ОТЗЫВ

официального оппонента, кандидата физико-математических наук В. Г. Лысова на диссертацию Алексея Николаевича Медведева на тему «Локальная гладкость аналитической функций в сравнении с гладкостью ее модуля», представленную в диссертационный совет Д 002.202.01 при ФГБУН Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 — «вещественный, комплексный и функциональный анализ»

Диссертация посвящена исследованию вопроса о связи между гладкостью функции, аналитической в круге или верхней полуплоскости, и гладкостью ее модуля. При этом изучается локальная постановка: как по гёльдеровой гладкости модуля аналитической функции в граничной точке оценить гладкость самой функции в этой точке? В диссертации решаются следующие задачи:

1. Доказано, что если функция φ на единичной окружности имеет гладкость порядка не выше двух в точке, то интегральная гладкость внешней функции с модулем φ может упасть в этой точке не более чем в два раза.

2. Для каждого $b \in [1,2]$ на функцию φ на единичной окружности, имеющую гладкость меньше 1 в точке, получены достаточные условия, обеспечивающие для внешней функции с модулем φ падение интегральной гладкости в этой точке не более чем в b раз. Эти достаточные условия точны по b.

3. Доказано, что для внешних функций в верхней полуплоскости для случая гладкости меньше 1 результат о падении интегральной гладкости в точке не более чем в два раза справедлив для интегралов по отрезкам ограниченной длины.

Первый результат о сравнении гладкости внешней функции F в единичном круге с гладкостью ее модуля φ был доказан, но не опубликован, Л. Карлесоном и С. Якобсом в 50-е годы прошлого столетия. В 1970 году этот результат был переоткрыт и усилен в работе В. П. Хавина и Ф. А. Шамояна, где доказано, что если $\alpha \in (0,1]$ и $\varphi \in \mathrm{Lip}_\alpha$ на окружности, то $F \in \mathrm{Lip}_{\alpha/2}$. В 1977 году этот результат распространен на случай $\alpha \in (1,2)$ Дж. Бреннаном , а в 1988 году — на случай $\alpha > 0$ Н. А. Широковым. В 2013 году им же доказано, что если помимо $\varphi \in \mathrm{Lip}_\alpha$ выполнено $\ln \varphi \in \mathrm{L}^p$, при $p \in (1,\infty)$, то для F можно гарантировать не в два, а в $\frac{p+1}{p}$ раз меньшую гладкость.

Перечисленные выше результаты являются глобальными. Локальные постановки, которые рассматриваются в диссертации, являются новыми, но естественными и очень интересными. Метод исследования основан на технике из теории сингулярных интегральных операторов типа Кальдерона–Зигмунда. Ключевую роль играет выбор определения гладкости функции в точке. В диссертации гладкость в точке x для функции F измеряется в терминах средних разностей $\varkappa_r(F,h)$ (для гладкости порядка [1,2]) или средних осцилляций $\Omega_r(F,I)$ (для гладкости порядка меньше 1) по дугам I, содержащим x, где $r > 1$ и

$$\varkappa_r(f,h) := \left(\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} |\Delta^2 f(x,t)|^r dt\right)^{1/r}, \quad \Omega_r(f,I) := \inf_c \left(\frac{1}{|I|}\int_I |f(t)-c|^r dt\right)^{1/r}.$$

В диссертации показано, что такие определения позволяют из локальных интегральных оценок во всех точках окружности с константами, не зависящими от x и I, получить глобальные равномерные (т.е. для модуля непрерывности) оценки гладкости.

Диссертация состоит из введения и трех глав.

В первой главе основным результатом является доказательство локального варианта достаточных условий падения гладкости F по сравнению с φ в круге для случая гладкости меньше 1. Результат формулируется для симметричных пространств, удовлетворяющих условию Бойда, а падение гладкости определяется фундаментальной функцией пространства. Рассматривается широкий класс мажорантных функций, включающий степенные t^α. Демонстрируется точность полученного показателя падения гладкости. Обсуждается возможность переноса результата на случай произвольных аналитических функций в круге.

Во второй главе рассмотрен случай гладкости φ порядка $[1, 2]$. Доказано, что при условии $\ln \varphi \in \mathrm{L}^p$ падение интегральной гладкости F в точке не превышает $\frac{p+1}{p}$.

В третьей главе разработанная техника применяется к функциям F в верхней полуплоскости, модуль которых φ имеет в точке x порядок гладкости меньше 1. Для таких функций при оценке локальной гладкости $\Omega_r(F, I)$ возникает несколько масштабов в зависимости от длины I, падение гладкости вдвое наблюдается при $|I| < C(x)$.

К диссертации имеются следующие замечания.

1. Из формулировки теоремы 1 во введении не ясно, что оценка для средних осцилляций выполняется для внешней функции $\mathcal{O}_\varphi$. В следствии 2 упоминается функция g, которая не была определена ранее.

2. В главе 3 встречаются неточные или неверные неравенства: на стр. 79 в (3.8) множитель 2 можно убрать, в строке 6 снизу на стр. 83 множитель 2 нужно добавить, в лемме 3.4 в правой части нужно заменить x_0 на x, на стр. 86 величины B_{x_0} и B'_{x_0} определены только по порядку, неравенство между ними требует разъяснения. Это замечание не влияет на правильность окончательных результатов, так как они формулируются с точностью до постоянных множителей.

3. В диссертации содержится достаточно много выкладок и оценок, и там неизбежно присутствуют опечатки, которые, однако, легко устранимы. Например, на стр. 15 в (18) пропущен показатель r в интеграле, на стр. 17 в (21) пропущен предел интегрирования, на стр. 25 внизу перепутан знак в выражении второй разности, на стр. 32 в (1.3) пропущен символ $*$, на стр. 38 в (1.15) вместо переменной s должна быть y, в лемме 3.6 вместо 0 должно быть x_0, на стр. 75 в (3.5) вместо Φ должна быть ω. Встречаются опечатки и в автореферате. На стр. 5 в п. 2 пропущено слово «модуль», т.е. должно быть «Если модуль внешней функции...»

Характеризуя диссертацию в целом, отметим, что, несмотря на указанные замечания, исследования соискателя находятся на очень хорошем уровне. Не вызывает сомнений высокая квалификация автора. Все заявленные результаты снабжены доказательствами.

Основное содержание диссертации опубликовано в открытой печати. Автореферат правильно отражает содержание диссертации. Результаты диссертации могут найти применение в теории аналитических функций. Они могут быть интересны специалистам, работающим в ИПМ им. М.В. Келдыша и других институтах РАН.

Считаю, что диссертационная работа А. Н. Медведева «Локальная гладкость аналитической функций в сравнении с гладкостью ее модуля» является законченным, оригинальным научным исследованием. Она удовлетворяет всем требованиям п. 9 Положения ВАК к диссертациям на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 — «вещественный, комплексный и функциональный анализ», а ее автор, Алексей Николаевич Медведев, заслуживает присуждения ему искомой степени.

Автор отзыва: Лысов Владимир Генрихович, кандидат физико-математических наук (01.01.01 — «вещественный, комплексный и функциональный анализ»). Место работы: Федеральное государственное учреждение “Федеральный исследовательский центр Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша Российской академии наук”, Миусская пл., 4, 124047 Москва. Должность: старший научный сотрудник. Домашний адрес и телефон: ул. Флотская дом 29, к. 3, кв. 462, 125413 Москва, моб. тел. +7-903-521 96 97, vlysov@mail.ru.

23 октября 2017 г.

Старший научный сотрудник
Института прикладной математики им. М.В.Келдыша,
к.ф.-м.н. В.Г. Лысов

Подпись к.ф.-м.н. В.Г. Лысова заверяю
Ученый секретарь
Института прикладной математики им. М.В.Келдыша
к.ф.-м.н. А.И. Маслов