На правах рукописи

Лобов Александр Андреевич

ВЕРШИННЫЕ И РЁБЕРНЫЕ РАСШИРЕНИЯ ГИПЕРКУБОВ

Специальность 1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург 2024

Работа выполнена на кафедре теоретических основ компьютерной безопасности и криптографии Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского»

Научный руководитель: **Абросимов Михаил Борисович**
д.ф.-м.н., доцент, заведующий кафедрой теоретических основ компьютерной безопасности и криптографии ФГБОУ ВО «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского»

Официальные оппоненты: **Пяткин Артём Валерьевич**
доктор физико-математических наук, профессор РАН, главный научный сотрудник Института математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения РАН

Пастор Алексей Владимирович
кандидат физико-математических наук, научный сотрудник Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова РАН

Ведущая организация: Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)»

Защита состоится 30 сентября в Санкт-Петербургском отделении Математического института им. В. А. Стеклова РАН на заседании диссертационного совета 24.1.207.01, расположенного по адресу: 191023, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки 27

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова РАН: https://pdmi.ras.ru

Автореферат разослан «___» _____________ 2024 г.

Учёный секретарь диссертационного совета 24.1.207.01 д.ф.-м.н. — Проскурин Николай Витальевич

Общая характеристика работы

Актуальность темы и степень её проработанности. В данной работе рассматриваются вершинные и рёберные k-расширения гиперкубов.

Граф G^* называется *вершинным k-расширением* (сокращённно В-k-Р) n-вершинного графа G, если G вкладывается в каждый граф, получающийся из G^* удалением k вершин.

Граф G^* называется *рёберным k-расширением* (сокращённно Р-k-Р) n-вершинного графа G, если G вкладывается в каждый граф, получающийся из G^* удалением k рёбер.

Под вложением понимается изоморфное вложение.

Задачи, связанные с исследованием вершинных и рёберных расширений берут своё начало с задачи построения вычислительной сети, устойчивой к отказу заданного количества элементов или связей.

Надёжность вычислительной системы является важным её свойством. В 1975 году Авиженис (A. Avižienis)[1] описал два способа повышения надёжности вычислительной системы:

1. Предотвращение ошибок. Заключается в уменьшении вероятности ошибки за счёт увеличения надёжности каждого элемента системы в отдельности, что оказывает влияние на всю систему.
2. Введение избыточных структур в систему так, чтобы придать ей отказоустойчивость. Под отказоустойчивостью подразумевается способность противостоять ошибке и возможность продолжать работу в присутствии этой ошибки. Отказоустойчивость подразделялась на два уровня:
   - 2.а. Полная отказоустойчивость – система продолжает работать в присутствии ошибок без существенной потери функциональных свойств.
   - 2.б. Амортизация отказов – система продолжает работать в присутствии ошибок с частичной деградацией функциональных возможностей.

Для задачи полной отказоустойчивости в 1976 году была предложена математическая модель исследования отказа элементов системы, основанная на графах[2]. Её назвали k-отказоустойчивостью (k-fault tolerance), и, впоследствии, k-узловой или k-вершинной отказоустойчивостью[3] (k-node fault tolerance). Также было введено понятие оптимальной k-отказоустойчивой реализации (optimal k-fault tolerant) – той, которая имеет наименьшее количество избыточных вершин и при этом среди всех таких реализаций имеет наименьшее количество рёбер. В системе выйти из строя может не только элемент, но и

1 Avižienis A. Fault-tolerance and fault-intolerance : Complementary approaches to reliable computing // Proc. Intern. Conf. on Reliable Software. – 1975. – P. 458-464.

2 Hayes J. P. A graph model for fault-tolerant computing system // IEEE Trans. Comput. – 1976. – Vol. 25. – № 9. – P. 875-884.

3 Harary F., Hayes J. P. Node fault tolerance in graphs // Networks. – 1996. – Vol. 27. – P. 19-23.

связь между элементами, поэтому позднее появилась модель k-рёберной отказоустойчивости[4] (k-edge fault tolerance).

В такой модели элементы системы представляются вершинами, а связи между ними – рёбрами в случае неориентированных графов и дугами в случае орграфов. Под отказом узла подразумевается удаление соответствующей ему вершины из графа. Под отказом связи – удаление из графа соответствующего ребра или дуги.

В дальнейшем было введено понятие *рёберных* и *вершинных k-расширений*. Упомянутые ранее оптимальные реализации в данной системе обозначений называются *минимальными*.

Если никакая собственная часть В-k-Р (Р-k-Р) G^* графа G не является В-k-Р (Р-k-Р), то G^* называется *неприводимым вершинным* (*рёберным*) *k-расширением* соответственно (сокращённо НВ-k-Р (НР-k-Р)). Другими словами, каждый граф, полученный удалением вершины или ребра из НВ-k-Р (НР-k-Р) G^*, не является В-k-Р (Р-k-Р) графа G. Минимальное расширение всегда является неприводимым (обратное в общем случае неверно).

У каждого графа G есть тривиальное вершинное k-расширение (ТВ-k-Р) $G+K_k$.

Известны результаты о МВ-k-Р и МР-k-Р n-вершинной цепи P_n. Для случая $k=1$ единственными МР-1-Р и МВ-1-Р цепи $P_n, n\geq 3$ являются циклы C_n и C_{n+1} соответственно. Для случая $k>1$ МР-k-Р и МВ-k-Р цепей являются МР-$(k-1)$-Р или МВ-$(k-1)$-Р циклов C_n и C_{n+1} соответственно.

Задача поиска МВ-k-Р и МР-k-Р в общем случае является сложной аналитической задачей. С алгоритмической точки зрения она также вычислительно сложна[5]. Развиваются способы решения задачи поиска МВ-k-Р и МР-k-Р графа с помощью вычислительных инструментов. Они могут дать возможность получить результаты, которые в некоторых случаях могут быть обобщены для целого класса графов.

Также следует учесть, что свойство «быть В-k-Р или Р-k-Р графа G» является инвариантом, поэтому достаточно рассматривать только по одному графу среди изоморфных. Для этого используются методы исключения изоморфных копий[6].

При поиске расширений обычно задаётся какое-либо множество графов, которое их содержит. Для построения графов из множества используются генераторы. Например, для построения МР-1-Р и МВ-1-Р циклов применялось построение попарно неизоморфных

4 Harary F., Hayes J. P. Edge fault tolerance in graphs // Networks. – 1993. – Vol. 23. – P. 135-142.
5 Абросимов М. Б. О сложности некоторых задач, связанных с расширениями графов // Математические заметки. – 2010. – Т. 88, № 5. – С. 643-650.
6 Brinkmann G. Isomorphism rejection in structure generation programs // Discrete Mathematical Chemistry, DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science. – 2000. – Vol. 51. – P. 25-38.

реализаций заданного вектора степеней[7]. В этой работе рассматривались циклы, для которых все МВ-1-Р имеют одинаковый вектор степеней. Это же справедливо и для МР-1-Р. В общем случае необходимо определить все вектора степеней, которые могут иметь минимальные расширения, найти все возможные графы с заданными векторами степеней и проверить их на соответствие расширению по определению (кратко – проверить на расширение).

В работах Судани Х. Х. К.[8] и Камила И. А. К.[9] исследовались алгоритмы, основанные на переборе суперграфов[10] с 1, 2, 3 и т. д. дополнительными рёбрами до тех пор, пока не найдётся нужное расширение графа. Для решения данной задачи был применён метод исключения изоморфных копий, который получилось применить при особом способе кодирования графа.

Граф G называется *суперграфом* графа H, если граф H является частью графа G.

Авторами были построены все МВ-1-Р для графов с числом вершин до 9 включительно и все МР-1-Р для графов с количеством вершин до 10 включительно и МР-2-Р, МР-3-Р и МР-4-Р для графов с количеством вершин, не превышающим 9.

Также рассматривались и цветные графы. Разумовский П. В.[11] предложил алгоритмы поиска расширений для цветных графов. Им же были получены расширения цветных звёздных графов и цветных полных графов.

Графы, для которых можно построить расширение программным способом с помощью рассмотренных ранее алгоритмов и программ, имеют небольшое число вершин, поэтому важны и теоретические исследования.

Киреева А. В.[12] исследовала функциональные графы, Курносова С. Г.[13] – объединения полных графов и полные бинарные деревья, Абросимов М. Б.[14] – предполные графы (n-вершинные графы, имеющие по крайней мере одну вершину степени $n-1$).

---

7 Сухов С. А., Абросимов М. Б., Бринкман Г. О количестве минимальных 1-расширений циклов с числом вершин до 26 и 28 // Компьютерные науки и информационные технологии : Материалы Международной научной конференции, Саратов, 30 июня – 02 2016 года – Саратов: ИЦ "Наука". – 2016. – С. 9-11.

8 Судани Х. Х. К. Модели и алгоритмы построения оптимальных рёберных отказоустойчивых реализаций вычислительных систем : дис. ... канд. техн. наук : 05.13.18 / Судани Хайдер Хуссейн Карим. – Томск: 2021. – 149 с.

9 Камил И. А. К. Методы и алгоритмы разработки вычислительных систем, устойчивых к отказам элементов, без проверки на изоморфизм : дис. ... канд. техн. наук : 05.13.18 / Камил Ихаб Абдулджаббар Камил. – Томск: 2021. – 121 с.

10 Лобов А. А., Камил И. А. К., Судани Х. Х. К., Абросимов М. Б. Построение всех неизоморфных суперграфов без проверки на изоморфизм // Прикладная дискретная математика. – 2020. – № 48, С.82-92.

11 Разумовский П. В., Абросимов М. Б. О поиске минимальных вершинных расширений цветного неориентированного графа // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2021. – № 4(60). – С. 106-117.

12 Киреева, А. В. Отказоустойчивость в функциональных графах / А.В. Киреева // Упорядоченные множества и решетки. – Саратов: Изд-во Сарат. Ун-та, 1995. – Вып. 11. – С. 32-38.

13 Курносова С. Г. Т-неприводимые расширения объединений полных графов // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2005. – Т. 5, вып. 1. – С. 107-115.

14 Абросимов М. Б. Минимальные k-расширения предполных графов // Известия высших учебных заведений. Математика. – 2003. – № 6. – С. 3-11.

Кабанов М. А.[15], Абросимов М. Б[16,17] и Комаров Д. Д.[18,19,20] рассматривали расширения деревьев особого вида.

Изучались также и расширения орграфов, например, Моденова О. В.[21,22] изучала расширения турниров, ориентаций цепей и циклов, а Гавриков А. В.[23] – расширения ориентаций графов специального вида.

Так как сама задача преимущественно связана с построением отказоустойчивых вычислительных систем, то объектом исследования обычно являются графы, которые описывают топологию таких систем. Например, циклы, многомерные решётки, торы и гиперкубы.

Изучались МР-*k*-Р и МВ-*k*-Р цикла[2,4,24], который является основой для топологии Token Ring. В целом, вопрос количества попарно неизоморфных МВ-*k*-Р и МР-*k*-Р цикла не решён, так как количество таких расширений достаточно велико и быстро растёт с увеличением количества вершин в цикле[7].

Декартовым произведением графов $G=(V,\alpha)$ и $H=(U,\beta)$ называется граф $G\times H=(W,\gamma)$, где $W=V\times U=\{(u,v)\mid u\in U\wedge v\in V\}$, $\gamma=\{((v_1,u_1),(v_2,u_2))\mid u_1,u_2\in U\wedge$ $\wedge v_1, v_2\in V\wedge(u_1=u_2\wedge(v_1,v_2)\in\alpha\vee v_1=v_2\wedge(u_1,u_2)\in\beta)\}$.

Графы $T_{n_1,\dots,n_d}=C_{n_1}\times\ldots\times C_{n_d}$ и $M_{n_1,\dots,n_d}=P_{n_1}\times\ldots\times P_{n_d}$ называются *d*-мерным тором и *d*-мерной решёткой соответственно.

Топологии *d*-мерных решёток и торов широко используются в проектировании коммуникационных сетей суперкомпьютеров.

15 Кабанов М. А. Об отказоустойчивых реализациях графов // Теоретические задачи информатики и ее приложений. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1997. – Вып.1. – С. 50-58.

16 Абросимов М. Б. О нижней оценке числа рёбер минимального рёберного 1-расширения сверхстройного дерева // Изв. Сарат. Ун-та. Нов. Сер. Сер.: Математика. Механика. Информатика. 2011. – Т. 11, вып. 3, ч. 2. – С. 111-117.

17 Абросимов М. Б. О числе дополнительных рёбер минимального вершинного 1-расширения сверхстройного дерева // Изв. Сарат. Ун-та. Нов. Сер. Сер.: Математика. Механика. Информатика. 2012. – Т. 12, вып. 2. – С. 103-113.

18 Комаров Д. Д. Минимальные рёберные расширения пальм // Изв. Сарат. Ун-та. Нов. Сер. Сер.: Математика. Механика. Информатика. 2013. – Т. 13, вып. 3. – С. 99-104.

19 Абросимов М. Б. О нижней оценке числа рёбер минимального рёберного 1-расширения сверхстройного дерева // Изв. Сарат. Ун-та. Нов. Сер. Сер.: Математика. Механика. Информатика. 2011. – Т. 11, вып. 3, ч. 2. – С. 111-117.

20 Абросимов М. Б. О числе дополнительных рёбер минимального вершинного 1-расширения сверхстройного дерева // Изв. Сарат. Ун-та. Нов. Сер. Сер.: Математика. Механика. Информатика. 2012. – Т. 12, вып. 2. – С. 103-113.

21 Моденова О. В. Абросимов М. Б. О точных оценках числа дополнительных дуг минимального вершинного 1-расширения турнира // Прикладная дискретная математика. Приложение. – 2015. – № 8. – С. 111-113.

22 Моденова О. В., Абросимов М. Б. О минимальных вершинных 1-расширениях ориентаций цепей // Прикладная дискретная математика. 2017. – № 38. – С. 89-94.

23 Гавриков А. В. Т-неприводимые расширения объединений некоторых типов орграфов // Прикладная дискретная математика. – 2013. – № 4 (22). – С. 47-56.

24 Sung T. Y., Ho T. Y., Chang C. P., Hsu L. H. Optimal k-fault-tolerance network for token rings // J. Inform. Science and Engineering. – 2000. – № 16. – P. 381-390.

Тор является Р-1-Р решётки соответствующей размерности[4], однако для решёток существует Р-1-Р с меньшим числом дополнительных рёбер[25].

Граф $C_N(S)=(\{0,1,\ldots,N-1\},\{\{u,v\} \mid (\exists i\in S)|u-v|\equiv i(mod N)\})$ называется *циркулянтным*.

Для произвольного циркулянтного графа существует другой циркулянтный граф, который является его В-k-Р[26]. Циркулянтный граф интересен тем, что он является симметричным (все вершины подобны).

Для d-мерных решёток была представлена[27] схема построения В-k-Р, которое является циркулянтным графом $C_{2^d+k}(S)$, где $S=\bigcup_{i\in\{1,2,2^2,\ldots,2^{d-1}\}}\{i,i+1,\ldots,i+\lfloor\frac{k}{2}\rfloor\}$.

Каравай М. Ф. в своих работах[28,29] применял похожий способ построения В-1-Р, который для произвольного n-вершинного графа $G=(\{v_1,\ldots,v_n\},\alpha)$ заключается в объединении графов $G^*=G^0\cup\ldots\cup G^n$. Считается, что $G^i=\varphi_i(G)$, где $\varphi_i(v_j)=\begin{cases}v_j, & \text{если } j>i\\ v_{j-1}, & \text{иначе}\end{cases}$

В данном случае очень легко найти вложение. При удалении вершины v_i отображение φ_i является вложением. Данный способ построения расширений применялся к различным классам графов, в том числе к решёткам и торам. Расширения, которые получаются при применении данного метода, не всегда являются минимальными.

Под *действием* или *применением инъективного отображения* $\varphi: V\rightarrow U$ к графу $G=(V,\alpha)$ будем подразумевать операцию получения другого графа $\varphi(G)=H=(Im_\varphi,\beta)$, где Im_φ – это множество образов, а β определяется следующим образом: $\beta=\{(\varphi(v_1),\varphi(v_2)) \mid (v_1,v_2)\in\alpha\}$. При этом, очевидно, полученный граф H будет изоморфен графу G.

N-мерным гиперкубом или, кратко, *N-кубом* является граф $Q_N=\{V=\{0,1\}^N, \alpha=\{\{u,v\} \mid h(u,v)=1\}$, где h – расстояние Хемминга (количество различных позиций, в которых отличаются два вектора одной длины). То есть V – это

25 Ray-Shung C., Lih-Hsing H. 1-edge fault-tolerant designs for meshes // Parallel Processing Letters. – 1994. – Vol. 4 No. 4, P. 385-389.

26 Shantanu D., Hayes J. P. Designing fault-tolerant systems using automorphisms // Journal of Parallel and Distributed Computing 12(3). – 1991. – 12(3). – P. 249-268.

27 Bruck J., Cypher R., Ho C.-T. Fault-Tolerant Meshes and Hypercubes with Minimal Numbers of Spares // IEEE Transactions on computers. – 1993. – Vol. 42, №. 9. – P. 1089-1104.

28 Каравай М. Ф. Минимизированное вложение произвольных гамильтоновых графов в отказоустойчивый граф и реконфигурация при отказах. I. Одно-отказоустойчивые структуры // Автоматика и телемеханика. – 2004. – № 12. – С. 159-177.

29 Каравай М. Ф. Минимизированное вложение произвольных гамильтоновых графов в отказоустойчивый граф и реконфигурация при отказах. II. Решетки и k-отказоустойчивость // Автоматика и телемеханика. – 2005. – № 2. – С. 175-189.

множество всех возможных векторов длины *N*, элементами которого являются 0 и 1, а ребро между двумя вершинами ставится только в том случае, если метки вершин отличаются ровно в одной позиции.

Топология гиперкуба широко используется в построении суперкомпьютеров. С начала 1997 года до середины 2003 года по крайней мере 10 суперкомпьютеров из рейтинга 500 самых мощных суперкомпьютеров имели топологию гиперкуба. Данную топологию использовали в своих решениях компании nCUBE и Intel (iPSC/860). В настоящий момент в связи с ростом числа узлов в суперкомпьютерах чаще применяются его производные: обобщённый гиперкуб и расширенный обобщённый гиперкуб[30], основанный на использовании квазиполных графов.

Несмотря на это, по состоянию на ноябрь 2022 года в списке 500 мощнейших суперкомпьютеров на 117 месте присутствует суперкомпьютер EAGLE с топологией 8-куба, запущенный в 2018 году[31].

N-куб состоит из двух $(N-1)$-кубов, у которых соответствующие вершины соединены, поэтому *N*-куб также можно задать следующим способом: $Q_N = Q_{N-1} \times P_2$.

Следует отметить, что *N*-куб является *N*-мерным тором $Q_N = T_{2,2,\ldots,2}$ и *N*-мерной решёткой $Q_N = M_{2,2,\ldots,2}$, поэтому к нему можно применить имеющиеся результаты для данных классов графов.

Была представлена схема построения В-*k*-Р для циркулянтного графа, которую применили для *N*-куба[26]. После данная схема была улучшена[27], но при этом в полученных по схеме расширениях для гиперкуба дополнительных рёбер больше, чем в ТВ-*k*-Р.

Также было описано МР-1-Р гиперкуба[4], которое совпало с появившейся позднее схемой построения Р-1-Р многомерных решёток[25].

Целью данной работы является исследование вершинных и рёберных расширений гиперкубов. Особый интерес представляют следующие задачи:

1. Поиск В-*k*-Р гиперкубов с числом рёбер меньше, чем у ТВ-*k*-Р.
2. Определение единственности МР-1-Р гиперкубов.
3. Поиск МР-*k*-Р и Р-*k*-Р гиперкубов для $k > 1$.

Результаты, выносимые на защиту:

1. Найдена схема построения В-1-Р и В-2-Р с количеством рёбер на 1 и 2 меньше, чем у ТВ-1-Р и ТВ-2-Р соответственно, которая применима к почти всем двудольным графам.

---

30 Каравай М. Ф., Подлазов В. С. Расширенный обобщенный гиперкуб как отказоустойчивая системная сеть для многопроцессорных систем // Управление большими системами: сборник трудов. – 2013. – № 45. – С. 344-371.

31 Meuer H., Strohmaier E., Dongarra J., Simon H. TOP 500 The List [Электронный ресурс] URL: https://www.top500.org (дата обращения 26.03.2023)

2. Описаны все возможные попарно неизоморфные В-1-Р и В-2-Р для гиперкубов, которые могут быть построены по данным схемам, доказано, что построенные по предложенной схеме В-1-Р являются неприводимыми.
3. Доказана единственность МР-1-Р гиперкубов.
4. Предложены способы кодирования графа, которые позволяют использовать метод канонического представителя для исключения изоморфных копий при построении суперграфов и частей графа, а также производный от него метод Рида-Фараджева.
5. Предложен алгоритм построения МВ-*k*-Р на основе объединения графов.

Научная новизна. Все выносимые на защиту результаты являются новыми.

Теоретическая и практическая значимость. Результаты имеют в основном теоретический характер. Реализованные программы для ЭВМ, основанные на описанных в данной работе алгоритмах, можно использовать для построения отказоустойчивых вычислительных систем и суперграфов и частей заданного графа.

Степень достоверности и апробация работы. Было принято участие в следующих конференциях:

1. VIII Международная научная конференция «Компьютерные науки и информационные технологии» памяти А. М. Богомолова, СГУ, Саратов, 2018.
2. Международная конференция «Ломоносов-2018», МГУ, Москва, 2018.
3. 17-я международная конференция «Сибирская научная школа-семинар «Компьютерная безопасность и криптография»» Sibecrypt'18, Томск, 2018.
4. XIII Международный семинар «Дискретная математика и её приложения» имени академика О.Б. Лупанова, МГУ, Москва, 2019.
5. 18-я международная конференция «Сибирская научная школа-семинар «Компьютерная безопасность и криптография»» Sibecrypt'19, Томск, 2019.
6. Международная конференция «Ломоносов-2021», МГУ, Москва, 2021.
7. IX Международная научная конференция «Компьютерные науки и информационные технологии» памяти А. М. Богомолова, СГУ, Саратов, 2021.
8. 21-я международная конференция «Сибирская научная школа-семинар «Компьютерная безопасность и криптография»» имени Г. П. Агибалова Sibecrypt'22, Красноярск, 2022.

Публикации. По теме диссертации было опубликовано 17 работ, из которых **7** выпущены в изданиях из списка **ВАК** (все в журналах категории К1), 12 входят в РИНЦ, 2 свидетельства о регистрации программы для ЭВМ.

Личный вклад. Все выносимые на защиту результаты получены соискателем лично.

Научному руководителю Абросимову М. Б. принадлежит постановка темы диссертации и участие в проверке и корректировке статей.

Следует конкретизировать вклад автора в 4-х статьях с соавторами, отличными от научного руководителя:

В статье «Построение всех неизоморфных минимальных вершинных расширений графа методом канонических представителей» автору принадлежат результаты, касающиеся способа кодирования графа, при котором возможно построение суперграфов с применением техник построения графов без проверки на изоморфизм.

В статье «Построение минимальных вершинных расширений графа методом Рида-Фараджева» автору принадлежат результаты, связанные со способом кодирования графа и деревом кодов, позволяющем применять технику исключения изоморфных копий Рида-Фараджева при построении суперграфов.

В статье «Построение минимальных рёберных расширений графа без проверки на изоморфизм» результатом автора является способ построения суперграфов без проверки на изоморфизм. В данной статье указывается на возможность использования данных наработок для решения задачи построения минимальных рёберных расширений графа.

В статье «Построение всех неизоморфных суперграфов без проверки на изоморфизм» результатом автора является описание способа построения суперграфов. Фактически, статья объединяет все предыдущие наработки, касающиеся данной темы.

То есть основные результаты автора были связаны со способом кодирования графов, позволяющий строить суперграфы и вопросы, непосредственно связанные с их построением.

В программе FTConstructor автор занимался разработкой кода, связанного с проверкой графа на каноничность, и вспомогательными утилитами.

Код программы Supgeng был написан автором полностью.

Объем и структура работы. Работа состоит из введения, трёх глав, заключения, списка литературы и двух приложений.

В приложениях представлены свидетельства о регистрации двух программ для ЭВМ.

Объём работы – 112 страниц, 84 использованных источника, 29 рисунков и 1 таблица.

Краткое содержание работы

В первой главе «Вершинные расширения гиперкубов» представлены теоретические результаты, полученные при поиске схем построения вершинных расширений гиперкубов.

В разделе 1.1 определены классы *k*-слойных графов L_k. Граф называется *k*-слойным, если существует такая его вершинная раскраска c в k цветов $(0,1,\ldots,k-1)$, что для каждого ребра $\{u,v\}$ выполняется $|c(u)-c(v)|=1$, при этом для каждого цвета есть хотя бы одна вершина, окрашенная в этот цвет.

Классы данных графов при $k \geq 2$ образуют иерархию над множеством двудольных графов. Особо выделен класс 4-слойных графов. Был найден критерий 4-слойного графа: двудольный граф $G=(V \cup U, \alpha)$, где U и V – доли графа, является 4-слойным тогда и только тогда, когда количество вершин в нём не меньше 4 и $(\exists u \in U)(\exists v \in V)\{u, v\} \notin \alpha$.

<u>**В разделе 1.2**</u> представлены теоремы 1 и 2, описывающие и обосновывающие схемы построения В-1-Р и В-2-Р 4-слойных графов, среди которых присутствуют и N-кубы при $N > 2$.

Теорема 1 (О В-1-Р 4-слойных графов)**.** Пусть дан двудольный n-вершинный граф $G=(W, \alpha)$ ($n \geq 4$) с долями U и V, в котором есть две несмежные вершины $u \in U$, $v \in V$ (вершины u и v будем называть опорными). Тогда граф $G^*=(W^*, \alpha^*)=(W \cup \{w\}, \alpha \cup \beta \cup \delta_u \cup \delta_v \cup \mu)$ является В-1-Р графа G, где $|a^*|-|a|=n-1$, а множества $\beta, \delta_u, \delta_v$ и η определяются так: $\beta = \left\{\{w, x\} | x \in N_v \cup N_u\right\}$, $\delta_u = \left\{\{u, x\} | x \in V \setminus N_u \setminus \{v\}\right\}$, $\delta_v = \left\{\{v, x\} | x \in U \setminus N_v \setminus \{u\}\right\}$ и $\mu = \left\{\{u, v\}\right\}$.

Теорема 2 (О В-2-Р 4-слойных графов). Пусть дан двудольный n-вершинный граф $G=(W, \alpha)$ ($n>3$) с долями U и V и две несмежные вершины $u \in U$ и $v \in V$. Тогда граф $G^*=(W^*, \alpha^*)=\left(W \cup \{w_u, w_v\}, \alpha \cup \beta_v \cup \beta_u \cup \delta_u \cup \delta_v \cup \eta\right)$ является В-2-Р графа G, где $\beta_v=\left\{\{w_v, x\} \mid x \in N_v \cup V\right\}$, $\beta_u=\left\{\{w_u, x\} \mid x \in N_u \cup U\right\}$, $\delta_u=\left\{\{u, x\} \mid x \in V \setminus N_u \setminus \{v\}\right\}$, $\delta_v=\left\{\{v, x\} \mid x \in U \setminus N_v \setminus \{u\}\right\}$ и $\eta=\left\{\{u, v\}\right\}$.

В теоремах 3 и 4 определено точное количество попарно неизоморфных В-1-Р и В-2-Р для N-куба, которые могут быть построены по теоремам 1 и 2 соответственно.

Теорема 3 (О количестве неизоморфных В-1-Р гиперкуба, построенных по схеме из теоремы 1). Количество неизоморфных В-1-Р N-куба, построенных по теореме 1, равно $\left\lfloor \frac{N-1}{2} \right\rfloor$.

Теорема 4 (О количестве неизоморфных В-2-Р гиперкуба, построенных по схеме из теоремы 2). Количество неизоморфных В-2-Р N-куба, построенных по теореме 2, равно $\left\lfloor \frac{N-1}{2} \right\rfloor$.

По теореме 5 В-1-Р являются неприводимыми.

Теорема 5 (О неприводимости В-1-Р гиперкуба). В-1-Р N-куба, построенные по схеме из теоремы 1, являются неприводимыми.

Во второй главе «Рёберные расширения гиперкубов» представлены теоретические результаты по рёберным расширениям гиперкубов. Описано известное МР-1-Р N-куба, и приведено доказательство его минимальности.

В разделе 2.1 показано, что данное МР-1-Р N-куба является единственным с точностью до изоморфизма (теорема 6).

Теорема 6 (О единственности МР-1-Р гиперкуба). При $N \geq 2$ N-куб имеет единственное с точностью до изоморфизма МР-1-Р.

В разделе 2.2 выдвинуто следующее предположение о некоторых МР-k-Р для N-куба:

Предположение 1 (о регулярных МР-k-Р гиперкубов). Графы вида $Q_N^{1, i_1, \ldots, i_t}$ являются МР-k-Р для $k = C_N^{i_1} + \ldots + C_N^{i_t}$.

В третьей главе «Алгоритмы построения расширений» описаны алгоритмы, которые были использованы для построения МВ-k-Р и МР-k-Р.

В разделе 3.1 показывается, что при поиске расширений область поиска может быть ограничена только суперграфами.

В разделе 3.2 описано 2 способа кодирования графа и доказано, что с их помощью можно применять техники исключения изоморфных копий без проверки на изоморфизм для решения задачи построения попарно неизоморфных частей графа и его суперграфов.

В разделе 3.3 в **подразделах 3.3.1** и **3.3.2** описаны 2 способа организации в дерево основанных на матрицах смежности кодов n-вершинных графов, и показано, что в них будет присутствовать поддерево максимальных или минимальных кодов (теорема 7 и теорема 8).

Теорема 7 (О поддереве максимальных кодов). Если $x_1 \ldots x_{k-1} \mathbf{1} 0 \ldots 0$ является максимальным матричным кодом, то его родительский элемент $x_1 \ldots x_{k-1} \mathbf{0} 0 \ldots 0$ также является максимальным матричным кодом.

Теорема 8 (Связь максимального матричного кода графа и минимального матричного кода его дополнения). Побитовая инверсия максимального матричного кода графа G равна минимальному матричному коду дополнения графа G.

Теорема 8 показывает, что задача построения частей графа может быть выражена через задачу построения суперграфов его дополнения и наоборот, что описано в следствии данной теоремы. То есть справедливо:

Следствие. Функцию построения минимального матричного кода можно реализовать через функцию построения минимального матричного кода, побитовой инверсии и дополнения графа: $C_{min}(G)=\overline{C_{max}(\bar{G})}$. Аналогично с максимальным матричным кодом: $C_{max}(G)=\overline{C_{min}(\bar{G})}$.

<u>**В подразделе 3.3.3**</u> описаны 2 алгоритма для решения задач построения суперграфов (алгоритм 2) и частей графа (алгоритм 3) на основе обхода дерева максимальных и минимальных матричных кодов соответственно.

<u>**В разделе 3.4**</u> представлен алгоритм 4 «Построение сочетаний с ограничениями» и показана корректность алгоритма.

Идея алгоритма основана на том, что все расширения удовлетворяют известному ограничению на минимальную степень вершины. Некоторые вершины графа имеют степень меньше минимально возможной в расширении, например, на *t*. Это значит, что в расширении должны присутствовать как минимум *t* рёбер из множества *A* тех рёбер, которые к ней можно добавить, то есть формируется условие: в результирующем наборе дополнительных рёбер должно быть *t* рёбер из множества *A*. Так формируется набор условий, которые должны быть выполнены. Алгоритм решает именно данную задачу.

<u>**В разделе 3.5**</u> описан алгоритм 5 «Построение МВ-*k*-Р методом объединения изоморфных графов» и способ оптимизации данного метода.

<u>**В разделе 3.6**</u> описаны результаты проведённых вычислительных экспериментов:

1. 4-куб имеет единственное МВ-1-Р, изоморфное тому, что может быть построено по теореме 1.
2. 3-куб имеет 1 МВ-1-Р, изоморфное тому, что может быть получено по схеме из теоремы 3, 2 МВ-2-Р, одно из которых изоморфно построенному по теореме 2, и 3 МВ-3-Р.
3. 3-куб имеет единственные МР-1-Р, МР-2-Р, МР-3-Р и МР-4-Р.
4. Были проверены все графы, которые по предположению 1 могут быть МР-*k*-Р 4-куба. Все из них оказались МР-*k*-Р гиперкуба за исключением одного графа $Q_4^{1,3,4}$.
5. Путём приведения графов получены МР-3-Р и НР-2-Р 4-куба.

<u>**В заключении**</u> приведены основные результаты работы: для *N*-куба найдены схемы построения НВ-1-Р и В-2-Р, доказана единственность МР-1-Р. Также представлены результаты вычислительных экспериментов, и описаны возможные дальнейшие направления для исследования.

Публикации по теме диссертации

Публикации в рекомендованных ВАК изданиях

1. **Лобов, А. А.** Построение всех неизоморфных минимальных вершинных расширений графа методом канонических представителей / М. Б. Абросимов, И. А. К. Камил, **А. А. Лобов** // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. – 2019. – Т. 19, № 4. – С. 479-486.
2. **Лобов, А. А.** Построение всех неизоморфных суперграфов без проверки на изоморфизм / **А. А. Лобов**, И. А. К. Камил, Х. Х. К. Судани, М. Б. Абросимов // Прикладная дискретная математика. – 2020. – № 48. − С. 82–92.
3. **Лобов, А. А.** Построение минимальных рёберных расширений графа без проверки на изоморфизм / **А. А. Лобов**, Х. Х. К. Судани, М. Б. Абросимов, // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2020. – Т. 20, вып. 1. – С. 105-115.
4. **Лобов, А. А.** Вершинные расширения 4-слойных графов и гиперкубов / **А. А. Лобов**, М. Б. Абросимов // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. – 2022. – Т. 22, № 4. – С. 536-548.
5. **Лобов, А. А**. О единственности минимального рёберного 1-расширения гиперкуба Q4 / **А. А. Лобов**, М. Б. Абросимов // Прикладная дискретная математика. – 2022. – № 58. – С. 84-93.
6. **Лобов, А. А.** Построение минимальных вершинных расширений графа методом Рида-Фараджева / И. А. К. Камил, М. Б. Абросимов, **А. А. Лобов** // International Journal of Open Information Technologies. – 2020. – Т. 8, №.4. − С. 54–58.
7. **Лобов, А. А.** Единственность минимального рёберного 1-расширения гиперкубов / **А. А. Лобов** // International Journal of Open Information Technologies. – 2023. – Т. 11, №. 9. – С. 28-32.

Прочие публикации, входящие в РИНЦ

8. **Лобов, А. А.** О вершинном 1-расширении гиперкуба / **А. А. Лобов**, М. Б. Абросимов // Компьютерные науки и информационные технологии : Материалы Международной научной конференции, Саратов, 02–03 июля 2018 года. – Саратов: ИЦ "Наука". – 2018. – С. 249-251.
9. **Лобов, А. А.** О минимальном рёберном 1-расширении гиперкуба / **А. А. Лобов**, М. Б. Абросимов // Прикладная дискретная математика. Приложение. – 2018. – № 11. – С. 109-111.

10. **Лобов, А. А.** Построение минимальных расширений графа методом канонических представителей / **А. А. Лобов**, И. А. К. Камил, Х. Х. К. Судани, М. Б. Абросимов // Прикладная дискретная математика. Приложение. – 2019. – № 12. С. 179-182.
11. **Лобов, А. А.** О вершинных 2-расширениях 4-слойных графов / М. Б. Абросимов, **Лобов А. А.** // Компьютерные науки и информационные технологии : Материалы Междунар. науч. конф. – Саратов : Издат. центр «Наука», 2021. – С. 97-99.
12. **Лобов, А. А.** О единственности минимального рёберного 1-расширения гиперкуба / **А. А. Лобов**, М. Б. Абросимов // Прикладная дискретная математика. Приложение. – 2022. – № 15. – С. 110-112.

Публикации, не входящие в РИНЦ

13. **Лобов, А. А.** Оценка количества дополнительных рёбер в минимальном вершинном 1-расширении подкласса двудольных графов [Электронный ресурс] / Материалы Международного молодежного научного форума 1 «ЛОМОНОСОВ-2018» – Отв. ред. И. А. Алешковский, А. В. Андриянов, Е. А. Антипов. – М.: МАКС Пресс, 2018. – 1 электрон. опт. диск (DVD-ROM); 12 см. – Систем. требования: ПК с процессором 486+; Windows 95; дисковод DVD-ROM; Adobe Acrobat Reader. – 1450 Мб. – 11000 экз. ISBN 978-5-317-05800-5.
14. **Лобов, А. А.** О генерации графов, содержащих заданный подграф / **А. А. Лобов**, М. Б. Абросимов // Материалы XIII Международного семинара «Дискретная математика и её приложения», имени академика О. Б. Лупанова (Москва, МГУ, 17-22 июня 2019 г.) / Под редакцией О. М. Касим-Заде. – М.: Изд-во МГУ, 2019. – С. 223-226.
15. **Лобов, А. А.** О вершинном 1-расширении некоторых торов [Электронный ресурс] / Материалы Международного молодежного научного форума 2 «ЛОМОНОСОВ-2021». – Отв. ред. И. А. Алешковский, А. В. Андриянов, Е. А. Антипов, Е. И. Зимакова // М.: МАКС Пресс, 2021. – М.: МАКС Пресс, 2021. – 1 электрон. опт. диск (DVD-ROM) 12 см. – 2000 экз. ISBN 978-5-317-06593-5.

Свидетельства о регистрации программы для ЭВМ

16. **Лобов А. А.**, Абросимов М. Б. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2020610497 Российская Федерация. GenSupg : № 2019666671 – заявл. 19.12.2019 : опубл. 15.01.2020.
17. **Лобов А. А.**, Камил И. А. К., Судани Х. Х. К., Абросимов М. Б. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2020614773 Российская Федерация. Построение оптимальных отказоустойчивых реализаций графов FTConstructor : № 2020612581 – заявл. 10.03.2020 : опубл. 24.04.2020.