

САНКТ–ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Горшанова Анастасия

Некоторые вопросы аппроксимации системами всплесков

Специальность 1.1.1 —
«Вещественный, комплексный и функциональный анализ»

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико–математических наук

Санкт-Петербург — 2026

Работа выполнена на кафедре математического анализа ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет».

Научный руководитель: доктор физико-математических наук
Лебедева Елена Александровна
ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский
государственный университет»,
профессор кафедры математического анализа

Официальные оппоненты: **Фарков Юрий Анатольевич**
доктор физико-математических наук, профессор,
профессор кафедры прикладных информационных технологий
ФГБОУ ВО «Российская академия народного хозяйства
и государственной службы при Президенте Российской Федерации»

Лукомский Сергей Фёдорович
доктор физико-математических наук, профессор,
профессор кафедры математического анализа ФГБОУ ВО
«Саратовский национальный исследовательский государственный
университет имени Н.Г. Чернышевского»

Ведущая организация: ФГАОУ ВО «Самарский национальный исследовательский
университет имени академика С.П. Королева»

Защита диссертации состоится “___” _____ 2026 года в ___ часов на заседании диссертационного совета 24.1.207.02 в Санкт-Петербургском отделении Математического института им. В.А.Стеклова РАН по адресу: 191023, г. Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, д. 27.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ФГБУН Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН и на сайте <https://www.pdmi.ras.ru/pdmi/diss-council-24.1.207.02/>.

Автореферат разослан “___” _____ 2026 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета
кандидат физико-
математических наук,

Рядовкин Кирилл Сергеевич

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. Теория аппроксимации является классическим разделом теории функций, активно дополняемым новыми результатами и по сей день. Аппроксимация различными системами функций и, в частности системами всплесков — один из основных методов решения задач, возникающих при обработке сигналов, работе с изображениями, сжатии и архивировании файлов данных.

Теория всплесков возникла из практических задач обработки сигналов в 80-ые годы 20-го века и активно развивалась в последующие годы в том числе благодаря их применению в различных инженерных задачах, в частности в нейронных сетях, а также в задачах математической физики, аппроксимации и интерполяции функций.

Для функций, заданных на вещественной прямой, вопросы сходимости разложений по системе всплесков хорошо изучены различными авторами. Уже в монографии И. Мейера [30] 1992 года, ставшей классической (см. также работу Г. Вальтера [36] 1995 года) изучались ортонормированные базисы всплесков и их сходимость при условии r -регулярности всплесковых функций. В 1994 году в работе [24] С.Е. Келли, М.А. Кона и Л.А. Рафаэля появились результаты о сходимости ортогональных систем всплесков на прямой при условии существования чётной, ограниченной, суммируемой, убывающей на $[0, +\infty)$ мажоранты. При аналогичных условиях в 2005 году в монографии [9] И.Я. Новиковым, В.Ю. Протасовым и М.А. Скопиной получены оценки в терминах модулей непрерывности для разложений по системам всплесков не только для непериодических систем на прямой, но и для периодических всплесков, порождённых двоичными сжатиями и сдвигами непериодической функции (стационарная система всплесков). Наиболее общие результаты о сходимости приближений непериодических функций квази-проекционными операторами в пространствах $L_p(\mathbb{R})$ и почти всюду, для которых системы всплесков являются частным случаем, были описаны в работе [35] О.Л. Виноградова 2021 года. Аппроксимационные свойства периодических квази-проекционных операторов изучались, например, в статье [26] Ю. Коломойцева, А.В. Кривошеина и М.А. Скопиной 2020 года.

В главе 1 диссертации исследуются аппроксимационные свойства периодических нестационарных систем всплесков. В частности, для характеристики свойств аппроксимации получена прямая теорема типа Джексона. В классической теореме Джексона о приближении тригонометрическими полиномами для характеристики погрешности приближения используется наилучшее приближение функции тригонометрическими полиномами $E_N(f)$. Неравенство вида $E_N(f) \leq C \cdot \omega_r(f, 1/N)$, где наилучшее приближение оценивается сверху модулем непрерывности ω_r с некоторой константой C , называется неравенством Джексона. В дальнейшем были получены аналоги неравенства Джексона для различных пространств и приближающих систем функций. Соответствующие теоремы называют *прямыми теоремами типа Джексона*. Утверждения, доказывающие обратное неравенство, в котором модуль непрерывности оценивается сверху с помощью наилучшего приближения, получили название *обратные теоремы*. Прямые и обратные теоремы типа Джексона широко распространены в теории аппроксимации и позволяют выявить взаимосвязь между

структурными свойствами функции (её гладкостью), от которых зависит величина модуля непрерывности, и её конструктивными свойствами, которые характеризуются поведением её наилучших приближений.

Литература по этому вопросу поистине необозрима. Упомянем в качестве примера только монографии [11] А.Ф. Тимана 1960 года, [6] Н.И. Ахиезера 1965 года, [8] В.В. Жукка 1982 года, [34] Р.М. Тригуба и Е.С. Белинского 2004 года. Если говорить о результатах именно для систем всплесков, то в статье [13] П.А. Андриановым и М.А. Скопиной были доказаны неравенства Джексона для периодизированных сепарабельных многомерных всплеск-систем Хаара. Прямые и обратные теоремы для произвольных одномерных систем периодических всплесков, полученных с помощью периодизации непериодической всплеск-функции и образующих ортонормированный базис, были описаны в [9]. Развивая идеи [9], в главе 1 диссертации получено описание аппроксимационных свойств биортогональных базисов периодических нестационарных систем всплесков в пространствах L_p , $p \in [1, +\infty)$, и пространстве непрерывных функций. Результат представляет собой прямую теорему типа Джексона, но в отличие от результатов [9] для периодических базисов всплесков, в данной теореме не требуется наличие мажоранты, а система всплесков может не иметь порождающей её непериодической функции (то есть является нестационарной системой). Так же в главе 1 приведены аналоги прямой теоремы с ослаблением условий на гладкость всплесковых функций.

Наряду с ортогональными базисами всплесков в пространствах Лебега L_2 так же в качестве аппарата приближения используются фреймы всплесков. В отличие от базисов фреймы могут быть избыточными системами. Однако они всегда полны и обеспечивают стабильное восстановление. Характеризация фрейма всплесков для непериодических функций при различных предположениях на всплесковые генераторы описана в работах и монографии [9, 15, 22, 28] П.-Г. Лемарье, И. Добеши, Г. Грипенберга, И.Я. Новикова, В.Ю. Протасова и М.А. Скопиной. Данные критерии сложно применять для построения конкретных примеров фреймов всплесков. Поэтому основным инструментом здесь является унитарный принцип расширения, предложенный А. Роном и З. Шеном в работе [31] для непериодического случая и позже адаптированный для периодических функций в статьях [14, 19, 20] О. Кристенсена, С.С. Гоха, Б. Хана, З. Шена и К.М. Тео. В работе [16] И. Добеши, Б. Хана, А. Рона и З.Шена был предложен более гибкий и, на первый взгляд, более общий способ построения фреймов всплесков, известный как скошенный принцип расширения, однако в этой же работе доказывалось, что оба принципа эквивалентны, и скошенный принцип расширения дает лишь иную, иногда более удобную форму для применения унитарного принципа. При этом унитарный принцип расширения дает только достаточное условие фреймовости. В главе 2 получен конструктивный критерий фреймовости, позволяющий строить фреймы Парсевала всплесков. Его аналоги в непериодической постановке задачи неизвестны.

Для оценки аппроксимационных свойств фреймов всплесков применяются различные подходы. В частности, для этого используется понятие порядка аппроксимации. Для си-

стем фреймов многомерных непериодических всплесков в $L_2(\mathbb{R}^d)$ в статье [16] описаны их аппроксимационные свойства в терминах порядков аппроксимации фреймом и соответствующим ему кратномасштабным анализом. Для систем периодических фреймов всплесков, построенных с помощью унитарного принципа расширения, определение порядка аппроксимации появилось в статье [19] С.С. Гоха, Б. Хана и З. Шена 2011 года. В этой же статье для периодических фреймов всплесков были установлены необходимые и достаточные условия, при которых фрейм Парсевала имеет заданный порядок аппроксимации фреймом. Аналогичные условия для непериодических фреймов всплесков можно найти в статье [23]. В главе 2 в терминах порядков аппроксимации исследуются аппроксимационные свойства периодических фреймов Парсевала всплесков, построенных с помощью критерия фреймовости. Получен аналог критерия о достижении заданного порядка аппроксимации фреймом. Благодаря способу построения фрейма удалось избавиться от дополнительного условия для масштабирующих функций, присутствующего в теоремах [19]. Так же для периодических фреймов всплесков удалось установить взаимосвязь между порядком аппроксимации фреймом и порядком аппроксимации периодических кратномасштабным анализом. Ранее взаимосвязь между этими величинами была известна лишь для непериодических фреймов (см. [16]).

Для диадических систем всплесков на положительной полупрямой, или на языке групп, для всплесков на локально компактных группах Кантора, аппроксимационные свойства в диадических аналогах пространств Соболева изучались Ю.А. Фарковым, Е.А. Лебедевой, М.А. Скопиной в работе [18]. В статье С.Ф. Лукомского [29] исследовались аппроксимационные свойства диадических фреймов Парсевала всплесков в весовых пространствах Соболева с логарифмическими весами. В этих статьях изучается только L_2 -сходимость. В главе 3 диссертации для диадических фреймов всплесков доказана сходимость разложений почти всюду и в пространствах $L_p(\mathbb{R}_+)$, $p \in (1, \infty)$. При этом сходимость получена за счёт особенности групповой операции для диадических функций и не требует дополнительных условий на гладкость или наличия суммируемой мажоранты. В то время, как эти условия лежат в основе соответствующих теорем для систем всплесков на прямой (см. [9, 15, 22, 28]).

Цель диссертационной работы. Основной целью данной диссертационной работы является исследование аппроксимационных свойств периодических систем всплесков, которые образуют базис или фрейм Парсевала, и аппроксимационных свойств систем диадических всплесков. А также изучение вопроса построения периодических фреймов всплесков.

Основные результаты. К основным положениям работы можно отнести следующие результаты.

1. Получена прямая теорема типа Джексона для нестационарных систем периодических всплесков, образующих биортогональные базисы в пространствах Лебега и пространстве непрерывных функций.
2. Получены конструктивные необходимые и достаточные условия, при которых систе-

ма периодических всплесков образует фрейм Парсевала в пространстве Лебега L_2 . Критерий может использоваться непосредственно для построения фрейма Парсевала всплесков. Для построенных таким образом фреймов всплесков получены необходимые и достаточные условия, при которых периодический фрейм Парсевала всплесков имеет заданный порядок аппроксимации фреймом. Выявлена взаимосвязь и условия совпадения порядка аппроксимации фреймом и порядка аппроксимации периодическим кратномасштабным анализом, порождённым сдвигами масштабирующих функций.

3. В диадических пространствах Лебега на положительной полупрямой доказана сходимость разложений по системе диадических фреймов Парсевала всплесков к приближаемой функции почти всюду и по норме пространств Лебега.

Методы исследования. В диссертации использованы методы вещественного, комплексного и функционального анализа и теории приближения функций.

Научная новизна. Все полученные результаты являются новыми.

Теоретическая и практическая значимость. Результаты работы носят теоретический характер и могут быть использованы при решении родственных задач теории приближения.

Апробация результатов. Результаты работы докладывались автором на IV Конференции математических центров России (Санкт–Петербург, 2024 г.) и на городском семинаре по конструктивной теории функций под руководством проф. М. А. Скопиной (2021 г., 2024 г., 2025 г.). Также результаты третьей главы диссертации докладывались научным руководителем Е. А. Лебедевой на XXXIV Летней конференции по математическому анализу (Санкт–Петербург, 2025 г.).

Публикации по теме диссертации. Основные результаты диссертации изложены в четырёх статьях ([1], [2], [3], [4]), опубликованных в ведущих научных журналах из списка, рекомендованного ВАК.

Личный вклад автора. Результаты первой главы получены соискателем лично и опубликованы в работе [1]. Результаты второй и третьей главы опубликованы в совместных с Е. А. Лебедевой работах [2], [3], [4]. Научному руководителю принадлежит постановка задачи и общий план исследования. Все доказательства получены соискателем.

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из введения, трёх глав, разбитых на параграфы, заключения, обозначений и списка литературы. Общий объём диссертации составляет 86 страниц машинописного текста. Библиография содержит 45 наименования.

Содержание работы

Для формулировки основных результатов понадобятся следующие обозначения.

Для $p \in [1, +\infty)$ под L_p понимается пространство измеримых, 1-периодических функций f , для которых

$$\|f\|_p = \left(\int_0^1 |f|^p \right)^{1/p} < +\infty.$$

Символом L_∞ будем обозначать пространство 1-периодических существенно ограниченных функций с равномерной нормой $\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{x \in [0,1]} |f(x)|$. Аналогично определяются пространства Лебега $L^p(X)$, $p \in [1, \infty]$, где X есть \mathbb{R} или его подмножество оснащённые мерой Лебега. Для функций $f, g \in L_2$ определим стандартным образом скалярное произведение $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)\bar{g}(x)dx$.

Пространство непрерывных 1-периодических функций с равномерной нормой будем обозначать C . Для $m \in \mathbb{N}$ символом C^m будем обозначать множество m раз непрерывно дифференцируемых функций, при этом полагаем $C^0 = C$.

При $n \in \mathbb{Z}$ будем обозначать n -ый коэффициент Фурье функции $f \in L_1$ символом

$$\widehat{f}(n) = \int_0^1 f(x)e^{2\pi inx} dx.$$

Для $\nu \in \mathbb{R}$ под H^ν будем понимать пространство Соболева всех 1-периодических функций $f \in L_2$ таких, что

$$\|f\|_{H^\nu} = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} (1 + k^2)^\nu |\widehat{f}(k)|^2 \right)^{1/2} < +\infty.$$

Далее определим для функции f оператор сдвига $S_j^n f := f(\cdot + 2^{-j}n)$, $j \in \mathbb{Z}_+$, $n \in \mathcal{R}_j$, где $\mathcal{R}_j = \{-2^{j-1} + 1, -2^{j-1} + 2, \dots, 2^{j-1}\}$. Так же определим схожее множество $\mathcal{R}_j = \{-2^{\lfloor j/2 \rfloor} + 1, -2^{\lfloor j/2 \rfloor} + 2, \dots, 2^{\lfloor j/2 \rfloor} - 1\}$, при этом полагаем $\mathcal{R}_0 = \mathcal{R}_0 = \{0\}$.

Обозначим $\mathcal{S}(2^j)$ – пространство всех 2^j -периодических последовательностей $\{c(k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ комплексных чисел, то есть таких, что $c(2^j p + k) = c(k)$ для всех $p \in \mathbb{Z}$.

Под модулем непрерывности функции f из L_p , $p \in [1, +\infty)$, или C (полагая $p = +\infty$) порядка $r \in \mathbb{Z}_+$ будем понимать функцию переменной $h \in [0; +\infty)$, которая определяется равенством

$$\omega_r(f, h)_p = \sup_{|t| \leq h} \|\Delta_t^r f\|_p,$$

где $\Delta_t^r f(x) = \sum_{k=0}^r (-1)^{r-k} C_r^k f(x + kt)$ — конечная разность порядка r функции f с шагом h в точке x .

Глава 1. Прямая теорема типа Джексона для нестационарной системы периодических всплесков. Первая глава посвящена аппроксимационным свойствам периодических систем всплесков, образующих биортогональные базисы в пространствах L_p , $p \in [1, +\infty)$, или C . Результаты главы опубликованы в [1].

В работе [9] даны прямые теоремы типа Джексона для стационарной системы периодических всплесков, порождённых непериодической функцией. В данной главе рассматривается нестационарная система периодических всплесков

$$\{\varphi_0\} \cup \{S_j^k \psi_j : j \in \mathbb{Z}_+, k = 0, 1, \dots, 2^j - 1\},$$

в которой на каждом уровне j имеется своя всплеск-функция. Таким образом порождаю-

щей их непериодической всплеск-функции может не существовать. Для построения такой системы всплесков используется метод основанный на построении периодического кратномасштабного анализа (ПКМА), который описан в [9, §9.1.-9.2.]. Этот метод позволяет строить ортогональные или биортогональные базисы. Для этого в пространстве $L_p, p \in [1, +\infty)$ (C если $p = \infty$) и в сопряжённом ему пространстве L_q (C , если $p = 1$) строятся ПКМА подмножеств $\{V_j\}_{j=0}^{\infty}$ первого пространства и ПКМА $\{\tilde{V}_j\}_{j=0}^{\infty}$ второго пространства. Эту пару ПКМА называют (p, q) -парой. Каждый из этих ПКМА имеет свой набор масштабирующих функций, сдвиги которых образуют биортонормированную систему. Затем на каждом уровне j ПКМА в L_p (C при $p = \infty$) подбирается всплеск-функция из множества V_{j+1} , сдвиги которой биортогональны множеству \tilde{V}_j . Аналогичным образом строятся всплески в сопряжённом пространстве L_q (C при $p = 1$). Получившиеся системы всплеск-функций и их сдвиги вместе с масштабирующими функциями нулевого уровня $\varphi_0 \in V_0$ и $\tilde{\varphi}_0 \in \tilde{V}_0$ образуют биортогональные базисы всплесков соответственно в пространствах L_p (C при $p = \infty$) и L_q (C при $p = 1$). Задача состоит в оценке сверху модулем непрерывности нормы погрешности приближения, то есть нормы разности функции $f \in L_p$ (C при $p = \infty$) и частичной суммы разложения функции f по базису всплесков

$$s_N(f) = \langle f, \tilde{\varphi}_0 \rangle \varphi_0 + \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{n=0}^{2^j-1} \langle f, S_n^j \tilde{\psi}_j \rangle S_n^j \psi_j + \sum_{n=0}^L \langle f, S_n^J \tilde{\psi}_J \rangle S_n^J \psi_J,$$

где $N = 2^J + L \in \mathbb{N}$, $J \in \mathbb{Z}_+$, $L \in \{0, 1, \dots, 2^J - 1\}$. Как показано в [9, §10.2], наилучшее приближение всплеск-полиномами порядка N всегда не превосходит $\|f - s_N(f)\|_p$, поэтому оценка сверху доказывается именно для нормы разности.

Теорема 1.1. Пусть $p \in [1, +\infty]$, $1/p + 1/q = 1$, а числа $r, m, \nu \in \mathbb{N}$ таковы, что $2m \geq r + 4$ и $2\nu \geq r + 2$. Пусть $\{V_j\}_{j=0}^{\infty}$, $\{\tilde{V}_j\}_{j=0}^{\infty}$ образуют (p, q) -пару с масштабирующими последовательностями $\{\varphi_j\}_{j=0}^{\infty}$, $\{\tilde{\varphi}_j\}_{j=0}^{\infty}$ соответственно, такими, что для всякого $j \in \mathbb{Z}_+$ функции $\{S_n^j \varphi_j\}_{n=0}^{2^j-1}$ и $\{S_n^j \tilde{\varphi}_j\}_{n=0}^{2^j-1}$ образуют биортонормированные системы, а $\{\psi_j\}_{j=0}^{\infty}$, $\{\tilde{\psi}_j\}_{j=0}^{\infty}$ – соответствующие последовательности всплеск-функций, удовлетворяющие следующим условиям. Для всех $j \in \mathbb{Z}_+$

$$(i) \quad \psi_j, \tilde{\psi}_j \in C^m \quad \text{и} \quad \sup_{j \in \mathbb{Z}_+} \|\psi_j^{(m)}\|_{\infty} < \infty, \quad \sup_{j \in \mathbb{Z}_+} \|\tilde{\psi}_j^{(m)}\|_{\infty} < \infty.$$

(ii) найдётся положительная постоянная C_1 , не зависящая от j и k , такая что

$$\left| \widehat{\psi}_j(k) \right|, \left| \widehat{\tilde{\psi}}_j(k) \right| \leq \frac{C_1 |k|^\nu}{2^{j\nu+j/2}} \quad \text{для всех } k \in R_j.$$

Тогда для всех $f \in L_p$ (C если $p = \infty$) и всех $N \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство

$$\|f - s_N(f)\|_p \leq \tilde{C} \omega_r \left(f, \frac{1}{N} \right)_p,$$

где \tilde{C} зависит только от m, r, p, ν и постоянных, входящих в условия (i) и (ii).

Более того, из доказательства теоремы видно, что требования к порядку гладкости всплеск-функций можно ослабить, если m -ые производные всплеск-функций будут удовлетворять условию Липшица порядка 1. Так же для одной из биортогональных систем

всплесков можно ослабить требования к гладкости её функций, изменив при этом условия для допустимого порядка модуля непрерывности.

Теорема 1.2. Пусть $p \in [1, +\infty]$, $1/p + 1/q = 1$ и пусть числа $r, m, \nu \in \mathbb{N}$ удовлетворяют неравенствам $m \geq 3 + r$ и $\nu \geq 2 + r$. Пусть $\{V_j\}_{j=0}^\infty, \{\tilde{V}_j\}_{j=0}^\infty$ образуют (p, q) -пару с масштабирующими последовательностями $\{\varphi_j\}_{j=0}^\infty, \{\tilde{\varphi}_j\}_{j=0}^\infty$ соответственно, такими что для всякого $j \in \mathbb{Z}_+$ функции $\{S_j^m \varphi_j\}_{n=0}^{2^j-1}$ и $\{S_j^m \tilde{\varphi}_j\}_{n=0}^{2^j-1}$ образуют биортонормированные системы, а $\{\psi_j\}_{j=0}^\infty, \{\tilde{\psi}_j\}_{j=0}^\infty$ – соответствующие последовательности всплеск-функций, удовлетворяющие следующим условиям. Для всех $j \in \mathbb{Z}_+$

$$(i') \quad \tilde{\psi}_j \in C^m \quad \text{и} \quad \sup_{j \in \mathbb{Z}_+} \|\tilde{\psi}_j^{(m)}\|_\infty < \infty,$$

(ii') найдётся положительная константа C_1 , не зависящая от j и k , такая что

$$\left| \widehat{\tilde{\psi}_j}(k) \right| \leq \frac{C_1 |k|^\nu}{2^{j\nu + j/2}} \quad \text{для всех } k \in R_j,$$

$$(iii') \quad \sup_{j \in \mathbb{Z}_+} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{\psi_j}(k) \right| < \infty.$$

Тогда для всех $f \in L_p(C$ если $p = \infty)$ и всех $N \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство

$$\|f - s_N(f)\|_p \leq \tilde{C} \omega_r \left(f, \frac{1}{N} \right)_p,$$

где \tilde{C} зависит только от m, r, p, ν и постоянных, входящих в условия (i')-(iii').

Глава 2. Фреймы Парсеваля периодических всплесков. Вторая глава посвящена построению и изучению аппроксимационных свойств периодических фреймов Парсеваля системы всплесков в пространстве L_2 . Результаты опубликованы в [2] и [4].

Структура фрейма отлична от структуры базиса главным образом тем, что допускает избыточность систем всплесков. В данной главе на каждом уровне допускается существование сразу нескольких всплеск-функций. Для каждого $j \in \mathbb{Z}_+$ зафиксируем натуральное число ρ_j и рассмотрим функции $\psi_j^m \in L_2$, $m = 1, 2, \dots, \rho_j$. Семейство функций

$$\Psi = \{S_j^k \psi_j^m : j \in \mathbb{Z}_+, m = 1, 2, \dots, \rho_j, k \in \mathcal{R}_j\}$$

называется системой периодических всплесков. При этом функции $\psi_j^m \in L_2$, $m = 1, 2, \dots, \rho_j$ называются всплесковыми генераторами или всплеск-функциями. Говорят, что система Ψ образует фрейм Парсеваля всплесков в L_2 , если для всех $f \in L_2$ выполнено равенство Парсеваля

$$\|f\|_2^2 = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\rho_j} \sum_{k \in \mathcal{R}_j} |\langle f, S_j^k \psi_j^m \rangle|^2.$$

В первой части данной главы для системы периодических всплесков описаны конструктивные необходимые и достаточные условия, при которых это семейство образует фрейм Парсеваля. Теоремы 2.1 и 2.2 являются вспомогательными для доказательства конструктивного критерия фреймовости системы всплесков в теореме 2.3 и более общей теореме 2.4.

В теореме 2.1 приведена общая характеристика фрейма всплесков в терминах коэффициентов Фурье. Для непериодических всплесков аналог этого результата доказан при различных предположениях на всплесковые генераторы в [9, 15, 22, 28]. Полученная характеристика служит для доказательства критерия фреймовости системы всплесков в терминах последовательности масштабирующих функций в теореме 2.2, то есть функций $\varphi_j \in L_2$, $j \in \mathbb{N}$, удовлетворяющих масштабирующему уравнению

$$\widehat{\varphi}_j(n) = \sqrt{2} \widehat{a_{j+1}}(n) \widehat{\varphi_{j+1}}(n), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (1)$$

где $\widehat{a}_j(n)$ – 2^j -периодическая последовательность, называемая масштабирующей маской. При таком подходе генераторы всплесков определяются с помощью всплесковых уравнений

$$\widehat{\psi}_j^m(n) = \sqrt{2} \widehat{b_{j+1}^m}(n) \widehat{\varphi_{j+1}}(n), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad m = 1, \dots, \rho_j, \quad (2)$$

где $\widehat{b}_j^m(n)$ – 2^j -периодические последовательности по параметру n , называемые масками всплесков. При этом из соглашения $\psi_0^1 = \varphi_0$ следует, что $\widehat{a}_1(n) = \widehat{b}_1^1(n)$. Для непериодических всплесков аналог этого результата доказан в работе [31].

Ни один из критериев, приведённых в теоремах 2.1 и 2.2, не даёт явного способа построения системы всплесков. В [31] для непериодических систем всплесков также отмечается невозможность практического применения предложенного в этой работе критерия, описанного в терминах масштабирующих функций, и приводится частный случай (следствие 6.7), известный как унитарный принцип расширения, который широко используется для построения систем всплесков. Его периодические аналоги приведены, например, в работах [14, 19, 20]. Отметим, что унитарный принцип расширения даёт только достаточное условие и не является критерием в отличие от теоремы 2.4.

Основной результат данной главы приведён в теоремах 2.3, 2.4 и следствии 2.1, где указан конструктивный критерий для построения фрейма Парсевала периодических всплесков. В теореме 2.3 на масштабирующие функции наложены дополнительные условия, которые позволяют представить критерий в более простом виде и сфокусироваться на главной идее доказательства.

Теорема 2.3. Пусть функции $\varphi_j \in L_2$, $j \in \mathbb{N}$, удовлетворяют масштабирующему уравнению (1) и $\widehat{\varphi}_j(n) \neq 0$ для всех $j \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}$. Для каждого $j \in \mathbb{Z}_+$ фиксируем $\rho_j \in \mathbb{N}$ и определяем $\psi_j^m \in L_2$, $m = 1, \dots, \rho_j$ с помощью всплескового уравнения (2), и пусть $\sum_{m=1}^{\rho_0} \left| \widehat{b}_1^m(n) \right|^2 \neq 0$.

Введем вспомогательные коэффициенты $\tilde{a}_j(n)$, $\tilde{b}_j^m(n) \in \mathcal{S}(2^j)$, $j \geq 2$,

$$\tilde{a}_j(n) = \left(\prod_{r=1}^{\rho_{j-1}} \cos t_r^k \right) e^{it_{\rho_{j-1}+1}^k} \neq 0, \quad (3)$$

$$\tilde{b}_j^m(n) = \left(\prod_{r=m+1}^{\rho_{j-1}} \cos t_r^k \right) \sin t_m^k e^{it_{\rho_{j-1}+1+m}^k}, \quad (4)$$

$k = 0$ для $n = 0, \dots, 2^{j-1} - 1$, $k = 1$ для $n = 2^{j-1}, \dots, 2^j - 1$, $j \in \mathbb{N}$, где параметры

$t_r^k = t_r^k(j, n)$, $r = 1, \dots, 2\rho_{j-1} + 1$, удовлетворяют системе

$$\begin{cases} \sum_{m=0}^{\rho_{j-1}} \cos(t_{\rho_{j-1}+1+m}^0 - t_{\rho_{j-1}+1+m}^1) \prod_{k=0}^1 \sin t_m^k \prod_{r=m+1}^{\rho_{j-1}} \cos t_r^k = 0, \\ \sum_{m=0}^{\rho_{j-1}} \sin(t_{\rho_{j-1}+1+m}^0 - t_{\rho_{j-1}+1+m}^1) \prod_{k=0}^1 \sin t_m^k \prod_{r=m+1}^{\rho_{j-1}} \cos t_r^k = 0, \end{cases} \quad (5)$$

произведение $\prod_{r=\rho_{j-1}+1}^{\rho_{j-1}} \cos t_r^k$ считаем равным 1.

Тогда семейство $\{S_j^k \psi_j^m : j \in \mathbb{Z}_+, m = 1, 2, \dots, \rho_j, k \in \mathcal{R}_j\}$ образует фрейм Парсеваля в L_2 тогда и только тогда, когда

$$\sum_{m=1}^{\rho_0} \overline{\widehat{b}_1^m(0)} \widehat{b}_1^m(1) = 0,$$

$$\prod_{r=2}^{\infty} |\tilde{a}_r(n)|^2 = 2 \sum_{m=1}^{\rho_0} \left| \widehat{b}_1^m(n) \right|^2 |\widehat{\varphi}_1(n)|^2.$$

Кроме того, маски всплесков определяются так

$$\widehat{b}_j^m(n) = \tilde{b}_j^m(n) \sqrt{\sum_{m=1}^{\rho_0} \left| \widehat{b}_1^m(n) \right|^2 \prod_{r=2}^j \frac{|\widehat{a}_r(n)|}{|\tilde{a}_r(n)|}}.$$

Следующее следствие даёт явный вид критерия для случая одного всплескового генератора $\rho_j = 1$ при $j \in \mathbb{N}$.

Следствие 2.1. Пусть функции $\varphi_j \in L_2$, $j \in \mathbb{N}$, удовлетворяют масштабированному уравнению (1) и $\widehat{\varphi}_j(n) \neq 0$ для всех $j \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}$. Пусть функции $\psi_j \in L_2$, $j \in \mathbb{N}$, определяются всплесковыми уравнениями

$$\widehat{\psi}_j(n) = \sqrt{2} \widehat{b}_{j+1}(n) \widehat{\varphi}_{j+1}(n), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

И при $j = 0$ считаем, что $m = 1, 2$,

$$\widehat{\psi}_0^m(n) = \sqrt{2} \widehat{b}_1^m(n) \widehat{\varphi}_1(n), \quad n \in \mathbb{Z},$$

$\widehat{b}_1^m \in \mathcal{S}(2)$. Пусть $\sum_{m=1}^2 \left| \widehat{b}_1^m(n) \right|^2 \neq 0$.

Определим вспомогательные коэффициенты $\tilde{a}_j(n), \tilde{b}_j(n) \in \mathcal{S}(2^j)$, $j \geq 2$,

$$\begin{cases} \tilde{a}_j(n) = \cos t_1^0 e^{it_2^0}, \\ \tilde{a}_j(n + 2^{j-1}) = \pm \sin t_1^0 e^{it_2^1}, \\ \tilde{b}_j(n) = \sin t_1^0 e^{it_3^0}, \\ \tilde{b}_j(n + 2^{j-1}) = \pm \cos t_1^0 e^{\pm i(t_3^0 + t_2^1 - t_2^0)}, \end{cases}$$

где $j \in \mathbb{N}$, $n = 0, \dots, 2^{j-1} - 1$, t_1^0, t_2^0, t_3^0 , и t_2^1 зависят от j и n , и знаки “+” и “-” выбираются произвольно.

Тогда семейство $\{\psi_0^1, \psi_0^2\} \cup \{S_j^k \psi_j : j \in \mathbb{N}, k \in \mathcal{R}_j\}$ образует фрейм Парсеваля в L_2 тогда и только тогда, когда

$$\sum_{m=1}^2 \overline{\widehat{b}_1^m(0)} \widehat{b}_1^m(1) = 0,$$

$$\prod_{r=2}^{\infty} |\tilde{a}_r(n)|^2 = 2 \sum_{m=1}^2 \left| \widehat{b}_1^m(n) \right|^2 |\widehat{\varphi}_1(n)|^2.$$

Кроме того,

$$\widehat{b}_j(n) = \tilde{b}_j(n) \sqrt{\sum_{m=1}^2 \left| \widehat{b}_1^m(n) \right|^2} \prod_{r=2}^j \frac{|\widehat{a}_r(n)|}{|\tilde{a}_r(n)|}.$$

Следующая теорема даёт наиболее общий критерий фреймовости системы всплесков без дополнительных условий на масштабирующие функции. Для её формулировки введём вспомогательное определение. Определим рекурсивно последовательность $\theta_j(n) \in S(2^j)$ равенствами

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\rho_j} \left| \widehat{b}_{j+1}^m(n) \right|^2 + \theta_j(n) |\widehat{a}_{j+1}(n)|^2 &= \theta_{j+1}(n), \\ \theta_1(n) &= \sum_{m=1}^{\rho_0} \left| \widehat{b}_1^m(n) \right|^2, \quad \theta_0(n) = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Теорема 2.4. Пусть функции $\varphi_j \in L_2$, $j \in \mathbb{N}$, удовлетворяют масштабирующему уравнению (1). Для каждого $j \in \mathbb{Z}_+$ фиксируем $\rho_j \in \mathbb{N}$ и пусть $\psi_j^m \in L_2$, $m = 1, \dots, \rho_j$ определены всплесковым уравнением (2). Пусть $\theta_j(n)$ определена рекурсивно в (6).

Мы определяем вспомогательные коэффициенты $\tilde{a}_{j+1}(n)$, $\tilde{b}_{j+1}^m(n) \in \mathcal{S}(2^{j+1})$, $j \in \mathbb{N}$, с помощью (3), (4), где $t_r^k = t_r^k(j, n)$, $r = 1, \dots, 2\rho_j + 1$, удовлетворяют (5) при $\theta_{j+1}(n + 2^j) \neq 0$. Если же $\theta_{j+1}(n + 2^j) = 0$, тогда параметры $t_r^k = t_r^k(j, n)$, $r = 1, \dots, 2\rho_j + 1$, задаются произвольно.

Тогда семейство $\{S_j^k \psi_j^m : j \in \mathbb{Z}_+, m = 1, 2, \dots, \rho_j, k \in \mathcal{R}_j\}$ образует фрейм Парсеваля в L_2 тогда и только тогда, когда

$$\text{I. } \{j : \widehat{\varphi}_j(n) \neq 0\} \cap \left\{ j : \sum_{m=1}^{\rho_{j-1}} \left| \widehat{b}_j^m(n) \right|^2 \neq 0 \right\} \neq \emptyset;$$

$$\text{II. } \prod_{r=j_1+1}^{\infty} |\tilde{a}_r(n)|^2 = 2^{j_1} \sum_{m=1}^{\rho_{j_1-1}} \left| \widehat{b}_{j_1}^m(n) \right|^2 |\widehat{\varphi}_{j_1}(n)|^2,$$

$$\text{где } j_1 := \min\{j : \widehat{\varphi}_j(n) \neq 0\} \cap \left\{ j : \sum_{m=1}^{\rho_{j-1}} \left| \widehat{b}_j^m(n) \right|^2 \neq 0 \right\};$$

III. $\widehat{b}_j^m(n)$ определяются так

$$\begin{aligned} (a) & \text{ произвольны,} & j & \in \{1, \dots, j_0\}, \\ (b) & 0, & j & \in \{j_0 + 1, \dots, j_1 - 1\}, \\ (c) & \sum_{m=1}^{\rho_{j_1-1}} \overline{\widehat{b}_{j_1}^m(n)} \widehat{b}_{j_1}^m(n + 2^{j_1-1}) = 0, & j & = j_1, \\ (d) & \tilde{b}_j^m(n) \sqrt{\sum_{m=1}^{\rho_{j_1-1}} \left| \widehat{b}_{j_1}^m(n) \right|^2} \prod_{r=j_1+1}^j \frac{|\widehat{a}_r(n)|}{|\tilde{a}_r(n)|}, & j & \in \{j_1 + 1, j_1 + 2, \dots\}, \end{aligned}$$

$$\text{где } j_0 + 1 := \min\{j : \widehat{\varphi}_j(n) \neq 0\}.$$

Затем в примерах 2.1 и 2.2 обсуждается применение полученных критериев в случае одного всплескового генератора и в случае, когда в качестве масштабирующих функций выступают тригонометрические полиномы.

Далее в главе описываются аппроксимационные свойства систем всплесков, построенных с помощью критерия из теоремы 2.4, и аппроксимационные свойства связанных с ними систем сдвигов масштабирующих функций. Аппроксимационные свойства семейств функций инвариантных относительно сдвига и, в частности, систем всплесков изучались многими авторами (см., например, статьи [12, 16, 17, 19, 26] и ссылки на литературу в них) в различных пространствах для периодических и непериодических функций. В главе 2 диссертации способность фрейма всплесков приближать функции в пространстве L_2 оценивается с помощью порядков аппроксимации. В частности изучается взаимосвязь между порядком аппроксимации фреймом и порядком аппроксимации соответствующим периодическим кратномасштабным анализом $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}_+}$ (ПКМА). При этом во второй главе используется определение ПКМА, отличное от данного в первой главе. А именно, используется определение, включающее в себя наименьшее возможное количество аксиом: условие вложенности подпространств и условие плотности их объединения в пространстве L_2 (см., например, [21] и [25]). В [21] приведены необходимые и достаточные условия, при которых фрейм Парсевалея порождает такое ПКМА. Оказывается, что условий теоремы 2.4 достаточно для того, чтобы подпространства, порождённые $2^{-j}k$ -сдвигами масштабирующих функций φ_j , образовали ПКМА $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}_+}$.

Говорят, что ПКМА $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}_+}$ имеет порядок аппроксимации, равный $\mu_0 \geq 0$, если μ_0 есть супремум неотрицательных чисел γ , для которых найдутся такие постоянные $C_\gamma > 0$ и $J_\gamma \in \mathbb{N}$, что для всякого $j \geq J_\gamma$ и всех функций $f \in H^\gamma$ верно неравенство

$$E(f, V_j)_2 \leq 2^{-j\gamma} C_\gamma \|f\|_{H^\gamma}.$$

Аналогично определяется порядок аппроксимации фреймом с заменой оценки сверху наилучшего приближения на неравенство

$$\left\| f - \sum_{r=0}^{j-1} \sum_{m=1}^{\rho_r} \sum_{l \in \mathcal{R}_r} \langle f, S_r^l \psi_r^m \rangle S_r^l \psi_r^m \right\|_2 \leq 2^{-j\gamma} C_\gamma \|f\|_{H^\gamma}.$$

Сначала в параграфе 2.4. изучаются аппроксимационные свойства ПКМА. В теореме 2.5 сформулирован критерий получения определённого порядка аппроксимации ПКМА.

Теорема 2.5. Пусть $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}_+}$ – ПКМА в L_2 с масштабирующими функциями $\{\varphi_j\}_{j \in \mathbb{Z}_+}$. Порядок аппроксимации ПКМА равен $\mu_0 \geq 0$ тогда и только тогда, когда μ_0 есть супремум таких неотрицательных чисел μ , для которых найдутся такие постоянные $C_\mu > 0$ и $J_\mu \in \mathbb{N}$, что для всех целых $j \geq J_\mu$

$$(2^{-2j} + |2^{-j}k|^2)^{-\mu} \Lambda_j^2(k) \leq C_\mu \quad \text{для любого } k \in \mathcal{R}_j.$$

где

$$\Lambda_j(k) = \left(1 - \frac{|\widehat{\varphi}_j(k)|^2}{\sum_{l \in \mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}_j(2^j l + k)|^2} \right)^{1/2}.$$

Полученные в этом параграфе результаты, касающиеся ПКМА, верны и для более широкого класса подпространств инвариантных относительно сдвига. Аналогичные результаты для непериодических функций можно найти в [17].

В следующем параграфе изучаются аппроксимационные свойства самих фреймов всплесков. Для систем фреймов многомерных непериодических всплесков в $L_2(\mathbb{R}^d)$ взаимосвязь между порядками аппроксимации фреймом и кратномасштабным анализом изучалась в [16]. Для систем периодических фреймов всплесков, построенных с помощью унитарного принципа расширения, определение порядка аппроксимации появилось в [19]. В [23] для непериодических фреймов всплесков были установлены необходимые и достаточные условия, при которых фрейм Парсевалья имеет заданный порядок аппроксимации. В теореме 2.7 показано, как эти результаты можно распространить на периодические фреймы Парсевалья, построенные с помощью критерия из теоремы 2.4. Более того, в отличие от [19], в данной работе используется норма пространств Соболева H^ν вместо полунормы, что позволяет избавиться от дополнительного условия $\widehat{\varphi}_j(0)\widehat{\varphi}_j(2^j p) = \delta_{p0}$, $p \in \mathbb{Z}$, присутствующего в аналогичных теоремах статьи [19].

Теорема 2.7. *Фрейм Парсевалья $\{S_j^k \psi_j^m : j \in \mathbb{Z}_+, m = 1, 2, \dots, \rho_j, k \in \mathcal{R}_j\}$, удовлетворяющий условиям (1)–(2), имеет порядок аппроксимации фреймом $\nu_0 \geq 0$ тогда и только тогда, когда ν_0 есть супремум таких неотрицательных чисел ν , для которых найдутся такие постоянные $C_\nu > 0$ и $J_\nu \in \mathbb{N}$, что*

$$\max \left\{ \tilde{C}_{j,1}, \tilde{C}_{j,2} \right\} \leq C_\nu, \quad \text{для всех } j \geq J_\nu.$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{j,1} &= \max_{k \in \mathcal{R}_j} (2^{-2j} + |2^{-j}k|^2)^{-\nu} (1 - 2^j \theta_j(k) |\widehat{\varphi}_j(k)|^2)^2, \\ \tilde{C}_{j,2} &= \max_{k \in \mathcal{R}_j} 2^{2j} \theta_j^2(k) |\widehat{\varphi}_j(k)|^2 \cdot (2^{-2j} + |2^{-j}k|^2)^{-\nu} \sum_{p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} |\widehat{\varphi}_j(2^j p + k)|^2. \end{aligned}$$

В теореме 2.8 сравниваются порядки аппроксимации фреймом и ПКМА.

Теорема 2.8. *Фрейм Парсевалья $\{S_j^k \psi_j^m : j \in \mathbb{Z}_+, m = 1, 2, \dots, \rho_j, k \in \mathcal{R}_j\}$, удовлетворяющий условиям (1)–(2), имеет порядок аппроксимации фреймом $\nu_0 = \min \{\mu_0, \gamma_0\}$, где $\mu_0 \geq 0$ — порядок аппроксимации соответствующим ПКМА и $\gamma_0 \geq 0$ есть супремум неотрицательных чисел γ , для которых найдутся такие постоянные $C_\gamma > 0$ и $J_\gamma \in \mathbb{N}$, что*

$$\max_{k \in \mathcal{R}_j} (2^{-2j} + |2^{-j}k|^2)^{-\gamma} (1 - 2^j \theta_j(k) |\widehat{\varphi}_j(k)|^2)^2 \leq C_\gamma, \quad j \geq J_\gamma.$$

Глава 3. Аппроксимационные свойства систем диадических всплесков в пространствах Лебега. Третья глава посвящена изучению аппроксимационных свойств диадических фреймов всплесков заданных на положительной полупрямой с операцией двоичного сложения. Результаты главы опубликованы в [3].

Для функций, определенных на вещественной прямой, в вопросах сходимости разложений по системе всплесков непременно присутствует предположение либо о регулярности масштабирующей функции и выполнении условия Стрэнга-Фикса некоторого порядка, либо условие существования четной, суммируемой, убывающей на положительном луче мажоранты (см. работы [9, 24, 27, 30, 35, 36], а также обширную библиографию в них). В главе 3 получены результаты о сходимости почти везде и в пространствах $L^p(\mathbb{R}_+)$, $1 \leq p < \infty$, прежде всего благодаря особенностям операции двоичного сложения, не предполагая гладкость или существование мажоранты.

Все результаты, полученные в данной главе, могут быть записаны для функций, определенных на локально компактной группе Кантора, снабженной мерой Хаара, либо непосредственно в терминах группы, либо для реализации группы в виде модифицированной полупрямой $[0, +\infty)^*$ с раздвоенными положительными двоично-рациональными точками (см. [5, 7]). Чтобы избежать излишней громоздкости обозначений результаты главы изложены в терминах полупрямой с операцией двоичного сложения.

Для этого каждое $x \in \mathbb{R}_+$ представляется в виде двоичного разложения

$$x = \sum_{k<0} x_k 2^{-k-1} + \sum_{k>0} x_k 2^{-k},$$

где цифры $x_k, x_{-k}, k \in \mathbb{N}$, определяются равенствами

$$x_k = [2^k x](\text{mod } 2), \quad x_{-k} = [2^{1-k} x](\text{mod } 2).$$

Операция двоичного сложения для $x, y \in \mathbb{R}_+$ задаётся равенством

$$x \oplus y = \sum_{k<0} |x_k - y_k| 2^{-k-1} + \sum_{k>0} |x_k - y_k| 2^{-k}.$$

При этом полагаем $x \ominus y = x \oplus y$.

Определим для функции $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ систему сжатий и сдвигов следующим образом

$$f_{j,k}(x) := 2^{j/2} f(2^j x \oplus k), \quad x \in \mathbb{R}_+, \quad j \in \mathbb{Z}_+, \quad k \in \mathbb{Z}_+,$$

Для фиксированного $r \in \mathbb{N}$ система

$$\Psi := \{\psi_{j,k}^{(\nu)} : \nu = 1, \dots, r, j \in \mathbb{Z}_+, k \in \mathbb{Z}_+\} \quad (7)$$

называется системой всплесков, порожденной набором всплеск-функций $\psi^{(\nu)} \in L^2(\mathbb{R}_+)$, $\nu = 1, \dots, r$. Говорят, что система Ψ образует фрейм Парсеваля в $L^2(\mathbb{R}_+)$, если

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}_+} \sum_{\nu=1}^r \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \left| \langle f, \psi_{j,k}^{(\nu)} \rangle \right|^2 = \|f\|^2.$$

В данной главе рассматриваются системы всплесков, построенные с помощью унитарного принципа расширения, в котором всплеск-функции строятся с помощью вспомогательной функции φ , называемой масштабирующей. Унитарный принцип расширения был адаптирован для диадических функций в статьях [18, 32]. Введём обозначение

$$P_j f = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \langle f, \varphi_{j,k} \rangle \varphi_{j,k}$$

для разложения функции f по системе целых сдвигов сжатой в 2^j раз масштабирующей функции. Частичные суммы разложения функции по системе всплесков будем обозначать

$$Q_{n,j} f = \sum_{i=n}^{j-1} \sum_{\nu=1}^r \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \langle f, \psi_{i,k}^{(\nu)} \rangle \psi_{i,k}^{(\nu)}.$$

При $p = 2$ сходимость $Q_{n,j}$ к f эквивалентна тому, что система всплесков Ψ образует фрейм Парсеваля. Для вещественного случая это хорошо известный факт (см., например, [9, предложение 1.8.2]). Для диадического случая доказательство содержится в статье [33], где фреймы всплесков и сходимость при $p = 2$ изучается для пространств M -положительных векторов, и группа Кантора является частным случаем этого пространства. Отметим также, что в статье [33] в качестве масштабирующих функций рассматриваются только тест-функции. Это функции, которые наряду со своим преобразованием Фурье являются кусочно постоянными и имеют компактный носитель. В диссертации изучается более широкий класс функций, а именно функции только с компактным носителем. Для того чтобы показать несовпадение этих классов достаточно воспользоваться критерием маски тест-функции [33, теорема 19] и взять в качестве элемента множества σ_r вектор длины r , состоящих из одних единиц (см. определение множества σ_r в [33, определение 16]).

Леммой 3.1 устанавливается тождество $P_j f - P_n f = Q_{n,j} f$, которое позволяет свести вопрос о сходимости сумм $Q_{n,j} f$ к изучению поведения сумм $P_j f$, а лемма 3.2 даёт интегральное представление оператора P_j . Далее в теореме 3.1 доказывается ограниченность оператора P_j по норме, как оператора из $L^p(\mathbb{R}_+)$ в $L^p(\mathbb{R}_+)$. В теоремах 3.2 и 3.4 получена сходимость частичных сумм $P_j f$ к функции f при $j \rightarrow +\infty$ и к нулю при $j \rightarrow -\infty$ в пространстве $L^p(\mathbb{R}_+)$, $1 < p < \infty$. В теоремах 3.3 и 3.5 аналогичные результаты получены для сходимости сумм почти всюду. Из этих утверждений непосредственно следует сходимость частичных сумм разложения по фрейму всплесков. Основной результат представлен в виде двух теорем. В теореме 3.6 сформулированы условия для сходимости частичных сумм $Q_{n,j} f$ к f по норме пространства $L^p(\mathbb{R}_+)$, $1 < p < \infty$, в то время как в теореме 3.7 устанавливается сходимость почти всюду.

Теорема 3.6. *Если масштабирующая функция $\varphi \in L_c^{\max\{p,q\}}(\mathbb{R}_+)$, $1/p+1/q = 1$, $p \in (1, \infty)$, $\text{supp } \varphi \subset [0, 2^n)$, $\widehat{\varphi}(0) = 1$, и система всплесков (7) построена с помощью унитарного принципа расширения, то для любой функции $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$*

$$f = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{\nu=1}^r \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \langle f, \psi_{i,k}^{(\nu)} \rangle \psi_{i,k}^{(\nu)},$$

где равенство понимается по норме пространства $L^p(\mathbb{R}_+)$.

Теорема 3.7. *Если масштабирующая функция $\varphi \in L_c^{\max\{2,q\}}(\mathbb{R}_+)$, $1/p+1/q = 1$, $p \in [1, \infty)$, $\text{supp } \varphi \subset [0, 2^n)$, $\widehat{\varphi}(0) = 1$, φ w -непрерывна в точках $0, 1, \dots, 2^n - 1$, последовательность $\{\varphi(c(2^j x))\}_{j \in \mathbb{N}}$ ограничена для почти всех $x \in \mathbb{R}_+$, и система всплесков (7) построена с помощью унитарного принципа расширения, то для любой функции $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$ и для п.в. $x \in \mathbb{R}_+$*

$$f(x) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{\nu=1}^r \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \langle f, \psi_{i,k}^{(\nu)} \rangle \psi_{i,k}^{(\nu)}(x).$$

Под w -непрерывной функцией понимается функция, непрерывная в диадической метрике.

Работы автора по теме диссертации

- [1] *Gorsanova A.* Jackson-type theorem on approximation by non-stationary periodic wavelets // *Int. J. Wavelets, Multiresolut. Inf. Process.* 2022. vol. 20. no. 2. 2150055.
- [2] *Горшанова А. А., Лебедева Е. А.* О критериях для фреймов периодических всплесков // *Мат. заметки.* 2025. т. 118. вып. 2. с. 221–239.
- [3] *Горшанова А. А., Лебедева Е. А.* О сходимости разложений по системам диадических всплесков // *Алгебра и Анализ.* 2025. т. 37. вып. 5. с. 179–197.
- [4] *Горшанова А. А., Лебедева Е. А.* Порядки аппроксимации периодическими фреймами всплесков // *Записки научных семинаров ПОМИ.* 2025. т. 545. с. 84–110.

Список литературы

- [5] *Агаев Г. .Н., Виленкин Н. Я., Джафарли Г. М., Рубинштейн А. И.* Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нульмерных группах // Баку: Элм, 1981.
- [6] *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории аппроксимации. Изд. 2-е // М.: НАУКА, 1965.
- [7] *Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. .А.* Ряды и преобразования Уолша: Теория и применения. Изд. 2-е // М.: ЛКИ, 2008.
- [8] *Жук В. В.* Лекции по теории аппроксимации. // Ленинград: Издательство Ленинградского университета, 1982.
- [9] *Новиков И. Я., Протасов В. Ю., Скопина М. А.* Теория всплесков // М.: Физматлит, 2006.
- [10] *Протасов В. Ю., Фарков Ю. А.* Диадические вейвлеты и масштабирующие функции на полупрямой // *Мат. сборник.* 2006. т. 197. вып. 10. с. 129–160.
- [11] *Тиман А. Ф.* Теория приближения функций действительного переменного // М.:Физматгиз., 1960.
- [12] *Улицкая А. Ю.* Точные оценки среднеквадратичных приближений классов периодических свёрток пространствами сдвигов // *Алгебра и анализ.* 2020. т. 32. вып. 2. с. 201–228.
- [13] *Andrianov P., Skopina M.* On Jackson-type inequalities associated with separable Haar wavelets // *Int. J. Wavelets Multiresolut. Inf. Process.* 2016. vol. 14. no. 3. 1650005.
- [14] *Christensen O., Goh S. S.* Pairs of oblique duals in spaces of periodic functions // *J. Adv. Comput. Math.* 2010 vol. 32. no. 2. p. 353–379.
- [15] *Daubechies I.* The wavelet transform, time-frequency localization and signal analysis // *IEEE Trans. Inform. Theory.* 1990. vol. 36. no. 5. p. 961–1005.

- [16] *Daubechies I., Han B., Ron A., Shen Z.* Framelets: MRA-based constructions of wavelet frames // J. Appl. Comput. Harmon. Anal. 2003. vol. 14. no. 1. p. 1–46.
- [17] *De Boor C., Devore R. A., Ron A.* Approximation from shift-invariant subspaces of $L_2(\mathbb{R}^d)$ // Trans. Amer. Math. Soc. 1994. vol. 341. no. 2. p. 787–806.
- [18] *Farkov Yu., Lebedeva E., Skopina M.* Wavelet frames on Vilenkin groups and their approximation properties // Int. J. of Wavelets, Multiresolution and Information Processing. 2015. vol. 13. no. 5. 1550036.
- [19] *Goh S. S., Han B., Shen Z.* Tight periodic wavelet frames and approximation orders // Appl. Comput. Harmon. Anal. 2011. vol. 31. no. 2. p. 228–248.
- [20] *Goh S. S., Teo K. M.* Extension principles for tight wavelet frames of periodic functions // J. Appl. Comput. Harmon. Anal. 2008. vol. 25. no. 2. p. 168–186.
- [21] *Goh S. S., Teo K. M.* Wavelet frames and shift-invariant subspaces of periodic functions // J. Appl. Comput. Harmon. Anal. 2006. vol. 20. no. 3. p. 326–344.
- [22] *Gripenberg G.* A necessary and sufficient condition for the existence of father wavelet // Studia Mathematica. 1995. vol. 114. no. 3. p. 207–226.
- [23] *Jetter K., Zhou D.-X.* Order of linear approximation from shift-invariant spaces // Constr. Approx. 1995. vol. 11. p. 423–438.
- [24] *Kelly S.E., Kon M. A., Raphael L. A.* Pointwise Convergence of Wavelet Expansions // Bull. Amer. Math. Soc. 1994. vol. 30. no. 1. p. 87-94.
- [25] *Koh Y. W., Lee S. L., Tan H. H.* Periodic orthogonal splines and wavelets // J. Appl. Comput. Harmon. Anal. 1995. vol. 2. no. 3. p. 201–218.
- [26] *Kolomoitsev Yu., Krivoshein A., Skopina M.* Approximation by periodic multivariate quasi-projection operators // J. Math. Anal. Appl. 2020. vol. 489. no. 2. 124192.
- [27] *Krivoshein A. V., Skopina M. A.* Approximation by frame-like wavelet systems // Appl. Comput. Harmon. Anal. 2011. vol. 31. p. 410–428.
- [28] *Lemarié-Rieusset P. -G.* Ondelettes à localisation exponentielle // J. Math. Pures Appl. 1988. vol. 67. p. 227–236.
- [29] *Lukomskii S.* Tight wavelet frames on zero-dimensional groups. Construction and approximation // Numerical Functional Analysis and Optimization. 2023. vol. 44. no. 12. p. 1209–1227.
- [30] *Meyer Y.* Wavelets and Operators // Cambridg: Cambridge Univ. Press, 1992.
- [31] *Ron A., Shen Z.* Affine Systems in $L^2(\mathbb{R}^d)$: The Analysis of the Analysis Operator // J. Func. Anal. 1997. vol. 148. no. 2. p. 408-447.

- [32] *Shah F. A.* Tight wavelet frames generated by the Walsh polynomials // Int. J. Wavelets, Multiresolut. Inf. Process. 2013. vol. 11. no. 6. 1350042.
- [33] *Skopina. M.* Tight wavelet frames on the space of M-positive vectors // Analysis and Applications. 2024. vol. 22. no. 5. p. 913-936.
- [34] *Trigub R. M., Bellinsky E. S.* Fourier Analysis and Approximation of Functions // Dordrecht: Springer, 2004.
- [35] *Vinogradov O. L.* Structural characterization of deviations of quasi-projectors on the real line // J. Math. Anal. Appl. 2021. vol. 500. 125115.
- [36] *Walter G. G.* Pointwise Convergence of Wavelet Expansions // J. of Approx. Th. 1995. vol. 80. no. 1. p. 108-118.