

ОТЗЫВ ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕНТА
о диссертационной работе **Алексея Рафаиловича Минабутдинова**
"Предельные кривые для класса самоподобных
адических автоморфизмов",

представленной на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук по специальности 01.01.01 - вещественный,
комплексный и функциональный анализ.

Исследования, результаты которых представлены в диссертации, относятся к метрической теории динамических систем, к комбинаторной эргодической теории и теории обобщенных фрактальных кривых Такаги. В работе также указаны приложения полученных результатов к теории булевых функций, комбинаторике и теории чисел.

Предмет этих исследований - микроскопические флуктуации эргодических сумм Биркгофа для класса самоподобных адических автоморфизмов - класса полиномиальных адических автоморфизмов. Полиномиальные адические автоморфизмы изучались в недавних работах К. Мела и С. Бейли. В частности, С. Бейли нашла все эргодические инвариантные меры для полиномиального адического автоморфизма.

Теория адических автоморфизмов (их часто называют автоморфизмами Вершика) была развита А.М. Вершиком. Он же определил автоморфизм Паскаля - простейший адический автоморфизм из класса полиномиальных адических автоморфизмов. Ранее С. Какутани использовал этот автоморфизм как подсобный инструмент в своей работе о равномерном распределении точек на отрезке.

Автоморфизм Паскаля изучался многими авторами. Совершенно неожиданные результаты для автоморфизма Паскаля были получены Т.де ла Рю, Э.Жанресс и И.Веленик в 2005 году. Они нашли самоподобные поправки к эргодической теореме Биркгофа для цилиндрических функций. Поправки описываются предельным мостом - непрерывной функцией на единичном отрезке, которая равна нулю на концах отрезка. Эта функция зависит от точки, в которой вычисляются суммы Биркгофа, но почти всюду предельный мост один и тот же. Такой мост называется существенным. График предельного моста называется предельной кривой. Т.де ла Рю, Э. Жанресс и И. Веленик привели пример цилиндрической функции, для которой предельная кривая это фрактальная кривая Такаги.

Изучение микрофлуктуаций такого типа это интересная и трудная задача современной эргодической теории. Таким образом, актуальность темы диссертации очевидна.

В первой главе диссертации "Индивидуальные непрерывные мосты и кохомологичные константе функции" даны все необходимые определения и обозначения. Приведена удобная формула для сумм Биркгофа цилиндрической функции. Доказана теорема 1 о том, что необходимым условием для существования предельного моста для сумм Биркгофа суммируемой функции является неограниченный рост последовательности нормирующих коэффициентов.

Это обобщение результата Т. де ла Рю, Э. Жанресс и И. Веленик.

Доказано также теорема 2 о том, что ограниченность последовательности нормирующих коэффициентов для сумм Биркгофа ограниченной измеримой функции эквивалентна кохомологичности этой функции константе. Доказательство этой теоремы использует теорему, которую автор приписывает А.Г. Качуровскому. На самом деле это теорема Окстоби середины прошлого века.

В главе 2 "Существование предельных кривых для полиномиальных адических систем" даны основные определения для указанного в заголовке класса динамических систем, перечислены их свойства и указан вид эргодических инвариантных мер.

Главный результат этой главы - теоремы 5 и 6 о существовании предельных мостов для полиномиальных адических автоморфизмов и некохомологичных константе цилиндрических функций. Таким образом для полиномиальных адических автоморфизмов указанное в главе 1 необходимое условие является необходимым и достаточным. Доказано, что предельные мосты существенны.

Даны примеры предельных мостов для полиномиальных адических автоморфизмов с каноническим лексиграфическим порядком. В каждом примере предельные мосты строятся с использованием g - q адической системы исчисления, что позволяет доказать, что предельные кривые это обобщенные фрактальные кривые Такаги.

Здесь же сформулирован ответ $t - t^2$ на вопрос Т. де ла Рю, Э. Жанресс и И. Веленик о пределе предельного моста при $d \rightarrow \infty$ полиномиального адического автоморфизма с производящим многочленом $1 + x + x^2 + \dots + x^d$ и параметром $q = 0, 5$.

В главе 3 "Предельные кривые для автоморфизма Паскаля" решается задача Т. де ла Рю, Э. Жанресс и И. Веленик о виде предельных мостов и их бифуркациях для автоморфизма Паскаля, поставленная ими после численных экспериментов, в которых было обнаружено изменение вида предельной кривой и соответствующих асимптотик нормирующих коэффициентов при изменении начальной точки. Доказана теорема 8 о том, что стабилизирующая последовательность для некохомологичной константы цилиндрической функции g может быть выбрана так, что для почти всех начальных точек x по инвариантной мере с параметром q предельный мост является обобщенной функцией Такаги $\alpha(x)T_g^1$, где $\alpha(x) = \pm 1$.

Дано полное описание некохомологичных константе цилиндрических функций. Найдено явное выражение через многочлены Кравчука для сумм Биркгофа специальных цилиндрических функций, образующих ортогональный базис в пространстве F_N . С использованием асимптотики многочленов Кравчука исследован вид предельных кривых в транзитных режимах, когда возможно появление линейных комбинаций фобобщенных функций Такаги. Доказано, что такие точки имеет меру 0.

В целом диссертация представляет собой метрическую теорию динамических систем чрезвычайно интересное научное исследование содержащее существенный вклад в метрическую теорию динамических систем. Пред-

ставляют большой интерес и развитые в ней методы. Автор преодолел многие технические трудности комбинаторного и аналитического характера и смог дать строгие доказательства нетривиальных гипотез, возникших при численном исследовании полиномиальных динамических систем.

Особо следует выделить результаты глав 2 и 3. Следует отметить, что диссертация относится к новому и перспективному разделу теории динамических систем.

Все результаты диссертации строго доказаны. Изложение ясное и четкое. Оппонент не смог найти существенных погрешностей в тексте за исключением пары несущественных описок.

Результаты, вынесенные на защиту являются новыми. Они строго обоснованы и своевременно опубликованы. Автореферат отражает содержание диссертации.

Полученные результаты и разработанные методы ПОМИ могут быть использованы в институтах и университетах (МИАН, МГУ, ННГУ, ПОМИ, ИПИИ и др.),

На основании изложенного считаю, что работа А.Р.Минабутдинова "Пределные кривые для класса самоподобных адических автоморфизмов" удовлетворяет всем требованиям к кандидатским диссертациям в соответствии с Положением о присуждении ученых степеней, вступившим в действие с 1 января 2014 года (п. 28 Положения, утвержденного постановлением Правительства Российской Федерации от 24 сентября 2013 г. № 842), а ее автор, несомненно заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 - вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Профессор Департамент анализа данных,
принятия решений и финансовых технологий
федерального государственного образовательного
бюджетного учреждения высшего образования
"Финансовый университет при
Правительстве Российской Федерации,"

д.ф.-м.н., проф.

Оселедец Валерий Иустиневич Оселедец

125167, г.Москва, Ленинградский пр-т д.49,
телефон: 8 (499) 2772123, E-mail: vioseledets@fa.ru

Подпись

В. И. Оселедец

