

Проректор по научной работе  
Санкт-Петербургского государственного  
электротехнического университета,  
доктор технических наук, профессор  
Шестопапов М.Ю.



" 2017 г.

### ОТЗЫВ

ведущей организации – Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета – на диссертационную работу Минабутдинова Алексея Рафаиловича "Предельные кривые для класса самоподобных адических автоморфизмов", представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальностям 01.01.01 - вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Диссертация посвящена новому подходу к исследованию поведения флуктуаций эргодических сумм значений функций, заданных на фазовом пространстве динамической системы, вдоль односторонних траекторий соответствующей системы. Центральным объектом, изучаемым в диссертации – специальным образом нормированные последовательности частичных сумм, которые (после линейной интерполяции и подходящей нормировки) можно рассматривать как последовательности непрерывных равномерно ограниченных функций на единичном интервале. В силу выбора нормировки эти функции принимают нулевые значения на концах интервала и поэтому могут рассматриваться как непрерывные "мосты". Впервые на возможность стабилизации указанных последовательностей функций в 2005 году обратил внимание К. Мела в ходе совместной с К. Петерсоном работы по изучению свойств автоморфизма Паскаля – известного адического преобразования, введенного в эргодическую теорию А. М. Вершиком. Наблюдения К. Мела были формализованы Т. де ла Рю, Э. Жанврес и И. Велеником, которые предложили называть предельные точки последовательностей непрерывных мостов предельными функциями. Они показали, что для автоморфизма Паскаля (для начальных функций из некоторого подкласса цилиндрических

функций на фазовом пространстве и для траекторий почти каждой точки) множество предельных функций содержит известную функцию Такаги.

В своей диссертации автор поставил целью нахождение более широкого класса автоморфизмов и семейства начальных функций, для которых существуют предельные кривые, а также обобщение результатов, полученных ранее для автоморфизма Паскаля. Автор в ходе работы рассмотрел естественный класс адических автоморфизмов – полиномиальные автоморфизмы, включающие автоморфизм Паскаля. Для полиномиальных автоморфизмов ему удалось получить необходимое и достаточное условие существования предельных функций, а также исследовать примеры предельных кривых – графиков предельных функций.

Актуальность предмета исследования определяется тем, что центральный вопрос теории динамических систем с инвариантной мерой – индивидуальная эргодическая теорема – рассматривается с новой точки зрения, когда специальная структура фазового пространства как пространства путей градуированного графа позволяет в целом классе ситуаций на основе микроанализа поведения частичных сумм обнаружить интересную структуру поведения последовательности значений функций вдоль траекторий общего положения, что представляет интерес как с точки зрения динамики, так и возможных приложений в теории чисел, теории самоподобных объектов и в пограничных областях между теорией динамических систем и комбинаторикой.

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, приложения и списка литературы (86 страниц).

Во введении изложена история вопроса и приведено описание структуры работы.

Первая глава носит вводный характер и посвящена необходимому условию существования предельных кривых. Для произвольного метрического автоморфизма с инвариантной эргодической мерой и для суммируемой функции  $\varrho$  автором формулируется условие, заключающееся в неограниченности роста нормирующей последовательности. Показано, что это условие эквивалентно тому, что функция не является когомологичной константе. В силу хорошо известной теоремы А. М. Вершика о реализации, всякий эргодический автоморфизм может быть реализован как адический автоморфизм, заданный на (под)множестве путей некоторого бесконечного градуированного графа (диаграммы Браттели). Для цилиндрических функций

$\mathcal{G}$ , которые в основном рассматриваются в работе (т.е. функций, зависящих лишь от фиксированного набора координат пути) предложено удобное выражение частичных сумм их значений вдоль траекторий. Для простейших адических автоморфизмов – стационарных одометров – показано, что все цилиндрические функции когомологичны константе, и тем самым не приводят к предельным кривым. Для доказательства результатов данной главы автор в основном использует комбинаторные рассуждения и теорему Халаша-Качуровского.

Основная часть диссертации, главы 2 и 3, посвящены доказательству существования предельных кривых и исследованию этих кривых для специального класса адических автоморфизмов.

Во второй главе рассматривается класс так называемых полиномиальных адических автоморфизмов. Такие автоморфизмы в частных случаях рассматривались в работах К. Мела и С. Бейли. Основным результатом данной части – доказательство того, что необходимые условия существования предельных функций, сформулированные в первой главе, являются также и достаточными для цилиндрических функций и полиномиальных адических автоморфизмов. Доказательство этого результата в основном следует схеме, предложенной Т. де ла Рю, Э. Жанврес и И. Велеником, однако следует отметить, что для доказательства теоремы А. Р. Минабутдинову пришлось преодолеть ряд технических трудностей, доказать ряд лемм комбинаторного и аналитического характера, в частности, получить необходимые оценки для обобщенных биномиальных коэффициентов. В качестве аппарата, использованного в этой части, следует упомянуть теорему А. Одлжыко и Б. Ричмонда об унимодальности обобщенных биномиальных коэффициентов, использование метода производящих функций, а также вариант эргодической теоремы, позволяющий избежать явного нахождения асимптотик отношений размерностей вершин. Во второй части данной главы строятся некоторые примеры предельных кривых, исследуются их свойства самоподобия, а также их некоторые асимптотические свойства.

Третья глава диссертации посвящена исследованию предельных кривых для автоморфизма Паскаля. В частности, доказываемая предложенная Т. де ла Рю, Э. Жанврес и И. Велеником на основе ряда численных экспериментов гипотеза о том, что кривая Такаги возникает в качестве предельной кривой для почти каждой точки и произвольной некомологичной константе цилиндрической функции. Компьютерные

эксперименты, на которых была основана гипотеза, показали, что для некоторых функций при вариации точки  $x$  для предельной кривой может происходить набор "катастроф", приводящих к возникновению новых кривых. Данные катастрофы получили название транзитных режимов.

Автору удалось изучить транзитные режимы и показать, что данное событие происходит для точек пространства, множество которых имеет меру ноль. Для исследования транзитных режимов автором был использован разнообразный математический аппарат. На первом этапе был построен удобный ортонормированный базис в пространстве цилиндрических функций, в случае симметричной меры совпадающий с базисом Уолша-Пэли. В диссертации показано, что для исходных функций, принадлежащих этому базису, частичные суммы их значений вдоль отрезков траекторий могут быть выражены через полиномы Кравчука. Поэтому основной аналитической задачей оказывается изучение специальных асимптотик нормированных полиномов Кравчука. При этом главный член асимптотики задается некоторым полиномом Эрмита, а в транзитных режимах, которые можно связать с корнями этого полинома, необходимо рассматривать члены асимптотического разложения следующих порядков. Автором найдены необходимые асимптотические разложения, позволившие описать предельные кривые в транзитных режимах. Следует отметить, что в данной части автором диссертации доказан ряд нетривиальных утверждений. При этом привлечен разнообразный математический аппарат, включающий как классические теоретико-числовые результаты, например, теорему Куммера, при построении ортогонального базиса, так и вероятностно-аналитические утверждения: уточненную локальную предельную теорему Петрова, интегральную теорему Коши, метод производящих функций для исследования полиномов Кравчука.

Представленная к защите диссертация А.Р.Минабутдинова представляет собой законченное исследование на актуальную тему. Все установленные в диссертации результаты являются достоверными научными фактами. Основное содержание диссертации отражено в шести статьях автора. Все они помещены в журналах из списка, рекомендованного ВАК. Автореферат правильно отражает содержание диссертации.

К некоторым недостаткам текста диссертации следует отнести лаконичность при введении некоторых понятий, хорошо знакомых автору, но требующих порой серьезных усилий при знакомстве с предметом менее

посвященных специалистов. Впрочем, указанный недочет не снижает общей положительной оценки работы.

С результатами диссертации будет интересно и полезно ознакомиться специалистам из МИАН, ПОМИ, МГУ, СПбГУ, ВШЭ, ИППИ.

### Заключение

Диссертация А.Р.Минабутдинова удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым ВАК РФ к кандидатским диссертациям, а ее автор заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Диссертационная работа и отзыв обсуждены и одобрены на заседании кафедры высшей математики №2, протокол № 4, 20 апреля 2017 года.

Коточигов Александр Михайлович, доктор физ.-мат. наук, доцент,

профессор кафедры высшей математики №2 Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина)» (СПбГЭТУ «ЛЭТИ»)

ул. Профессора Попова, 5, Санкт-Петербург, Россия, 197022

тел./факс: 812-234-6381

e-mail: amkotochigov@gmail.com

дата

27 апреля 2017



А.М.Коточигов