28 без объяснений используется символ X. Из последующего содержания становится ясно, что это случайная величина, одинаково распределенная с X_1. Однако во второй и третьей главах под X уже понимается выборка $X_1, ..., X_n$. На

стр. 46 используется обозначение $\overline{X}_n$, хотя ранее эта величина вводилась без нижнего индекса.

Отмеченные недочеты касаются только способа изложения результатов, они легко корректируются и не меняют общей положительной оценки диссертации.

Заключение. Представленная диссертация посвящена решению актуальных задач математической статистики. Она является самостоятельным законченным фундаментальным исследованием и соответствует специальности 01.01.05 — теория вероятностей и математическая статистика. Поставленные задачи полностью решены, доказательства теорем проведены на строгом математическом уровне. При получении большинства этих результатов автором продемонстрирована находчивость и изобретательность, свидетельствующие о несомненном наличии у него достаточно высокой математической квалификации. По теме диссертации автором опубликовано 8 работ, из них 2 в изданиях из перечня рецензируемых научных журналов ВАК, 3 статьи в международных журналах, индексируемых в базе данных WoS и Scopus. Научные положения, выносимые на защиту, достаточно полно отражены в опубликованных работах. Основные результаты диссертации докладывались на различных математических семинарах и конференциях. Автореферат полно и правильно отражает содержание диссертации.

Представленная диссертационная работа соответствует требованиям, предъявляемым к кандидатским диссертациям по специальности «01.01.05 — теория вероятностей и математическая статистика», а её автор, Салимов Рустем Фаридович, безусловно заслуживает присуждения ему степени кандидата физико-математических наук.

Результаты диссертации можно рекомендовать к использованию в исследованиях, проводимых в МГУ им. М. В. Ломоносова, МИ РАН им. В. А. Стеклова, СПОМИ РАН им. В. А. Стеклова, ИМ СО РАН им. С. Л. Соболева, Санкт-Петербургском и Новосибирском государственных университетах, в Казанском федеральном университете.

Основные результаты диссертации доложены автором в режиме онлайн на заседании семинара лаборатории теории вероятностей и математической статистики Института математики им. С.Л. Соболева 23 марта 2021 г., протокол № 1. Принято решение — одобрить положительный отзыв.

Заведующий лабораторией теории вероятностей
и математической статистики ИМ СО РАН
д.ф.-м.н., профессор В. И. Лотов

630090, г. Новосибирск, пр. Коптюга 4;
+7(913)-895-62-49; lotov@math.nsc.ru

Главный научный сотрудник лаборатории
теории вероятностей и математической статистики ИМ СО РАН
д.ф.-м.н., профессор А. И. Саханенко

630090, г. Новосибирск, пр. Коптюга 4;
+7(913)-462-30-99; aisakh@mail.ru

Подпись В. И. Лотова, А. И. Саханенко
удостоверяю
Зав. оргтотделом Н.З. Киндалева
ИМ СО РАН
«29» 03 2021 г.