Отзыв официального оппонента
профессора, доктора физико-математических наук,
члена-корреспондента РАН Александра Ивановича Аптекарева

на диссертационную работу Романа Владимировича Романова
«Вопросы спектральной теории
абстрактных и дифференциальных операторов
для неядерных возмущений и проблема порядка»,

представленную на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук по специальности 01.01.01
«Вещественный, комплексный и функциональный анализ»

Задачи, исследуемые в диссертации Р. В. Романова, находится на стыке математической физики, спектральной теории операторов и теории аналитических функций. Тематика сохраняет свою актуальность, в частности благодаря тому, что направления исследований заданные классиками анализа М.Г. Крейном, Секефальви-Надем, Фояшем, Де Бранжем, Л.Д Фаддеевым получили глубокое развитие в современных работах Б.С. Павлова, Саймона, Дейфта, П. Юдицкого, С. Денисова, что в свою очередь привело к осознанию исключительной нетривиальности изучаемых объектов и остающихся открытыми ряда проблем.

В диссертации имеется три взаимосвязанных группы результатов:

• результаты по общей теории существенного спектра несамосопряженных (особенно недиссипативных) операторов;

• результаты о структуре существенного спектра несамосопряженных операторов математической физики;

• результаты о дискретности спектра и его асимптотическом поведении для канонических систем с одной сингулярной точкой.

Первые две группы естественно объединяются предметом исследования – несамосопряженными опрераторами.

Начнем с обзора результатов по несамосопряженным операторам. Основным методом исследования существенного спектра таких операторов ранее служила функциональная модель Секефальви-Надя-Фояша и созданная на ее основе локальная ядерная теория рассеяния. Эта теория позволяет разобраться в ситуации, когда мнимая часть оператора является ядерным оператором, что позволяет сводить факторизации аналитических оператор-функций к скалярным. В диссертации Романова изучаются ситуации, в которых мнимая часть оператора неядерна, и задачу невозможно свести к ядерному случаю. Здесь выделим две задачи: об эквивалентности и о двойственности.

В абстрактной теории известно два определения абсолютно непрерывного (**а.н.**) подпространства несамосопряженного оператора – сильное и слабое. Сильное определение связано с канонической факторизацией характеристической функции оператора. Эквивалентность сильного и слабого определений в случае ядерного возмущения была доказана ранее в 20 веке. Для неядерных возмущений вопрос об эквивалентности оставался открытым до работы Романова. Диссертантом показано, что в недиссипативном случае эти определения существенно различны при неядерных возмущениях. В диссертации построены примеры ограниченных операторов, для которых слабое а. н. подпространство совпадает со всем пространством, а сильное а. н. подпространство тривиально.

Также в работе решена проблема двойственности спектральных компонент недиссипативных операторов. Под проблемой двойственности понимается вопрос о разложении пространства в сумму а. н. подпространства данного оператора и подпространства сингулярного спектра его сопряженного. С середины 90-х годов известно, что такое разложение справедливо в случае ядерных возмущений. Диссертант построил пример возмущенного векторного сдвига, для которого а. н. подпространство не совпадает со всем пространством, а сингулярное подпространство сопряженного оператора тривиально. Этот пример также оптимален в шкалах компактных операторов.

Результаты первой группы представляют несомненный интерес, но главные результаты автора по несамосопряженным операторам относятся ко второй группе: к структуре существенного спектра операторов математической физики. В работе рассмотрены дискретный и непрерывный операторы Шрёдингера, матрицы Якоби и оператор Дирака на полуоси и линейный оператор Больцмана. В ситуации, когда мнимая часть потенциала суммируема, а. н. спектр оператора сохраняется в силу классической ядерной теории рассеяния, и задача таким образом сводится к соответствующей задаче самосопряженной теории. Как было показано в 1999 года Дейфтом и Килипом, а. н. спектр для самосопряженных операторов Шредингера сохраняется при возмущениях квадратично суммируемым потенциалом. Романовым доказано, что непрерывный и дискретный операторы

Шредингера и оператор Дирака на полуоси с неотрицательной мнимой частью потенциала имеют пустой а. н. спектр, если мнимая часть потенциала неинтегрируема. В силу упомянутых фактов ядерной теории этот результат в диссипативной ситуации окончателен. Он говорит, в частности, что сохранение а. н. спектра вне теории рассеяния в диссипативной ситуации невозможно.

Также среди задач по структуре спектра несамосопряженных операторов хочется выделить, имеющую прикладной интерес, задачу теории переноса нейтронов в средах с размножением (или излучения в атмосферах звезд). Этой задачей диссертант занимается давно, еще в кандидатской диссертации им было установлено, что в случае изотропного рассеяния существенный спектр оператора абсолютно непрерывен и проанализирована спектральная особенность в случае изотропного рассеяния. Теперь, в докторской диссертации вопрос исследован для произвольного полиномиального интеграла столкновений. Заметим, что мнимая часть оператора здесь никогда не бывает относительно ядерной.

Перейдем к обзору результатов автора по каноническим системам. Именно здесь получены основные результаты диссертации: дан ответ на вопрос Луи де Бранжа 1968 года о характеризации гамильтонианов канонинчских систем, отвечающих произвольным функциям Эрмита—Билера, и построены первые примеры в неопределенной проблеме моментов, для которых порядок задачи отличается от своей оценки Лившица (вопрос был открыт с 1939 года).

Остановимся на этих результатах поподробнее. Пусть m - функция из класса Херглотца-Неванлинны, т.е. аналитическое отображение $\mathbb{C}^+$ в себя. Благодаря теореме Де Бранжа, известно, что каждая функция такого типа порождает единственный (с точностью до шкалирования) гамильтониан $H(x)$ в следующей задаче:

$$JM'(x,z) = zH(x)M(x,z), \quad M(0,z) = I, \quad J = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad x \geq 0, \quad (1)$$

где H и M являются матрицами 2×2 и $z \in \mathbb{C}$. Верно и обратное: задав H (локально-интегрируемую неотрицательную матриц-функцию), мы можем однозначно найти m. Таким образом, по Спектральной теореме, каждый самосопряжённый оператор с простым спектром может быть реализован, как каноническая система и все известные операторы математической физики

(Шрёдингер, Дирак, уравнение струны Крейна) являются частными случаями оператора (1). Более того, если известная гипотеза Римана верна, то нетривиальные нули ζ–функции, повёрнутые на угол $\pi/2$, будут собственными значениями задачи (1) с некоторым специальным гамильтонианом H. В силу вышесказанного, результат Романова (теорема 12 главы 5) о характеризации H, для которых спектр задачи (1) дискретен, выглядит особенно впечатляющим. Предлагаемое условие явно выражается через элементы H. Совсем недавно этот же результат был передоказан Ремлингом с помощью совершенно других методов. Для случая симметрических гамильтонианов, такой критерий был получен в известных работах М. Крейна и Каца. Также в пятой главе автор получает критерии принадлежности резольвенты оператора (1) классам Шаттен-фон Неймана. Указанные результаты Романова следует признать классическими в теории канонических систем.

В четвёртой главе диссертации автор изучает другой ряд задач. Отметим здесь

- получение точных оценок на порядок матрицы монодромии M для широкого класса гамильтонианов (теорема 10),
- изучение классической задачи предельный круг / предельная точка для некоторых матриц Якоби и решение гипотезы Валента (следствие 10.4),
- использование разработанной техники для изучения широкого класса других гамильтонианов.

Резюмируя результаты четвёртой и пятой глав, можно с уверенностью сказать, что автор сделал серьёзный вклад в спектральную теорию канонических систем. Эта область получила широкое развитие в последнее время и, наверняка, результаты автора будут актуальны и интересны широкому кругу исследователей.

Диссертация Р. В. Романова вносит существенный вклад в теорию дифференциальных операторов, общую спектральную теорию операторов и связанные вопросы гильбертовых пространств аналитических функций, а также в математическую физику. Все результаты диссертации математически строго доказаны. Особо отметим, что некоторые результаты представляют собой решение известных открытых вопросов теории.

Скажем о недостатках работы. В тексте замечены следующие опечатки. В формуле Крейна–де Бранжа (стр. 15 и 146) неудачна нумерация собственных значений. на стр. 144 вверху -$c_0 := a$, а надо – нулю, на стр. 146

- в теореме 14 в пределах интегрирования a и b вместо $0, L$, на стр. 146 и в формулировке теоремы 15 - надо невозрастающей вместо неубывающей (перестановки), на стр. 18 - в определении порядка проблемы моментов должен стоять не sup, а inf, и не $1/$, а p, на стр. "коммутирующий с V"можно убрать. В автореферате на стр.11 в Определении 1 в формуле (без номера) a_1 надо заменить на a_2.

Отмеченные недостатки не меняют высокую оценку диссертации в целом. Результаты, внесенные в диссертацию, полностью и своевременно опубликованы в журналах из списка ВАК. Автореферат диссертации правильно отражает её содержание. Полученные результаты могут найти применение в исследованиях по математической физике и теории операторов, ведущихся в Институте прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Математическом институте им. В.А. Стеклова РАН, Санкт-Петербургском отделении Математического института им. В.А. Стеклова РАН, Московском государственном университете, Санкт-Петербургском государственном университете.

Таким образом, диссертационная работа Р. В. Романова удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к докторским диссертациям Положением о присуждении учёных степеней, а её автор Романов Роман Владимирович безусловно заслуживает присвоения учёной степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.01 — "Вещественный, комплексный и функциональный анализ".

А. И. Аптекарев 01.10.2020

Подпись директора Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, доктора физико—математических наук, профессора, член-корр. РАН А.И. Аптекарева заверяю:

01.10.2020

Ученый секретарь Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, кандидат физико—математических наук Маслов А.И.