

ОТЗЫВ

Научного руководителя о диссертации В. А. Боровицкого
«Многопараметрические оценки в гармоническом анализе:
варианты неравенства Рубио де Франсиа и интерполяция
абстрактных пространств типа Харди»,

представленной на соискание ученой степени кандидата физико-
математических наук по специальности 01.01.01 – вещественный,
комплексный и функциональный анализ

Термины «многопараметрические оценки», «многопараметрическая теория» в гармоническом анализе относятся не столько к числу переменных, сколько к виду сингулярностей. Так, любой классический сингулярный интегральный оператор типа Кальдерона-Зигмунда в n -мерном пространстве – объект однопараметрической теории, независимо от того, каково n . Типичным объектом k -параметрической теории является тензорное произведение k таких операторов (например, если все они от n переменных, это тензорное произведение действует в пространстве размерности kn). Похожий «эффект тензорного произведения» (сходное строение множества особенностей ядра оператора) часто наблюдается и без явного разделения переменных, так что термины носят в какой-то мере неформально-интуитивный характер. Как бы то ни было, многопараметрическая теория сложнее однопараметрической. Многие утверждения из последней перестают быть верными уже в двухпараметрическом случае, а те, что удаётся доказать в случае более, чем одного параметра, обычно требуют значительного труда и привлечения новых нетривиальных построений.

Материал диссертации разбит на 3 главы, все 3 посвящены разным задачам из многопараметрической теории. При этом главы 1 и 3 относятся в конечном итоге к классическому (тригонометрическому) анализу Фурье, а глава 2 – к анализу Фурье на некоторых вполне несвязных группах (точнее, к разложениям Фурье по кратным ограниченным системам Виленкина).

Я начну с описания главы 1, поскольку она основана на работе, написанной диссертантом совместно со мной. Авторы оценивают свой вклад в эту работу как примерно равный, но уместно сообщить некоторые дополнительные

подробности. Основной конкретный результат – интерполяционная теорема для весовых пространств Харди на двумерном торе в случае весов вида $u(x)w(x,y)v(y)$, где вес w удовлетворяет подходящим условиям Макенхаупта, а логарифмы весов u и v лежат в классе ВМО от одной переменной, принадлежит целиком автору диссертации. Вдвоем мы довели до некоторой степени совершенства абстрактный подход (примененный ранее мною и И. К. Злотниковым в частных случаях), позволяющий включить это конкретное утверждение –наряду с другими подобными - в теорию равномерных алгебр. Эта абстрактная часть потребовала труда и шлифовки деталей, но, с нашей точки зрения, первоначальное доказательство упомянутого конкретного результата про интерполяцию теперь заметно упростилось.

Нелишне отметить, что ситуация здесь иллюстрирует утверждение о нарастании трудностей в многопараметрической теории: уже для трехмерного тора подобный интерполяционный результат не известен, даже если вес тождественно равен единице.

Результаты глав 2 и 3 целиком принадлежат диссертанту. В главе 3 доказан аналог неравенства Рубио де Франсиа (одностороннего неравенства типа Литтлвуда-Пэли) для произвольных попарно не пересекающихся прямоугольников на плоскости, в метрике пространства $L^p(w)$ при $0 < p < 2$ и для весов w , удовлетворяющих некоторому естественному в этом круге вопросов условию. Безвесовая оценка такого рода для показателей, строго больших единицы, была известна с 1980-х годов, а для произвольных положительных показателей доказана только около 10 лет назад (Н. Н. Осипов). Весовой случай требует значительного дополнительного труда и не сводится к тому, что делалось в отсутствие веса.

Наконец, глава 2 посвящена подобной же односторонней оценке, на этот раз безвесовой (по прямоугольникам или даже по параллелепипедам – здесь оказывается доскупной k -параметрическая теория, в отличие от глав 1 и 3) для кратных ограниченных систем Виленкина. Доказательство стало возможным после недавнего «однопараметрического» результата А. Целищева про ограниченные системы Виленкина и использует появившиеся относительно недавно тонкие теоремы о кратных мартингальных преобразованиях.

В целом я оцениваю материал, собранный в диссертации, высоко. Все постановки естественны, но при этом хоть какой-то разумный ответ (даже частичный) на каждый из затронутых вопросов требует очень большого труда и свободного владения современной аналитической техникой. Автору

удалось разрешить несколько таких вопросов, что в целом представляет собой значительный шаг вперед и делает гораздо более полной общую картину в многопараметрических задачах. Считаю, что диссертация удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к кандидатским диссертациям, а ее автор – В. А. Боровицкий - заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук.

Научный руководитель

Академик РАН

С. В. Кисляков

