На правах рукописи

Дородный Марк Александрович

Усреднение нестационарных периодических уравнений

Специальность 01.01.03 —
«Математическая физика»

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург — 2021

Работа выполнена в ФГБОУ ВО Санкт-Петербургский государственный университет.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры Высшей математики и математической физики Физического факультета ФГБОУ ВО Санкт-Петербургский государственный университет **Суслина Татьяна Александровна**
Официальные оппоненты:	**Борисов Денис Иванович,** доктор физико-математических наук, Институт математики с вычислительным центром – обособленное структурное подразделение ФГБНУ Уфимского федерального исследовательского центра РАН, главный научный сотрудник
	Пятницкий Андрей Львович, доктор физико-математических наук, ФГБУН Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН, старший научный сотрудник
Ведущая организация:	ФГБУН Институт проблем машиноведения РАН

Защита состоится «7» июня 2021 г. в ___ часов на заседании диссертационного совета Д 002.202.01 при ФГБУН Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН по адресу: 191023, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, д. 27, к. 311.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ФГБУН Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН https://www.pdmi.ras.ru/.

Отзывы на автореферат в двух экземплярах, заверенные печатью учреждения, просьба направлять по адресу: 191023, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, д. 27, к. 311, учёному секретарю диссертационного совета Д 002.202.01.

Автореферат разослан «___» ____________ 2021 года.

Учёный секретарь
диссертационного совета
Д 002.202.01,
д-р физ.-мат. наук Зайцев Андрей Юрьевич

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Работа относится к теории усреднения (гомогенизации) периодических дифференциальных операторов (ДО). Такие операторы возникают при описании физических процессов в микроскопически неоднородных средах. Теории усреднения посвящена обширная литература, укажем, в частности, книги [1—3].

Пример задачи усреднения: изучение поведения решения u_ε задачи Дирихле для эллиптического уравнения при $\varepsilon \to 0$:

$$\begin{cases} -\operatorname{div} g^\varepsilon(\mathbf{x})\nabla u_\varepsilon(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \mathcal{O}, \\ u_\varepsilon(\mathbf{x}) = 0, & \mathbf{x} \in \partial\mathcal{O}, \end{cases}$$

где $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область, $F \in H^{-1}(\mathcal{O})$, $g(\mathbf{x})$ — ограниченная и положительно определённая $(d \times d)$-матрица-функция, периодическая относительно некоторой решётки периодов Γ. Здесь и далее для Γ-периодических функций в $\mathbb{R}^d$ будем использовать обозначение $\varphi^\varepsilon(\mathbf{x}) := \varphi(\varepsilon^{-1}\mathbf{x})$, $\varepsilon > 0$. Классический результат теории усреднения (см., например, [3, гл. I, §3, теорема 1]): $u_\varepsilon \rightharpoonup u_0$ слабо в $H^1_0(\mathcal{O})$, $g^\varepsilon \nabla u_\varepsilon \rightharpoonup g^0 \nabla u_0$ слабо в $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^d)$. Функция u_0 является решением аналогичной задачи

$$\begin{cases} -\operatorname{div} g^0\nabla u_0(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \mathcal{O}, \\ u_0(\mathbf{x}) = 0, & \mathbf{x} \in \partial\mathcal{O}, \end{cases}$$

с постоянной *эффективной* матрицей g^0.

Помимо доказательства сходимости интерес представляет следующий вопрос: *насколько хорошо решение предельной задачи приближает решение исходной*? Внимание к результатам подобного рода привлекла работа М. Ш. Бирмана и Т. А. Суслиной [4]. Остановимся на ней подробнее.

В $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ рассматриваются самосопряжённые эллиптические матричные ДО второго порядка следующего вида

$$\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon = b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}). \tag{1}$$

Здесь $b(\mathbf{D})$ — однородный матричный ДО первого порядка, $g(\mathbf{x})$ — Γ-периодическая ограниченная и положительно определённая $(m \times m)$-матрица-функция. Изучается поведение при $\varepsilon \to 0$ решения $\mathbf{u}_\varepsilon$ уравнения

$$b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}) + \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d.$$

Здесь $\mathbf{F} \in L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. Пусть $\mathbf{u}_0$ — решение эффективной задачи

$$b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D}) \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) + \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d.$$

В [4] была доказана оценка $\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}$, в которой постоянная C не зависит ни от ε, ни от $\mathbf{F}$. В силу произвольности $\mathbf{F}$ данный результат можно переформулировать следующим образом: при $\varepsilon \to 0$ резольвента $(\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon + I)^{-1}$ сходится к резольвенте $(\widehat{\mathcal{A}}^0 + I)^{-1}$ по операторной L_2-норме, где $\widehat{\mathcal{A}}^0 = b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D})$ — эффективный оператор с постоянной эффективной матрицей g^0, и справедлива оценка

$$\|(\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon + I)^{-1} - (\widehat{\mathcal{A}}^0 + I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon. \tag{2}$$

Далее, в работах [5; 6] была найдена аппроксимация резольвенты оператора $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon$ по $(L_2 \to L_2)$-норме с погрешностью $O(\varepsilon^2)$, а в [7] найдена аппроксимация той же резольвенты по $(L_2 \to H^1)$-норме с погрешностью $O(\varepsilon)$. В этих аппроксимациях учитываются корректоры. В работах [4—7] был развит теоретико-операторный подход к эллиптическим задачам усреднения в $\mathbb{R}^d$ (вариант спектрального метода), основанный на масштабном преобразовании, теории Флоке–Блоха и аналитической теории возмущений. Отметим, что спектральный подход применялся к задачам усреднения и раньше: см., например, [1, глава 4], [3, глава 2], [8—10]. Однако важной особенностью работ М. Ш. Бирмана и Т. А. Суслиной является то, что авторы имеют дело с системой уравнений, поэтому теорию возмущений приходится строить по многомерному параметру.

Теоретико-операторный подход применялся к параболическим задачам в работах [11—13]. В [11] получена следующая оценка

$$\|e^{-s\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon} - e^{-s\widehat{\mathcal{A}}^0}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon(s+\varepsilon^2)^{-1/2}, \quad s > 0. \tag{3}$$

Аппроксимация оператора $e^{-s\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon}$ по $(L_2 \to L_2)$-норме с погрешностью $O(\varepsilon^2)$ получена в [12], а аппроксимация экспоненты по $(L_2 \to H^1)$-норме с погрешностью $O(\varepsilon)$ найдена в [13]. Оценки погрешности типа (2), (3) называют *операторными оценками погрешности* в теории усреднения.

Другой подход (так называемый “модифицированный метод первого приближения” или “метод сдвига”) к получению операторных оценок погрешности был предложен В. В. Жиковым и развит им совместно с С. Е. Пастуховой в работах [14—16], см. также обзор [17].

Аналогичные результаты были установлены и для более общего класса операторов, включающих младшие члены:

$$\widehat{\mathcal{B}}_\varepsilon = \widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon + \sum_{j=1}^{d} \left(a_j^\varepsilon(\mathbf{x}) D_j + D_j a_j^\varepsilon(\mathbf{x})^*\right) + \mathcal{Q}^\varepsilon(\mathbf{x}) + \lambda \mathcal{Q}_0^\varepsilon(\mathbf{x}), \tag{4}$$

где $a_j(\mathbf{x})$, $j = 1,\dots,d$, — Γ-периодические $(n \times n)$-матрицы-функции, $a_j \in L_\rho(\Omega)$, $\rho = 2$ при $d = 1$, $\rho > d$ при $d \geqslant 2$; потенциал $\mathcal{Q}(\mathbf{x})$ — Γ-периодическая $(n \times n)$-матрица-функция, $\mathcal{Q} \in L_\varrho(\Omega)$, $\varrho = 1$ при $d = 1$, $\varrho > d/2$ при $d \geqslant 2$ (здесь Ω — элементарная ячейка решётки Γ); и, наконец, $\mathcal{Q}_0(\mathbf{x})$ — Γ-периодическая положительно определённая и ограниченная $(n \times n)$-матрица-функция. Делаются предположения, гарантирующие сильную эллиптичность оператора. На параметр λ накладывается ограничение, обеспечивающее положительную определённость оператора (4). Эллиптическая задача усреднения для оператора (4) изучалась в работах Д. И. Борисова [18] и Т. А. Суслиной [19], а параболическая задача — в работе Ю. М. Мешковой [20].

Отметим, что в [4—7; 12; 13; 20] аналоги указанных выше результатов были получены для “окаймлённых” операторов

$$\mathcal{A}_\varepsilon = (f^\varepsilon)^* \widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon f^\varepsilon, \qquad \mathcal{B}_\varepsilon = (f^\varepsilon)^* \widehat{\mathcal{B}}_\varepsilon f^\varepsilon, \tag{5}$$

где $f(\mathbf{x})$ — Γ-периодическая $(n \times n)$-матрица-функция, $f, f^{-1} \in L_\infty$.

Операторные оценки погрешности при усреднении нестационарных уравнений типа Шрёдингера и гиперболического типа были исследованы в меньшей степени. Им посвящена статья М. Ш. Бирмана и Т. А. Суслиной [21]. В операторных терминах речь идёт о поведении при малом ε оператор-функций $e^{-is\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon}$ и $\cos(s\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2})$, $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{-1/2}\sin(s\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2})$, где $s \in \mathbb{R}$. Для этих оператор-функций уже не удаётся получить аппроксимации по операторной норме в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, а приходится рассматривать норму операторов, действующих из пространства Соболева $H^q(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ (с подходящим q) в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. В [21] были получены оценки

$$\| e^{-is\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon} - e^{-is\widehat{\mathcal{A}}^0} \|_{H^3(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1+|s|)\varepsilon, \tag{6}$$

$$\| \cos(s\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2}) - \cos(s(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2}) \|_{H^2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1+|s|)\varepsilon. \tag{7}$$

Далее, в работах Ю. М. Мешковой [22; 23] был получен результат для оператора $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{-1/2}\sin(s\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2})$:

$$\| \widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{-1/2}\sin(s\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2}) - (\widehat{\mathcal{A}}^0)^{-1/2}\sin(s(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2}) \|_{H^1(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1+|s|)\varepsilon. \tag{8}$$

С помощью интерполяции можно получить оценку разности экспонент из (6) по $(H^q \to L_2)$–норме с погрешностью $O(\varepsilon^{q/3})$ (при $0 \leqslant q \leqslant 3$), оценку разности операторных косинусов из (7) по $(H^q \to L_2)$–норме с погрешностью $O(\varepsilon^{q/2})$ (при $0 \leqslant q \leqslant 2$), а также оценку разности операторов из (8) по $(H^q \to L_2)$–норме с погрешностью $O(\varepsilon^{(q+1)/2})$ (при $-1 \leqslant q \leqslant 1$). Кроме того, в [22; 23] получена аппроксимация оператора $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{-1/2}\sin(s\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2})$ при учёте корректора $K_\varepsilon(s)$ по $(H^2 \to H^1)$-норме с погрешностью $O(\varepsilon)$ при фиксированном s:

$$\begin{aligned} \| \widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{-1/2}\sin(s\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2}) - (\widehat{\mathcal{A}}^0)^{-1/2}\sin(s(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2}) - \varepsilon K_\varepsilon(s) \|_{H^2(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)} \\ \leqslant C(1+|s|)\varepsilon. \end{aligned} \tag{9}$$

Наконец, в работе Т. А. Суслиной [24] была подтверждена точность оценки (6) относительно типа операторной нормы. С другой стороны, были найдены достаточные условия на оператор, позволяющие усилить результат и получить оценку

$$\| e^{-is\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon} - e^{-is\widehat{\mathcal{A}}^0} \|_{H^2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1+|s|)\varepsilon. \tag{10}$$

В работах [21; 22; 24] также были получены результаты для операторов $\mathcal{A}_\varepsilon$ вида (5).

В свете этих результатов представляют интерес следующие вопросы. *Являются ли оценки* (7)–(10) *точными относительно типа операторной нормы? Являются ли оценки* (6)–(10) *точными относительно* s (*при большом* s)? *Можно ли их улучшить* (*возможно, при некоторых дополнительных предположениях*)? *Можно ли обобщить эти результаты на класс операторов* (4)?

Целью диссертации является исследование усреднения нестационарных уравнений гиперболического типа и типа Шрёдингера.

В соответствии с общей целью были поставлены следующие **задачи**:

1. Исследовать поведение операторов $\cos(s\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2})$, $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{-1/2}\sin(s\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2})$ при малом ε: изучить вопрос о точности оценок (7), (8) относительно типа нормы и зависимости от s.
2. Исследовать поведение оператора $e^{-is\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon}$ при малом ε: изучить вопрос о точности результатов (6), (10) относительно зависимости от s и точности оценки (10) относительно типа нормы.
3. Исследовать поведение оператора $e^{-is\widehat{\mathcal{B}}_\varepsilon}$ при малом ε.

Научная новизна: все выносимые на защиту результаты являются новыми.

Практическая значимость. Работа имеет теоретический характер. Результаты диссертации могут быть использованы при изучении математических моделей физических процессов в микронеоднородных средах.

Методология и методы исследования.

Мы применяем теоретико-операторный (спектральный) подход к задачам усреднения, развитый в работах М. Ш. Бирмана и Т. А. Суслиной. Этот метод состоит в применении масштабного преобразования, теории Флоке–Блоха и аналитической теории возмущений.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Для операторов $\cos(s\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2})$, $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{-1/2}\sin(s\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2})$ показано, что в общем случае оценки (7), (8) являются точными как относительно типа нормы, так и относительно зависимости от времени. С другой стороны, выделены достаточные условия, при которых эти оценки допускают улучшение; подтверждена точность улучшенных оценок в обоих смыслах. Аналогичные результаты получены для окаймлённых операторов $\cos(s\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})$, $\mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2}\sin(s\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})$.
2. Для оператора $e^{-is\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon}$ доказана точность оценки (6) относительно зависимости от времени. Доказано, что выполненная при дополнительных условиях оценка (10) допускает улучшение по времени (при тех же условиях); подтверждена точность улучшенной оценки в обоих смыслах. Аналогичные результаты получены для окаймлённого оператора $e^{-is\mathcal{A}_\varepsilon}$.

3. Получена аппроксимация для оператора $e^{-is\widehat{\mathcal{B}}_\varepsilon}$, подтверждена точность полученной оценки относительно типа нормы. Доказано, что при дополнительном условии оценка допускает улучшение по типу нормы. Аналогичные результаты получены для окаймлённого оператора $e^{-is\mathcal{B}_\varepsilon}$.

Достоверность полученных результатов обеспечивается строгими математическими доказательствами.

Апробация работы. Результаты по теме диссертации докладывались автором на семинаре кафедры Высшей математики и математической физики СПбГУ, на Петербургском семинаре по математической физике им. В. И. Смирнова, на EIMI Spectral Theory and Related Topics Seminar, а также на международных конференциях: Modern Methods, Problems and Applications of Operator Theory and Harmonic Analysis (Ростов-на-Дону, Россия, 2016, 2018 и 2019 гг.), Days on Diffraction (Санкт-Петербург, Россия, 2016, 2018 и 2019 гг.), A trilateral German–Russian–Ukrainian summer school "Spectral Theory, Differential Equations and Probability" (Майнц, Германия, 2016 г.), International Conference on Mathematical Modeling in Physical Sciences (Москва, Россия, 2018 г.), St. Petersburg Conference in Spectral Theory (Санкт-Петербург, Россия, 2019 г.), Санкт-Петербургская зимняя молодёжная конференция по теории вероятностей и математической физике (Санкт-Петербург, Россия, 2019 г.), Conference on Spectral Theory and Mathematical Physics (Сочи, Россия, 2020 г.).

Личный вклад. Результаты диссертации, относящиеся к операторам $\cos(s\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})$, $\mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2}\sin(s\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})$, изложены в совместных с Т. А. Суслиной работах. Определяющий вклад в эти работы принадлежит диссертанту. Автором были получены пороговые аппроксимации для соответствующих оператор-функций и построены подтверждающие примеры. Научному руководителю принадлежат постановки задач и общий план исследования. Результаты, касающиеся операторов $e^{-is\mathcal{A}_\varepsilon}$ и $e^{-is\mathcal{B}_\varepsilon}$, получены диссертантом лично.

Публикации. Результаты по теме диссертации изложены в шести статьях в рецензируемых научных журналах [A1—A6]. Все публикации входят в реферативные базы данных Web of Science и Scopus. Отметим, что в работах [A5; A6] были получены также результаты о точности оценки (9) в общем случае и об усилении этой оценки при дополнительных предположениях. Эти результаты не были включены в диссертацию (по причине большого объёма). Ещё упомянем работы [25; 26], в которых полученные общие результаты применяются к усреднению нестационарной системы Максвелла. Материал этих работ тоже не вошёл в диссертацию.

Благодарности. Автор искренне благодарит своего научного руководителя Т. А. Суслину за руководство работой, полезные обсуждения и ценные советы.

Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, приводится обзор научной литературы по изучаемой проблеме, формулируются цель и задачи работы, кратко описываются основные результаты, обсуждается их новизна.

Первая глава посвящена абстрактной теоретико-операторной схеме, которая лежит в основе рассмотрений. Изучаются операторные семейства $A(t) = X(t)^*X(t)$ и $\mathfrak{B}(t,\varepsilon) = A(t) + \varepsilon(Y_2^*Y(t) + Y(t)^*Y_2) + \varepsilon^2 Q + \lambda\varepsilon^2 Q_0$, действующие в некотором гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. Здесь $t \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ — параметры, $X(t) = X_0 + tX_1$, $Y(t) = Y_0 + tY_1$. Предполагается, что для оператора $A(0)$ точка $\lambda_0 = 0$ является собственным значением конечной кратности n. Также предполагается, что операторы $Y(t)$, Y_2, Q в определённом смысле подчинены оператору $X(t)$. Оператор Q_0 ограничен и положительно определён, на параметр λ накладывается ограничение, обеспечивающее положительную определённость $\mathfrak{B}(t,\varepsilon)$.

У оператора $A(t)$ при $|t| \leqslant t^0$ на промежутке $[0,\delta]$ имеется ровно n собственных значений $\lambda_l(t)$ с учётом кратности (числа δ и t^0 контролируются явно). Эти собственные значения и отвечающие им собственные векторы φ_l аналитичны по t. Для *достаточно малого* t_* (где $0 < t_* \leqslant t^0$) при $|t| \leqslant t_*$ имеют место сходящиеся степенные разложения

$$\begin{aligned} &\lambda_l(t) = \gamma_l t^2 + \mu_l t^3 + \dots, \qquad \gamma_l \geqslant 0,\ \mu_l \in \mathbb{R}, \qquad l = 1,\dots,n, \\ &\varphi_l(t) = \omega_l + t\psi_l^{(1)} + \dots, \qquad l = 1,\dots,n. \end{aligned} \tag{11}$$

Коэффициенты этих разложений мы называем пороговыми характеристиками оператора $A(t)$ на краю спектра. Выделяется оператор S конечного ранга (так называемый *спектральный росток* операторного семейства $A(t)$), действующий в пространстве $\mathfrak{N} = \operatorname{Ker} A(0)$. Спектральный росток несёт информацию о пороговых характеристиках старшего порядка. Числа γ_l и элементы ω_l являются собственными для ростка S. Пусть $F(t)$ — спектральный проектор оператора $A(t)$ для промежутка $[0,\delta]$. Мы опираемся на пороговые аппроксимации для проектора $F(t)$ и для оператора $A(t)F(t)$, полученные в работах [4, гл. 1] и [5]:

$$\begin{aligned} &F(t) = P + \Phi(t), && \|\Phi(t)\| \leqslant C_1|t|, && |t| \leqslant t^0, \\ &A(t)F(t) = t^2 SP + t^3 K + \Psi(t), && \|\Psi(t)\| \leqslant C_2 t^4, && |t| \leqslant t^0. \end{aligned}$$

Здесь P — ортопроектор на подпространство $\mathfrak{N}$. Для наших рассмотрений важен блок оператора K в подпространстве $\mathfrak{N}$: $N = PKP$. Он допускает представление в терминах коэффициентов степенных разложений: $N = N_0 + N_*$, где

$$N_0 = \sum_{l=1}^{n} \mu_l (\cdot,\omega_l)\omega_l, \quad N_* = \sum_{l=1}^{n} \gamma_l \left((\cdot, P\psi_l^{(1)})\omega_l + (\cdot,\omega_l)P\psi_l^{(1)} \right).$$

В случае семейства $\mathfrak{B}(t,\varepsilon) =: \mathfrak{B}(\tau,\vartheta)$ аналогичные построения проводятся при помощи аналитической теории возмущений по параметру $\tau = \sqrt{t^2+\varepsilon^2}$. Выделяется оператор $\mathcal{S}(\vartheta)$, где $\vartheta = (\vartheta_1,\vartheta_2)$, $\vartheta_1 = t\tau^{-1}$, $\vartheta_2 = \varepsilon\tau^{-1}$, — спектральный росток семейства $\mathfrak{B}(\tau;\vartheta)$ при $\tau = 0$. Мы используем пороговые аппроксимации из [19] и [27].

В терминах спектральных ростков соответствующих семейств получены аппроксимации для операторов $\cos(\varepsilon^{-1}sA(t)^{1/2})$, $A(t)^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}sA(t)^{1/2})$, $e^{-i\varepsilon^{-2}sA(t)}$ и $e^{-i\varepsilon^{-2}s\mathfrak{B}(t,\varepsilon)}$, домноженных на подходящий "сглаживающий множитель" $\varepsilon^q(t^2+\varepsilon^2)^{-q/2}P$ (в приложениях к ДО такое домножение переходит в сглаживание):

– При $|\tau| \leqslant \tau^0$ выполнена оценка

$$\left\|e^{-i\varepsilon^{-2}s\mathfrak{B}(\tau;\vartheta)}P - e^{-i\varepsilon^{-2}s\tau^2\mathcal{S}(\vartheta)P}P\right\|\varepsilon^3(t^2+\varepsilon^2)^{-3/2} \leqslant C(1+|s|)\varepsilon.$$

– Пусть $N=0$ или $N_0=0$ (второе условие равносильно тому, что $\mu_l = 0$, $l=1,\dots,n$, в разложениях (11)). Тогда при $|t| \leqslant t^0$ (при $|t| \leqslant t^{00}$, если выполнено второе условие, где число $t^{00} \leqslant t^0$ зависит от расстояния между различными собственными числами ростка S) выполнены оценки

$$\begin{aligned}
&\left\|\cos(\varepsilon^{-1}sA(t)^{1/2})P - \cos(\varepsilon^{-1}s(t^2S)^{1/2}P)P\right\|\varepsilon^{3/2}(t^2+\varepsilon^2)^{-3/4} \\
&\qquad\qquad \leqslant C(1+|s|^{1/2})\varepsilon, \\
&\left\|A(t)^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}sA(t)^{1/2})P - (t^2S)^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}s(t^2S)^{1/2}P)P\right\| \\
&\qquad\qquad \times \varepsilon^{1/2}(t^2+\varepsilon^2)^{-1/4} \leqslant C(1+|s|^{1/2}), \\
&\left\|e^{-i\varepsilon^{-2}sA(t)}P - e^{-i\varepsilon^{-2}st^2SP}P\right\|\varepsilon^2(t^2+\varepsilon^2)^{-1} \leqslant C(1+|s|^{1/2})\varepsilon.
\end{aligned}$$

– Пусть $N=0$. Тогда при $|t| \leqslant t^0$ и $0<\varepsilon\leqslant 1$ выполнена оценка

$$\left\|e^{-i\varepsilon^{-2}s\mathfrak{B}(\tau;\vartheta)}P - e^{-i\varepsilon^{-2}s\tau^2\mathcal{S}(\vartheta)P}P\right\|\varepsilon^2(t^2+\varepsilon^2)^{-1} \leqslant C(1+|s|)\varepsilon.$$

Исследуется вопрос о точности результатов относительно сглаживающего множителя и зависимости от s.

Во **второй главе** изучаются оператор-функции $\cos(\varepsilon^{-1}s\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2})$, $\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}s\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2})$, $e^{-i\varepsilon^{-2}s\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})}$ и $e^{-i\varepsilon^{-2}s\widehat{\mathcal{B}}(\mathbf{k},\varepsilon)}$ от операторов, действующих в $L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)$ и заданных выражениями

$$\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k}) = b(\mathbf{D}+\mathbf{k})^*g(\mathbf{x})b(\mathbf{D}+\mathbf{k}), \tag{12}$$

$$\begin{aligned}\widehat{\mathcal{B}}(\mathbf{k},\varepsilon) = \widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k}) + \varepsilon\sum_{j=1}^d \bigl(a_j(\mathbf{x})(D_j+k_j) + (D_j+k_j)a_j(\mathbf{x})^*\bigr) \\ + \varepsilon^2\mathcal{Q}(\mathbf{x}) + \varepsilon^2\lambda\mathcal{Q}_0(\mathbf{x})\end{aligned} \tag{13}$$

с периодическими граничными условиями. Эти операторы возникают в результате масштабирования и применения теории Флоке–Блоха к операторам (1), (4). Мы полагаем $\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k}) = \widehat{\mathcal{A}}(t\boldsymbol{\theta})$ и $\widehat{\mathcal{B}}(\mathbf{k},\varepsilon) = \widehat{\mathcal{B}}(t\boldsymbol{\theta},\varepsilon)$, где $t = |\mathbf{k}|$, $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{k}/|\mathbf{k}| \in \mathbb{S}^{d-1}$, и изучаем соответствующие оператор-функции на основании схемы из первой главы. При этом построения зависят от параметра $\boldsymbol{\theta}$ и мы должны следить за равномерностью оценок по $\boldsymbol{\theta}$. В частности, от $\boldsymbol{\theta}$ зависят разложения (11) для первых n собственных значений оператора (12):

$$\widehat{\lambda}_l(t,\boldsymbol{\theta}) = \widehat{\gamma}_l(\boldsymbol{\theta})t^2 + \widehat{\mu}_l(\boldsymbol{\theta})t^3 + \dots, \qquad t \leqslant t_*(\boldsymbol{\theta}), \qquad l = 1,\dots,n.$$

Опишем спектральные ростки $\widehat{S}(\boldsymbol{\theta})$ и $\widehat{\mathcal{S}}(\vartheta,\boldsymbol{\theta})$ операторов $\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$ и $\widehat{\mathcal{B}}(\mathbf{k},\varepsilon)$ соответственно. Пусть $\widehat{\mathfrak{N}} = \{\mathbf{u} \in L_2(\Omega;\mathbb{C}^n) \colon \mathbf{u} = \mathbf{c} \in \mathbb{C}^n\}$ — подпространство констант, и пусть $\Lambda(\mathbf{x})$, $\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x})$ — Γ-периодические решения задач

$$b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x})(b(\mathbf{D})\Lambda(\mathbf{x}) + \mathbf{1}_m) = 0, \qquad \int_\Omega \Lambda(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = 0,$$

$$b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^d D_j a_j(\mathbf{x})^* = 0, \qquad \int_\Omega \widetilde{\Lambda}(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = 0.$$

Оператор $t^2\widehat{S}(\boldsymbol{\theta}) \colon \widehat{\mathfrak{N}} \to \widehat{\mathfrak{N}}$ действует как умножение на матрицу $b(\mathbf{k})^* g^0 b(\mathbf{k})$. Для оператора $\tau^2\widehat{\mathcal{S}}(\vartheta,\boldsymbol{\theta}) =: \widehat{L}(\mathbf{k},\varepsilon)$ справедливо представление

$$\widehat{L}(\mathbf{k},\varepsilon) = b(\mathbf{k})^* g^0 b(\mathbf{k}) - \varepsilon\,(b(\mathbf{k})^* V + V^* b(\mathbf{k})) \\ + \varepsilon \sum_{j=1}^d (\overline{a_j + a_j^*}) k_j + \varepsilon^2(-W + \overline{\mathcal{Q}} + \lambda\overline{\mathcal{Q}_0}).$$

Здесь g^0 — постоянная положительная матрица, называемая *эффективной* матрицей. Она определяется формулой

$$g^0 = |\Omega|^{-1} \int_\Omega \widetilde{g}(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}, \qquad \widetilde{g}(\mathbf{x}) := g(\mathbf{x})(b(\mathbf{D})\Lambda(\mathbf{x}) + \mathbf{1}_m).$$

Далее,

$$V := |\Omega|^{-1} \int_\Omega (b(\mathbf{D})\Lambda(\mathbf{x}))^* g(\mathbf{x})(b(\mathbf{D})\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x}))\,d\mathbf{x},$$

$$W := |\Omega|^{-1} \int_\Omega (b(\mathbf{D})\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x}))^* g(\mathbf{x})(b(\mathbf{D})\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x}))\,d\mathbf{x},$$

а верхняя черта означает взятие среднего значения по ячейке.

Оператор $\widehat{N}(\boldsymbol{\theta})$ допускает представление $\widehat{N}(\boldsymbol{\theta}) = b(\boldsymbol{\theta})^* L(\boldsymbol{\theta}) b(\boldsymbol{\theta})\widehat{P}$, где

$$L(\boldsymbol{\theta}) = |\Omega|^{-1} \int_\Omega (\Lambda(\mathbf{x})^* b(\boldsymbol{\theta})^* \widetilde{g}(\mathbf{x}) + \widetilde{g}(\mathbf{x})^* b(\boldsymbol{\theta})\Lambda(\mathbf{x}))\,d\mathbf{x},$$

а $\widehat{P}$ — ортопроектор на $\widehat{\mathfrak{N}}$. Условие $N = 0$ из первой главы сейчас имеет следующий вид.

Условие 1. $\widehat{N}(\boldsymbol{\theta}) = 0$ *при всех* $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$.

При реализации условия $N_0 = 0$ возникают осложнения, связанные с тем, что не всегда удаётся провести оценки равномерно по параметру $\boldsymbol{\theta}$. Приходится накладывать дополнительное условие. Приведём простейший его вариант.

Условие 2. а) $\widehat{N}_0(\boldsymbol{\theta}) = 0$ *при всех* $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$ ($\Longleftrightarrow$ $\widehat{\mu}_l(\boldsymbol{\theta}) = 0$ *при всех* $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$ *и всех* $l = 1, \dots, n$). б) *Количество различных собственных значений спектрального ростка* $\widehat{S}(\boldsymbol{\theta})$ *не зависит от* $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$.

Во второй главе изучаются также операторы вида $\mathcal{A}(\mathbf{k}) = f^*\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})f$ и $\mathcal{B}(\mathbf{k}, \varepsilon) = f^*\widehat{\mathcal{B}}(\mathbf{k}, \varepsilon)f$.

В **третьей главе** получены основные результаты работы. Введём эффективные операторы

$$\widehat{\mathcal{A}}^0 = b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D}), \tag{14}$$

$$\widehat{\mathcal{B}}^0 = \widehat{\mathcal{A}}^0 - (b(\mathbf{D})^* V + V^* b(\mathbf{D})) + \sum_{j=1}^{d} (\overline{a_j + a_j^*}) D_j + \overline{\mathcal{Q}} + \lambda \overline{\mathcal{Q}_0} - W. \tag{15}$$

Теорема 1. *При* $s \in \mathbb{R}$ *и* $\varepsilon > 0$ *справедлива оценка*

$$\| e^{-is\widehat{\mathcal{B}}_\varepsilon} - e^{-is\widehat{\mathcal{B}}^0} \|_{H^3(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathrm{C}(1 + |s|)\varepsilon. \tag{16}$$

Теорема 2. *Пусть выполнено условие* 1 *или условие* 2*. Тогда при* $s \in \mathbb{R}$ *и* $\varepsilon > 0$ *справедливы оценки*

$$\left\| \cos(s\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2}) - \cos(s(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2}) \right\|_{H^{3/2}(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathrm{C}(1 + |s|^{1/2})\varepsilon, \tag{17}$$

$$\begin{aligned} \left\| \widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{-1/2} \sin(s\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2}) - (\widehat{\mathcal{A}}^0)^{-1/2} \sin(s(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2}) \right\|_{H^{1/2}(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \\ \leqslant \mathrm{C}(1 + |s|^{1/2})\varepsilon, \end{aligned} \tag{18}$$

$$\left\| e^{-is\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon} - e^{-is\widehat{\mathcal{A}}^0} \right\|_{H^2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathrm{C}(1 + |s|^{1/2})\varepsilon. \tag{19}$$

Теорема 3. *Пусть выполнено условие* 1*. Тогда при* $s \in \mathbb{R}$ *и* $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *справедлива оценка*

$$\left\| e^{-is\widehat{\mathcal{B}}_\varepsilon} - e^{-is\widehat{\mathcal{B}}^0} \right\|_{H^2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathrm{C}(1 + |s|)\varepsilon. \tag{20}$$

Мы подтверждаем точность оценок (7), (8), (16)–(19) относительно типа операторной нормы, а также точность оценок (6)–(8), (17)–(19) относительно зависимости от s. Приведём пару утверждений такого рода.

Теорема 4. *Пусть $\widehat{N}_0(\boldsymbol{\theta}_0) \neq 0$ при некотором $\boldsymbol{\theta}_0 \in \mathbb{S}^{d-1}$ ($\Longleftrightarrow \widehat{\mu}_l(\boldsymbol{\theta}_0) \neq 0$ при некотором $\boldsymbol{\theta}_0 \in \mathbb{S}^{d-1}$ и некотором $l = 1, \dots, n$).*

а) *Пусть $0 \neq s \in \mathbb{R}$ и $0 \leqslant q_1 < 2$. Тогда не существует такой постоянной $\mathcal{C}(s) > 0$, чтобы при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ выполнялась оценка*

$$\| \cos(s\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2}) - \cos(s(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2}) \|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathcal{C}(s)\varepsilon. \tag{21}$$

б) *Пусть $0 \neq s \in \mathbb{R}$ и $0 \leqslant q_2 < 1$. Тогда не существует такой постоянной $\mathcal{C}(s) > 0$, чтобы при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ выполнялась оценка*

$$\| \widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{-1/2} \sin(s\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2}) - (\widehat{\mathcal{A}}^0)^{-1/2} \sin(s(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2}) \|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathcal{C}(s)\varepsilon. \tag{22}$$

Теорема 5. *Пусть $\widehat{N}_0(\boldsymbol{\theta}_0) \neq 0$ при некотором $\boldsymbol{\theta}_0 \in \mathbb{S}^{d-1}$ ($\Longleftrightarrow \widehat{\mu}_l(\boldsymbol{\theta}_0) \neq 0$ при некотором $\boldsymbol{\theta}_0 \in \mathbb{S}^{d-1}$ и некотором $l = 1, \dots, n$).*

а) *Пусть $q_1 \geqslant 2$. Тогда не существует положительной функции $\mathcal{C}(s)$ такой, что $\lim_{s\to\infty} \mathcal{C}(s)/|s| = 0$ и при $s \in \mathbb{R}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$ выполнено (21).*

б) *Пусть $q_2 \geqslant 1$. Тогда не существует положительной функции $\mathcal{C}(s)$ такой, что $\lim_{s\to\infty} \mathcal{C}(s)/|s| = 0$ и при $s \in \mathbb{R}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$ выполнено (22).*

в) *Пусть $q_3 \geqslant 3$. Тогда не существует положительной функции $\mathcal{C}(s)$ такой, что $\lim_{s\to\infty} \mathcal{C}(s)/|s| = 0$ и при $s \in \mathbb{R}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$ выполнена оценка*

$$\| e^{-is\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon} - e^{-is\widehat{\mathcal{A}}^0} \|_{H^{q_3}(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathcal{C}(s)\varepsilon.$$

С помощью интерполяции мы получаем также оценки в $(H^q \to L_2)$-нормах. Например, для оператора из (16) в общем случае справедлива оценка $(H^q \to L_2)$-нормы порядка $O((1+|s|)^{q/3}\varepsilon^{q/3})$ при $0 \leqslant q \leqslant 3$. Получаются также квалифицированные оценки погрешности при малом ε и большом s: в условиях теорем 1 и 3 можно рассматривать $s = O(\varepsilon^{-\alpha})$ при $0 < \alpha < 1$, в условиях теоремы 2 можно рассматривать $s = O(\varepsilon^{-\alpha})$ при $0 < \alpha < 2$, что представляет интерес для приложений.

В случае более общих операторов (5) аналоги этих результатов получены для операторов $\cos(s\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})$, $\mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2}\sin(s\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})$, $e^{-is\mathcal{A}_\varepsilon}$ и $e^{-is\mathcal{B}_\varepsilon}$, окаймлённых подходящими множителями (например, для $f^\varepsilon \cos(s\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})(f^\varepsilon)^{-1}$). Результаты, сформулированные в операторных терминах, применяются к усреднению решений задач Коши для гиперболических уравнений и для нестационарных уравнений типа Шрёдингера. Приведены подкрепляющие примеры, рассмотрены приложения к конкретным уравнениям математической физики: уравнению акустики, системе теории упругости, нестационарному магнитному уравнению

Шрёдингера и двумерному волновому уравнению Паули с сингулярными быстро осциллирующими потенциалами. Показано, что для уравнения акустики и нестационарного магнитного уравнения Шрёдингера справедливы усиленные оценки (17), (18), (20), а для системы теории упругости (даже в случае изотропной среды) и уравнения Паули нет улучшений.

Публикации автора по теме диссертации

A1. *Дородный*, *М. А.* Усреднение гиперболических уравнений [Текст] / М. А. Дородный, Т. А. Суслина // Функц. анализ и его прил. — 2016. — Т. 50, № 4. — С. 91—96.

A2. *Dorodnyi*, *M. A.* Spectral approach to homogenization of hyperbolic equations with periodic coefficients [Текст] / M. A. Dorodnyi, T. A. Suslina // J. Differential Equations. — 2018. — Vol. 264, no. 12. — P. 7463—7522.

A3. *Дородный*, *М. А.* Усреднение периодических уравнений типа Шрёдингера при включении членов младшего порядка [Текст] / М. А. Дородный // Алгебра и анализ. — 2019. — Т. 31, № 6. — С. 122—196.

A4. *Dorodnyi*, *M. A.* Operator error estimates for homogenization of the nonstationary Schrödinger type equations: sharpness of the results [Электронный ресурс] / M. A. Dorodnyi // Appl. Anal. — 2021. — Режим доступа: http://dx.doi.org/10.1080/00036811.2021.1901886.

A5. *Дородный*, *М. А.* Операторные оценки погрешности при усреднении гиперболических уравнений [Текст] / М. А. Дородный, Т. А. Суслина // Функц. анализ и его прил. — 2020. — Т. 54, № 1. — С. 69—74.

A6. *Дородный*, *М. А.* Усреднение гиперболических уравнений с периодическими коэффициентами в $\mathbb{R}^d$: точность результатов [Текст] / М. А. Дородный, Т. А. Суслина // Алгебра и анализ. — 2020. — Т. 32, № 4. — С. 3—136.

Список литературы

1. *Bensoussan*, *A.* Asymptotic analysis for periodic structures [Текст] / A. Bensoussan, J.-L. Lions, G. Papanicolaou. — Amsterdam : North-Holland, 1978. — 699 p. — (Studies in mathematics and its applications ; 5).

2. *Бахвалов*, *Н. С.* Осреднение процессов в периодических средах [Текст] / Н. С. Бахвалов, Г. П. Панасенко. — М. : Наука, 1984. — 352 с.

3. *Жиков*, *В. В.* Усреднение дифференциальных операторов [Текст] / В. В. Жиков, С. М. Козлов, О. А. Олейник. — М. : Физматлит, 1993. — 464 с.

4. *Бирман, М. Ш.* Периодические дифференциальные операторы второго порядка. Пороговые свойства и усреднения [Текст] / М. Ш. Бирман, Т. А. Суслина // Алгебра и анализ. — 2003. — Т. 15, № 5. — С. 1—108.
5. *Бирман, М. Ш.* Пороговые аппроксимации резольвенты факторизованного самосопряжённого семейства с учётом корректора [Текст] / М. Ш. Бирман, Т. А. Суслина // Алгебра и анализ. — 2005. — Т. 17, № 5. — С. 69—90.
6. *Бирман, М. Ш.* Усреднение периодических эллиптических дифференциальных операторов с учётом корректора [Текст] / М. Ш. Бирман, Т. А. Суслина // Алгебра и анализ. — 2005. — Т. 17, № 6. — С. 1—104.
7. *Бирман, М. Ш.* Усреднение периодических дифференциальных операторов с учётом корректора. Приближение решений в классе Соболева $H^1(\mathbb{R}^d)$ [Текст] / М. Ш. Бирман, Т. А. Суслина // Алгебра и анализ. — 2006. — Т. 18, № 6. — С. 1—130.
8. *Севостьянова, Е. В.* Асимптотическое разложение решения эллиптического уравнения второго порядка с периодическими быстро осциллирующими коэффициентами [Текст] / Е. В. Севостьянова // Матем. сб. — 1981. — Т. 115, № 2. — С. 204—222.
9. *Жиков, В. В.* Спектральный подход к асимптотическим задачам диффузии [Текст] / В. В. Жиков // Дифф. уравнения. — 1989. — Т. 25, № 1. — С. 44—50.
10. *Conca, C.* Bloch approximation in homogenization and applications [Текст] / C. Conca, R. Orive, M. Vanninathan // SIAM J. Math. Anal. — 2002. — Vol. 33, no. 5. — P. 1166—1198.
11. *Суслина, Т. А.* Об усреднении периодических параболических систем [Текст] / Т. А. Суслина // Функц. анализ и его прил. — 2004. — Т. 38, № 4. — С. 86—90.
12. *Василевская, Е. С.* Усреднение параболической задачи Коши с периодическими коэффициентами при учёте корректора [Текст] / Е. С. Василевская // Алгебра и анализ. — 2009. — Т. 21, № 1. — С. 3—60.
13. *Suslina, T. A.* Homogenization of a periodic parabolic Cauchy problem in the Sobolev space $H^1(\mathbb{R}^d)$ [Текст] / T. A. Suslina // Math. Model. Nat. Phenom. — 2010. — Vol. 5, no. 4. — P. 390—447.
14. *Жиков, В. В.* Об операторных оценках в теории усреднения [Текст] / В. В. Жиков // Докл. РАН. — 2005. — Т. 403, № 3. — С. 305—308.
15. *Zhikov, V. V.* On operator estimates for some problems in homogenization theory [Текст] / V. V. Zhikov, S. E. Pastukhova // Russ. J. Math. Phys. — 2005. — Vol. 12, no. 4. — P. 515—524.
16. *Zhikov, V. V.* Estimates of homogenization for a parabolic equation with periodic coefficients [Текст] / V. V. Zhikov, S. E. Pastukhova // Russ. J. Math. Phys. — 2006. — Vol. 13, no. 2. — P. 224—237.

17. *Жиков, В. В.* Операторные оценки в теории усреднения [Текст] / В. В. Жиков, С. Е. Пастухова // Успехи матем. наук. — 2016. — Т. 71, № 3. — С. 27—122.

18. *Борисов, Д. И.* Асимптотики решений эллиптических систем с быстро осциллирующими коэффициентами [Текст] / Д. И. Борисов // Алгебра и анализ. — 2008. — Т. 20, № 2. — С. 19—42.

19. *Суслина, Т. А.* Усреднение в классе Соболева $H^1(\mathbb{R}^d)$ для периодических эллиптических дифференциальных операторов второго порядка при включении членов первого порядка [Текст] / Т. А. Суслина // Алгебра и анализ. — 2010. — Т. 22, № 1. — С. 108—221.

20. *Мешкова, Ю. М.* Усреднение задачи Коши для параболических систем с периодическими коэффициентами [Текст] / Ю. М. Мешкова // Алгебра и анализ. — 2013. — Т. 25, № 6. — С. 125—177.

21. *Бирман, М. Ш.* Операторные оценки погрешности при усреднении нестационарных периодических уравнений [Текст] / М. Ш. Бирман, Т. А. Суслина // Алгебра и анализ. — 2008. — Т. 20, № 6. — С. 30—107.

22. *Meshkova, Y. M.* On operator error estimates for homogenization of hyperbolic systems with periodic coeffcients [Текст] / Y. M. Meshkova. — to appear in J. Spectral Theory.

23. *Мешкова, Ю. М.* Об усреднении периодических гиперболических систем [Текст] / Ю. М. Мешкова // Математ. заметки. — 2019. — Т. 105, № 6. — С. 937—942.

24. *Suslina, T. A.* Spectral approach to homogenization of nonstationary Schrödinger-type equations [Текст] / T. A. Suslina // J. Math. Anal. Appl. — 2017. — Vol. 446, no. 2. — P. 1466—1523.

25. *Дородный, М. А.* Усреднение нестационарного модельного уравнения электродинамики [Текст] / М. А. Дородный, Т. А. Суслина // Математ. заметки. — 2017. — Т. 102, № 5. — С. 700—720.

26. *Dorodnyi, M. A.* Homogenization of nonstationary periodic Maxwell system in the case of constant permeability [Электронный ресурс] / M. A. Dorodnyi, T. A. Suslina // препринт. — 2020. — Режим доступа: arXiv:2008.03047.

27. *Суслина, Т. А.* Аппроксимация резольвенты двупараметрического квадратичного операторного пучка вблизи нижнего края спектра [Текст] / Т. А. Суслина // Алгебра и анализ. — 2013. — Т. 25, № 5. — С. 221—251.

Дородный Марк Александрович

Усреднение нестационарных периодических уравнений

Автореф. дис. на соискание учёной степени канд. физ.-мат. наук

Подписано в печать ___.___._____. Заказ № ____________
Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 1. Тираж 100 экз.
Типография _______________________________________