На правах рукописи

Каплун Александр Владимирович

Алгебра эйконалов метрического графа

Специальность 01.01.03 —
«математическая физика»

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург — 2022

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук **Белишев Михаил Игоревич**
Официальные оппоненты:	**Пестов Леонид Николаевич,** доктор физико-математических наук, профессор, ФГАОУ ВО «Балтийский федеральный университет имени Иммануила Канта», заведующий лабораторией трехмерной сейсморазведки и обратных задач волновых процессов НИИ прикладной информатики и математической геофизики
	Сарафанов Олег Васильевич, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры Высшей Математики и Математической Физики физического факультета СПбГУ
Ведущая организация:	Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»

Защита состоится 12 сентября 2022 г. в ______ часов на заседании диссертационного совета Д 002.202.01 при ФГБУН ПОМИ РАН по адресу: 191023, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки 27, к. 311.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГБУН ПОМИ РАН и на сайте http://www.pdmi.ras.ru/pdmi/diss-council/.

Отзывы на автореферат в двух экземплярах, заверенные печатью учреждения, просьба направлять по адресу: 191023, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки 27, к. 311, ученому секретарю диссертационного совета Д 002.202.01.

Автореферат разослан "___" _______ 2022 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д 002.202.01,
кандидат физ.-мат. наук Рядовкин Кирилл Сергеевич

Общая характеристика работы

Актуальность темы.

Данную работу можно позиционировать следующим образом. Существует подход к обратным задачам математической физики – метод граничного управления (BC-метод). Подход имеет выражено междисциплинарный характер: он основан на связях обратных задач с теорией систем и теорией управления, использует асимптотические методы, функциональный анализ, теорию операторов и др. Разработана алгебраическая версия BC-метода, основанная на связях с банаховыми алгебрами, давшая новое решение задачи реконструкции риманова многообразия по граничным данным. Планируется применение этой версии к обратным задачам на графах. Диссертация – шаг в этом направлении.

Алгебраическая версия основана на фундаментальном факте: топологическое пространство характеризуется адекватной алгеброй. Как пример, компактное хаусдорфово пространство Ω с точностью до гомеоморфизма определяется алгеброй непрерывных функций $\mathfrak{A} = C(\Omega)$ (И.М. Гельфанд, 1946 г.). При этом, спектр алгебры, – множество $\widehat{\mathfrak{A}}$ ее неприводимых представлений, снабженное адекватной топологией, – гомеоморфен пространству: $\widehat{\mathfrak{A}} \cong \Omega$. Как следствие, располагая любым представлением $\mathfrak{A}'$ алгебры $\mathfrak{A}$, и находя его спектр $\widehat{\mathfrak{A}'} \cong \widehat{\mathfrak{A}} \cong \Omega$, мы получаем гомеоморфную копию пространства Ω. По этой схеме решается задача реконструкции: из данных обратной задачи извлекается представление $\mathfrak{A}'$ и находится его спектр $\widehat{\mathfrak{A}'}$, который и доставляет решение задачи – гомеоморфную копию подлежащего восстановлению многообразия Ω. Содержательная часть подхода заключается в нахождении алгебры $\mathfrak{A}'$ по известным данным. В качестве последней используется алгебра эйконалов $\mathfrak{E}$, определяемая динамической системой, которая описывает распространение волн в Ω.

Варианты BC-метода для обратных задач на графах предложены в работах М.И. Белишева, А.Ф. Вакуленко и Н. Вада. Версия, использующая алгебру эйконалов, инициирована в статье М.И. Белишева и Н. Вада в 2015 году и дополнена в [1]—[3]. Общее направление данного подхода – изучение связей между свойствами алгебры $\mathfrak{E}$ (блочной структурой, алгебраическими инвариантами, представлениями) и геометрией графа. Перспективная цель – решение обратной задачи, состоящей в реконструкции графа по его граничным данным. Обратые задачи на графах – вполне актуальная тема. Различные постановки и подходы содержатся в работах С.А. Авдонина, П.Б. Курасова, П.Кучмента, А.С. и В.С. Михайловых, В.А. Юрко. Имеется содержательный обзор П.А. Кучмента и Г.М. Берколайко по всей тематике квантовых графов, в том числе и обратным задачам для них.[1]

[1] G. Berkolaiko и P. Kuchment, *Introduction to quantum graphs*. American Mathematical Soc., 2013.

Без потери общности метрический граф Ω можно представлять как связный компактный граф в $\mathbb{R}^3$, состоящий и гладких кривых (ребер), скрепленных во внутренних вершинах. Имеются граничные вершины $\{\gamma_1,\dots,\gamma_n\} = \Gamma$, из которых выходит по одному ребру. Метрика (внутреннее расстояние) в Ω индуцирована евклидовой метрикой из $\mathbb{R}^3$.

Ребра графа "материальны": вдоль них распространяются колебания (волны), инициированные точечными источниками (управлениями), которые помещены в граничных вершинах. Волны движутся от границы с единичной скоростью, постепенно заполняя граф. Процесс описывается динамической системой

$$\begin{aligned} & u_{tt} - \Delta u = 0 && \text{в } \mathscr{H},\ \ 0 < t < T, \\ & u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0 && \text{в } \Omega, \\ & u = f && \text{в } \Gamma \times [0,T], \end{aligned}$$

где $\mathscr{H} = L_2(\Omega)$, Δ – Лапласиан, определенный на гладких функциях, удовлетворяющих условиям сшивания (Кирхгофа) во внутренних вершинах; $f = f(\gamma,t)$ – граничное управление класса $L_2(\Gamma \times [0,T]) =: \mathscr{F}^T$; $u = u^f(x,t)$ - решение (волна), $u^f(\cdot,t) \in \mathscr{H}$ при $0 \leqslant t \leqslant T$.

Имеется возможность управлять волнами не со всей границы, а с ее части $\Sigma \subset \Gamma$: в этом случае используются управления класса $\mathscr{F}^T_\Sigma := \{f \in \mathscr{F}^T \mid \operatorname{supp} f \subset \Sigma \times [0,T]\} = \oplus \sum\limits_{\gamma \in \Sigma} \mathscr{F}^T_\gamma$.

Каждой граничной вершине сопоставлено семейство достижимых множеств $\mathscr{U}^t_\gamma := \{u^f(\cdot,t) \mid f \in \mathscr{F}^T_\gamma\}$, $0 \leqslant t \leqslant T$ и соответствующих проекторов P^t_γ в $\mathscr{H}$ на $\mathscr{U}^t$. Оператор $E^T_\gamma := \int_0^T t\, dP^t_\gamma$ называется эйконалом, отвечающим вершине γ. Эйконалы суть самосопряженные операторы – элементы алгебры ограниченных операторов $\mathfrak{B}(\mathscr{H})$.

Для C^*-алгебры $\mathfrak{A}$ и множества $S \subset \mathfrak{A}$, через $\vee S$ обозначим C^*-алгебру, порожденную этим множеством, т.е. минимальную C^*-подалгебру в $\mathfrak{A}$, содержащую S. Алгебра эйконалов, отвечающая выделенному семейству граничных вершин $\Sigma \subset \Gamma$, есть операторная C^*-алгебра

$$\mathfrak{E}^T_\Sigma := \vee\{E^T_\gamma \mid \gamma \in \Sigma\} \subset \mathfrak{B}(\mathscr{H})\,.$$

Алгебра эйконалов относится к классу C^*-алгебр с конечномерными представлениями разных размерностей (субоднородные C^*-алгебры). Однородные алгебры (алгебры с представлениями одной конечной размерности) изучались, начиная с 1960-х годов, в работах Фелла, Томиямы и Такесаки. В них для однородных алгебр построены функциональные модели в виде операторных полей над топологическими пространствами. Позже такие алгебры исследовались в работах Капланского, Фелла, Эффроса, Бунса и Дедденса.

В диссертации строится функциональная модель алгебры эйконалов, близкая по характеру к моделям Васильева[2] и Немеца.[3]

Целью данной работы является исследование алгебры эйконалов: получение канонического представления, описание ее спектра, связи спектра с геометрией графа.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Найти каноническое представление алгебры эйконалов, позволяющее дать эффективное описание ее спектра.
2. Построить функциональную модель, основанную на каноническом представлении.
3. Изучить связь функциональной модели с геометрией графа.

Научная новизна: Все результаты диссертации являются новыми.

Практическая значимость Работа имеет теоретический характер.

Методология и методы исследования. Используются методы теории управления, результаты теории уравнений в частных производных на графах, теория самосопряженных операторов, теория C^*−алгебр.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Каноническое представление алгебры эйконалов метрического графа.
2. Описание спектра алгебры эйконалов и его координатизация.
3. Реализация алгебры в виде функциональной модели на ее спектре.
4. Установление связи между структурой спектра алгебры эйконалов и геометрией графа.

Достоверность полученных результатов обеспечивается строгостью математических методов, используемых при исследовании.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на научных семинарах и коференциях. В их числе:

– Международная конференция "Days on Diffraction 2019", 3 – 7 июня, 2019, Санкт-Петербург
– Международная конференция "Mathematical challenge of quantum transport in nanosystems – Pierre Duclos workshop", 19 – 20 сентября, 2019, Санкт-Петербург
– Analytical Modeling and Approximation Methods Workshop, March 4 – 8, 2020, Berlin
– Международная конференция "Mathematical challenge of quantum transport in nanosystems – Pierre Duclos workshop", 14 – 16 сентября, 2020, Санкт-Петербург

[2] Н. Б. Васильев, «С*-алгебры с конечномерными представлениями,» *Усп. Мат. Наук*, т. 21, № 1, с. 135—154, 1966.

[3] P. Niemiec, «Models for subhomogeneous c*-algebras,» *Colloquium Mathematicum*, т. 166, с. 75—106, 2021.

– Международная конференция "Days on Diffraction 2021", 31 мая – 4 июня, 2021, Санкт-Петербург
– Международная конференция "Days on Diffraction 2022", 30 мая – 3 июня, 2022, Санкт-Петербург
– доклады на Санкт-Петербургском семинаре по дифракции и распространению волн, ПОМИ РАН

Личный вклад. Результаты диссертации, относящиеся к каноническому представлению алгебры эйконалов изложены в совместных с М. И. Белишевым статьях [1], [3]. В них вклад соавтора (научного руководителя) состоит в постановке задач и определении общего направления и подходов к их решению. Вклад соискателя заключается в реализации предложенных идей и составляет основную содержательную часть этих работ. Им же в [3] введено понятие граничной алгебры, сыгравшее важную роль в описании связей между блоками алгебры эйконалов, и доказана теорема, описывающая подобные связи на абстрактном уровне. Также соискателем установлена связь между факторизованным спектром и остовом графа. Результаты работы [2] получены соискателем лично.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 3 статьях, опубликованных в журналах, рекомендованных ВАК. Все эти журналы входят в реферативные базы данных Web of Science и Scopus.

Содержание работы

Во **Введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, приводится обзор научной литературы по изучаемой проблеме, формулируется цель, ставятся задачи работы, излагается научная новизна и практическая значимость представляемой работы.

Первая глава посвящена описанию динамики волн на метрическом графе и построению разбиения графа на семейства интервалов, которые позволят описывать набор эйконалов одновременно в простой параметрической форме.

В **разделе 1.1** дается определение метрического графа Ω, как метрического пространства, локально изометричного стандартным объектам (звездам и интервалам).

В **разделе 1.2** вводятся функциональные пространства на графе ($L_2(\Omega)$, $\mathcal{H}^2(\Omega)$) и определяется оператор Лапласа Δ.

В **разделе 1.3** описывается динамическая система:

$$\begin{array}{ll} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{в } \mathscr{H},\ \ 0 < t < T; \\ u(\cdot,t) \in \mathscr{K} & \text{при } \ 0 \leqslant t \leqslant T; \\ u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0 & \text{в } \ \Omega; \\ u = f & \text{на } \ \Gamma \times [0,T], \end{array}$$

которая описывает распространение волн в графе. Здесь $\mathscr{H} = L_2(\Omega)$, а $\mathscr{K}$ – класс гладких функций на графе, удовлетворяющих условиям Кирхгофа в его вершинах. Роль источников играют граничные управления $f \in L_2(\Gamma \times [0,T])$, локализованные в граничных вершинах Γ. Через $u = u^f(x,t)$ обозначается решение системы (волна).

В **разделе 1.4** вводится фундаментальное решение этой системы, отвечающее источнику в одной вершине $\gamma \in \Gamma$, и описываются детали его структуры, отвечающие распространению сингулярностей в графе. В **разделах 1.4.1, 1.4.2 и 1.4.3** рассматриваются прохождение $\delta-$функции через первое ребро, через внутреннюю вершину и отражение от граничной вершины. В **разделе 1.4.4** предлагается формализм ("динамика импульсов"), дающий детерминированное описание фундаментального решения.

В **разделе 1.5** определяются пространственно-временные графы (гидры H_γ, H_γ^T), являющиеся носителем фундаментального решения. Вводится кусочно-постоянная функция на гидре – амплитуда $a_\gamma(x,t)$. С ее использованием устанавливается эффективное представление решений динамической системы.

В **разделе 1.6** описывается разбиение захваченной волнами области графа $\overline{\Omega^T[\gamma]}$ на семейства Φ, определяемое структурой гидры H_γ^T. В **разделе 1.6.1** определяется транзитивное замыкание отношения – минимальное расширение рефлексивного и симметричного отношения до отношения эквивалентности. В **разделе 1.6.2** с его использованием определяются отношения эквивалентности на гидре и графе. Символом $\Lambda_\gamma[x]$ обозначается класс эквивалентности точки x на графе. В **разделе 1.6.3** вводятся угловые точки на гидре $\mathrm{Corn} H_\gamma^T$ – вершины гидры H_γ^T. Проекции угловых точек на $\overline{\Omega^T[\gamma]}$ составляют множество критических точек Θ. В **разделе 1.6.4** показывается, что критические точки разбивают область $\overline{\Omega^T[\gamma]}$ на семейства Φ, каждое из которых состоит из интервалов одинаковой длины (клеток). Это разбиение порождает разбиение временного интервала $[0,T]$ на клетки той же длины. Соответствие между клетками семейств Φ и клетками интервала $[0,T]$ устанавливается линейными функциями τ.

В **разделе 1.7** вводятся амплитудные векторы. В **разделе 1.7.1** с помощью амплитудной функции $a_\gamma(x,t)$ определяется $\alpha-$набор амплитудных векторов и устанавливается их линейная независимость при временах T меньших времени заполнения графа волнами с вершины γ. В **разделе 1.7.2** с использованием ортогонализации по Шмидту $\alpha-$набор преобразуется в ортонормированную систему векторов ($\beta-$набор).

В **разделе 1.8** вводится гидра H^T_Σ, отвечающая случаю, когда волны создаются управлениями, действующими с фиксированного множества граничных вершин $\Sigma \subset \Gamma$. На этот случай обобщаются определения и понятия, введенные выше. В частности вводится $\Lambda_\Sigma[x]$ – аналог множеств $\Lambda_\gamma[x]$.

Вторая глава посвящена определению эйконалов, их представлению в параметрической форме и исследованию некоторых свойств образованной ими алгебры.

В **разделе 2.1** определяются достижимые множества $\mathscr{U}^s_\gamma$

$$\mathscr{U}^s_\gamma := \left\{u^f(\cdot,s) \mid f \in \mathscr{F}^T_\gamma\right\} \subset \mathscr{H}, \qquad 0 \leqslant s \leqslant T.$$

Далее рассматриваются проекторы P^s_γ в $\mathscr{H}$ на $\mathscr{U}^s_\gamma$ и строится их матричное представление на отдельных семействах Φ через $\beta-$наборы амплитудных векторов.

В **разделе 2.2** дается определение эйконала E^T_γ – самосопряженного ограниченного оператора, задаваемого семейством проекторов P^T_γ:

$$E^T_\gamma : \mathscr{H} \to \mathscr{H}, \quad E^T_\gamma := \int_0^T s\, dP^s_\gamma.$$

Описывается действие эйконала на отдельных семействах Φ в терминах $\beta-$наборов амплитудных векторов и функций τ. Приводятся общие характеристики спектра E^T_γ.

В **разделе 2.3** вводится параметрическое представление для эйконалов, определяемое разбиением области графа $\overline{\Omega^T[\Sigma]}$ на семейства Φ. В **разделе 2.3.1** определяется параметризация отдельного семейства Φ, а также строится унитарный оператор U_Φ параметризующий эйконалы на этом семействе. В **разделе 2.3.2** определяется унитарный оператор U, переводящий все эйконалы в параметрическую форму на области $\overline{\Omega^T[\Sigma]}$:

$$UL_2(\Omega^T[\Sigma]) = \oplus \sum_{\Phi\subset\Pi_\Sigma} L_2([0,\epsilon_\Phi];\mathbb{R}^{m_\Phi})\,;$$

$$UE^T_\gamma U^{-1} \,=\, \oplus \sum_{\Phi\subset\Pi_\Sigma} U_\Phi\, E^T_\gamma\langle\Phi\rangle\, U^{-1}_\Phi \,=\, \oplus \sum_{\Phi\subset\Pi_\Sigma} \sum_{i=1}^{n_{\gamma\Phi}} \tau^i_{\gamma\Phi}(\cdot) P^i_{\gamma\Phi} \quad \gamma \in \Sigma, \qquad (1)$$

где $\tau^i_{\gamma\Phi}$ – линейные функции, отвечающие всем семействам Φ и вершинам $\gamma \in \Sigma$, а $P^i_{\gamma\Phi}$ – одномерные проекторы, определяемые $\beta-$наборами.

В **разделе 2.4** определяются смещенные эйконалы:

$$\dot{E}^T_\gamma := \int_0^T (s+1)\, dP^s_\gamma = E^T_\gamma + P^T_\gamma.$$

Они удобней тем, что их абсолютно непрерывные спектры отделены от 0.

В **разделе 2.5** приводятся общие сведения о C^*-алгебрах(**разде 2.5.1**). Вводятся стандартные алгебры и алгебра эйконалов, являющаяся основным объектом диссертации. В **разделе 2.5.2** определяются стандартные алгебры

$$\dot{C}([a,b];\mathbb{M}^n) := \{\phi \in C([a,b];\mathbb{M}^n) \mid \ \phi(a) \in \mathbb{M}_a,\, \phi(b) \in \mathbb{M}_b\} \ ,$$

где $\mathbb{M}_a$,$\mathbb{M}_b$ суть C^*-подалгебры $\mathbb{M}^n$, и описывается их спектр. В **разделе 2.5.3** вводится C^*-алгебра эйконалов:

$$\dot{\mathfrak{E}}^T_\Sigma := \vee\{\dot{E}^T_\gamma \mid \gamma \in \Sigma\} \subset \mathfrak{B}(\mathscr{H})$$

определяемая ее образующими $\dot{E}^T_\gamma$ и ее C^*-подалгебры

$$\dot{\mathfrak{E}}^T_\gamma \ := \ \vee\dot{E}^T_\gamma, \qquad \gamma \in \Sigma.$$

Эти подалгебры изометричны алгебрам $C(\sigma_{\,\rm ac}(\dot{E}^T_\gamma))$ непрерывных функций на абсолютно непрерывном спектре $\dot{E}^T_\gamma$. Далее рассматриваются только смещенные эйконалы и, упрощая обозначения, мы всюду опускаем $\dot{()}$.

Третья глава посвящена описанию абстрактных матричных алгебр, порожденных одномерными проекторами. Исследуется блочная структура таких алгебр, а также формулируется критерий связи между блоками.

В **разделе 3.1** определяется алгебра, образованная одномерными проекторами. Описывается ее приведение к ортогональной сумме неприводимых блоков с помощью отношения эквивалентности на наборе образующих (проекторов).

В **разделе 3.2** рассматривается абстрактный вариант алгебры со связями между блоками.

В **разделе 3.3** описывается критерий, устанавливающий наличие или отсутствие связей между двумя блоками. В **разделе 3.2.1** доказывается Теорема 1, дающая необходимые условия, при которых блоки алгебры оказываются связанными. В **разделе 3.2.2** необходимые условия дополняются до критерия, устанавливающего наличие связей между блоками.

В **разделе 3.4** Теорема 1 обобщается на случай алгебры с любым конечным числом блоков (Теорема 2).

В **четвертой главе** приводится каноническое представление алгебры эйконалов и описывается процедура перехода к нему.

В **разделе 4.1** вводится и изучается параметрическое представление

$$U\,\mathfrak{E}^T_\Sigma\,U^{-1} \ = \\ = \vee\left\{\oplus\sum_{\Phi\subset\Pi_\Sigma}\sum_{i=1}^{n_{\gamma\Phi}}\tau^i_{\gamma\Phi}(\cdot)\,P^i_{\gamma\Phi}\ \middle|\ \gamma\in\Sigma\right\}\subset\bigoplus_{\Phi\subset\Pi_\Sigma}C([0,\epsilon_\Phi],\mathbb{M}^{m_\Phi}),$$

согласованное с представлением (1). В **<u>разделе 4.1.1</u>** вводится удобная форма записи параметрического представления:

$$\left(UE_\gamma^T U^{-1}\right)(\mathbf{r}) = \oplus \sum_{j=1}^{J} \sum_{i=1}^{n_{\gamma\Phi j}} \tau^i_{\gamma\Phi^j}(r_j)\, P^i_{\gamma\Phi^j}\,,$$

где $\mathbf{r} = (r_1,\ldots,r_J) \in [0,\varepsilon_1] \times \cdots \times [0,\varepsilon_J]$. Для каждого $\mathbf{r}$ определяются матричные алгебры

$$(U\mathfrak{E}_\Sigma^T U^{-1})(\mathbf{r}) := \vee\{(UE_\gamma^T U^{-1})(\mathbf{r}) \mid \gamma \in \Sigma\} \subset \bigoplus_{j=1}^{J} \mathbb{M}^{m_{\Phi^j}}.$$

В **<u>разделе 4.1.2</u>** алгебры $(U\mathfrak{E}_\Sigma^T U^{-1})(\mathbf{r})$ изучаются для различных значений параметра $\mathbf{r}$. В **<u>разделе 4.1.3</u>** описывается приведение параметрического представления к виду

$$U\mathfrak{E}_\Sigma^T U^{-1} \subset \bigoplus_{l=1}^{L} C([0,\varepsilon_l];\mathfrak{P}_l),$$

где матричные алгебры $\mathfrak{P}_l \subset \mathbb{M}^{m_l}$ неприводимы. При этом эйконалы принимают вид

$$UE_\gamma^T U^{-1} = \oplus \sum_{l=1}^{L} \left[\sum_{k=1}^{n_{\gamma l}} \tau^k_{\gamma l}(\cdot)\, P^k_{\gamma l}\right].$$

В **<u>разделе 4.2</u>** вводится граничная алгебра, которая используется для описания связей между блоками в параметрическом представлении алгебры эйконалов. Исследуется ее структура. В **<u>разделе 4.2.1</u>** граничная алгебра вводится определением

$$\partial(U\mathfrak{E}_\Sigma^T U^{-1}) := \vee \left\{ (UE_\gamma^T U^{-1})(\mathbf{0}) \oplus (UE_\gamma^T U^{-1})(\boldsymbol{\varepsilon}) \,\middle|\, \gamma \in \Sigma \right\},$$

где $\mathbf{0} = (0,\ldots,0)$, $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_L)$. Даются определения, подготавливающие применение результатов **Главы 3** к этой алгебре. В **<u>разделе 4.2.2</u>** Теорема 2 применяется для описания стуктуры граничной алгебры.

В **<u>разделе 4.3</u>** описывается соединение двух стандартных алгебр, концевые алгебры которых связаны изометрическим изоморфизмом, в одну стандартную алгебру.

В **<u>разделе 4.4</u>** описывается переход к каноническому представлению алгебры $\mathfrak{E}_\Sigma^T$. Каноническое представление – параметрическое представление, граничная алгебра которого уже не содержит связанных блоков. Следующая теорема описывает это представление.

Теорема. [4] *Существует изометрический C^*-изоморфизм* $\mathbf{I}$, *доставляющий алгебре* $\mathfrak{E}^T_\Sigma$ *и ее образующим-эйконалам представление*

$$\mathbf{I}\mathfrak{E}^T_\Sigma = \bigoplus_{l=1}^{\mathcal{L}} \dot{C}([0,\zeta_l];\mathbb{M}^{\varkappa_l}); \quad \mathbf{I}E^T_\gamma = \oplus\sum_{l=1}^{\mathcal{L}}\left[\sum_{k=1}^{s_{\gamma l}}\tilde{\tau}^k_{\gamma l}(\cdot)\tilde{P}^k_{\gamma l}\right],\ \gamma\in\Sigma\,.$$

В нем $\tilde{\tau}^k_{\gamma l}$ *– линейные функции от* $r_l\in[0,\zeta_l]$, *такие, что* $\left|\frac{d\tilde{\tau}^k_{\gamma l}}{dr_l}\right| = 1$, *а их области значений суть сегменты длины* ζ_l, *которые могут иметь разве что общие концы;* $\tilde{P}^k_{\gamma l}\in\mathbb{M}^{\varkappa_l}$ *суть проекторы, попарно ортогональные для каждого* γ *и такие, что выполнено* $\vee\{\tilde{P}^k_{\gamma l}\mid k=1,\dots,s_{\gamma l};\ \gamma\in\Sigma\} = \mathbb{M}^{\varkappa_l}$.

В **пятой главе** исследуется спектр алгебры $\mathfrak{E}^T_\Sigma$. Строится ее функциональная модель в виде алгебры матричнозначных функций на спектре, оснащенном (нехаусдорфовой) топологией Джекобсона. С использованием функциональной модели, описывается переход к каноническому представлению от любой изометрической копии алгебры $\mathfrak{E}^T_\Sigma$. На спектре вводятся канонические координаты, определяемые функциями $\tilde{\tau}^k_{\gamma l}$. С их использованием производится факторизация спектра. Устанавливается, что фактор-пространство гомеоморфно некоторому графу.

В **разделе 5.1** показано, что каноническое представление вполне определяет спектр алгебры эйконалов. Он является из диъюнктным объединением "сегментов" $\mathscr{S}_l$, каждый из которых гомеоморфен сегменту $[0,\zeta_l]$ (возможно, с расщепленными концами). Определяются "кластеры" $\mathscr{K}^l_0,\mathscr{K}^l_{\zeta_l}$ – множества концевых точек $\mathscr{S}_l$, топологически неотделимых друг от друга.

В **разделе 5.2** вводятся вспомогательные понятия, которые подготавливают координатизацию спектра. В **разделе 5.2.1** определяются наборы

$$\sigma_\gamma(\pi) := \{t^1_\gamma(\pi),\dots,t^{p(\pi)}_\gamma(\pi)\},$$

составленные из коэффициентов разложения представлений π алгебры $\mathfrak{E}^T_\Sigma$ по неприводимым представлениям алгебр $\mathfrak{E}^T_\gamma$:

$$\pi|_{\mathfrak{E}^T_\gamma} = \delta^{t_1(\pi)}_\gamma\oplus\dots\oplus\delta^{t_{p(\pi)}(\pi)}_\gamma, \quad \pi\in\hat{\pi}\in\widehat{\mathfrak{E}^T_\Sigma}, \quad \delta^t_\gamma\in\widehat{\mathfrak{E}^T_\gamma}, \quad t\in\sigma_{\rm ac}(E^T_\gamma).$$

Здесь δ^t_γ есть мера Дирака с носителем в точке t (функционал над алгеброй $C(\sigma_{\rm\,ac}(E^T_\gamma)))$, а $\hat{\pi}$ – класс эквивалентности представления π. Определение σ_γ рапространяется на точки спектра $\hat{\pi}\in\widehat{\mathfrak{E}^T_\Sigma}$ с помощью равенства $\sigma_\gamma(\hat{\pi}) := \sigma_\gamma(\pi)$ для произвольного $\pi\in\hat{\pi}$. Далее вводится многозначная функция μ_γ:

$$\mu_\gamma:\sigma_{\rm\,ac}(E^T_\gamma)\to 2^{\widehat{\mathfrak{E}^T_\Sigma}}, \quad \mu_\gamma(t) := \{\hat{\pi}\in\widehat{\mathfrak{E}^T_\Sigma}|\ t\in\sigma_\gamma(\hat{\pi})\}.$$

[4] Теорема 3 в тексте диссертации.

Для представлений $\pi \in \hat{\pi} \in \widehat{\mathfrak{E}_\Sigma^T}$ определяются матрицы $\hat{E}_\gamma^T(\pi)$ равенством

$$\hat{E}_\gamma^T(\pi) := \pi(E_\gamma^T) = \sum_{k=1}^{n_\gamma(\hat{\pi})} t_\gamma^k(\hat{\pi}) \mathcal{R}_\gamma^k(\pi) \in \mathbb{M}^{\varkappa(\pi)},$$

где $\mathcal{R}_\gamma^k(\pi)$ - некоторые ортогональные проекторы, $n_\gamma(\hat{\pi}) := p(\pi)$. В **разделах 5.2.2 и 5.2.3** множества σ_γ, отображения μ_γ и матрицы $\hat{E}_\gamma^T(\pi)$ рассматриваются для двух различных случаев: внутренних точек сегметов $\mathscr{S}_l$ и точек граничных множеств $\mathscr{K}_r^l$.

В **разделе 5.3** описывается функциональная модель алгебры эйконалов, реализующая $\mathfrak{E}_\Sigma^T$ в виде алгебры матричнозначных функций на спектре $\widehat{\mathfrak{E}_\Sigma^T}$. В **разделах 5.3.1 и 5.3.2** значения функций (элементов функциональной модели) определяются для двух случаев: внутренних точек сегметов $\mathscr{S}_l$ и точек граничных множеств $\mathscr{K}_r^l$.

В **разделе 5.4** наборы σ_γ используются в качестве координат на спектре $\widehat{\mathfrak{E}_\Sigma^T}$. Они различают все внутренние точки спектра, но не обязательно различают точки кластеров.

В **разделе 5.5** показано, как перейти к каноническому представлению алгебры $\mathfrak{E}_\Sigma^T$, отправляясь от любой ее изометрической копии.

В **разделе 5.6** описывается факторизация спектра $\widehat{\mathfrak{E}_\Sigma^T}$, использующая координаты σ_γ и отображения μ_γ. Устанавливается, что факторизованный спектр гомеоморфен некоторому графу, снабженому естествеными координатами. В **разделе 5.6.1** на спектре вводится отношение эквивалентности $\sim$. Оно вводится двумя эквивалетными способами: через координаты σ_γ или с использованием функций μ_γ. Справедлива

Лемма. [5] *Пусть $\hat{\pi} \in \widehat{\mathfrak{E}_\Sigma^T}$ есть точка спектра, $[\hat{\pi}]$ – ее класс эквивалентности по отношению $\sim$. Тогда*

- *если $\hat{\pi} \in \operatorname{int}\widehat{\mathfrak{E}_\Sigma^T}$ – внутренняя точка, то $[\hat{\pi}] = \{\hat{\pi}\}$, то есть ее класс эквивалентности исчерпывается самой точкой;*
- *если $\hat{\pi} \in \mathscr{K}_r^l$ – точка граничного множества (возможно, кластера), то имееет место вложение $\mathscr{K}_r^l \subset [\hat{\pi}]$.*

Из нее следует, что фактор-пространство $\mathfrak{S}_\Sigma^T := \widehat{\mathfrak{E}_\Sigma^T}/_\sim$, является хаусдорфовым и гомеоморфным некоторому графу. В **разделе 5.6.2** на $\mathfrak{S}_\Sigma^T$ вводятся координаты $\boldsymbol{\sigma}_\gamma$ и отображения $\boldsymbol{\mu}_\gamma$:

$$\boldsymbol{\sigma}_\gamma([\hat{\pi}]) := \{t \in \sigma_{\rm ac}(E_\gamma^T) |\ t \in \sigma_\gamma(\hat{\pi}'),\ \hat{\pi}' \in [\hat{\pi}]\},$$
$$\boldsymbol{\mu}_\gamma:\ \sigma_{\rm ac}(E_\gamma^T) \to \mathfrak{S}_\Sigma^T, \quad \boldsymbol{\mu}_\gamma(t) := [\hat{\pi}], \quad \hat{\pi} \in \mu_\gamma(t).$$

[5] Лемма 5.6.1 в тексте диссертации.

Существенно, что $\boldsymbol{\sigma}_\gamma$, в отличие от σ_γ, различают точки пространства $\mathfrak{S}^T_\Sigma$, а $\boldsymbol{\mu}_\gamma$ оказываются однозначными и непрерывнными на нем.

В **шестой главе** исследуется связь между спектром алгебры эйконалов и геометрией графа. Показывается, что при выполнении определенных условий, каноническому представлению соответствует некоторое разбиение графа. При этом, факторизованый спектр $\mathfrak{S}^T_\Sigma$ оказывается гомеоморфным остову графа $\dot{\mathfrak{S}}^T_\Sigma$ – фактор-пространству области $\overline{\Omega^T[\Sigma]}$ по отношению, задаваемому этим разбиением.

В **разделе 6.1** устанавливается, что введеные раннее множества $\Lambda_\Sigma[x]$ в адекватном смысле приводят все эйконалы E^T_γ, $\gamma \in \Sigma$. Выделяются множества $\tilde{\Lambda}_\Sigma[x] \subset \Lambda_\Sigma[x]$, которые являются минимальными среди прочих множеств, обладающих свойством приводимости.

В **разделе 6.2** векторы из $\beta-$наборов рассматриваются, как функции на $\Lambda_\Sigma[x]$. На $\beta-$наборе, отвечающем множеству $\Lambda_\Sigma[x]$, вводится рефлексивное и симметричное отношение $\sim_0$:

$$\beta^i \sim_0 \beta^{i'} \ \Leftrightarrow\ \operatorname{supp}\,\beta^i \cap \operatorname{supp}\,\beta^{i'} \neq \emptyset,$$

и определяется его транзитивное замыкание $\sim$. Символом $[\beta]$ обозначается класс эквивалентности вектора β по этому отношению. Для каждого $x \in \overline{\Omega^T[\Sigma]}$ определяется множество

$$\dot{\Lambda}_\Sigma[x] := \bigcup_{\beta' \in [\beta]} \operatorname{supp}\,\beta' \subset \Lambda_\Sigma[x],$$

где $x \in \operatorname{supp}\,\beta$. Справедлива

Лемма. [6] *Для каждого $x \in \overline{\Omega^T[\Sigma]}$ выполнено равенство*

$$\tilde{\Lambda}_\Sigma[x] = \dot{\Lambda}_\Sigma[x].$$

В **разделе 6.3** с множествами $\dot{\Lambda}_\Sigma[x]$ связывается некторое (каноническое) разбиение графа.

В **разделе 6.4** описывается параметрическое представление алгебры эйконалов, определяемое каноническим разбиением графа.

В **разделе 6.5** рассматривается отношение $\sim$ на области $\overline{\Omega^T[\Sigma]}$, порождаемое множествами $\dot{\Lambda}_\Sigma[x]$: $x \sim x'$, если $\dot{\Lambda}_\Sigma[x] = \dot{\Lambda}_\Sigma[x']$. Вводится остов – фактор-пространство $\overline{\Omega^T[\Sigma]}$ по этому отношению:

$$\dot{\mathfrak{S}}^T_\Sigma := \overline{\Omega^T[\Sigma]}/_\sim.$$

Его внутренними точками $\lambda \in \operatorname{int}\dot{\mathfrak{S}}^T_\Sigma$ считаются классы эквивалентности $\lambda = \dot{\Lambda}_\Sigma[x]$, не содержащие вершин подграфа $\overline{\Omega^T[\Sigma]}$.

[6] Лемма 6.2.1 в тексте диссертации.

В **разделе 6.6** на остове $\dot{\mathfrak{S}}^T_\Sigma$ вводятся координаты $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_\gamma$ и отображения $\dot{\boldsymbol{\mu}}_\gamma$. Устанавливается, что остов гомеоморфен некоторому графу.

В **разделе 6.7** исследуется связь между остовом $\dot{\mathfrak{S}}^T_\Sigma$ и фактор-пространством $\mathfrak{S}^T_\Sigma$. Пусть λ есть точка остова, а $B[\lambda]$ – отвечающий ей β–набор векторов. На каждом таком наборе вводятся отношения эквивалентности: $\overset{\rm nort}{\sim}$ и $\overset{\rm supp}{\sim}$. Они позволяют сформулировать условия гомеоморфности $\dot{\mathfrak{S}}^T_\Sigma$ и $\mathfrak{S}^T_\Sigma$. Справедлива

Теорема. [7] *Пусть граф Ω, момент времени T и набор Σ таковы, что соотношение $\overset{\rm supp}{\sim}=\overset{\rm nort}{\sim}$ выполнено на каждом $B[\lambda]$ для $\lambda \in {\rm int}\dot{\mathfrak{S}}^T_\Sigma$. Тогда отображение $\mathfrak{f}: \mathfrak{S}^T_\Sigma \to \dot{\mathfrak{S}}^T_\Sigma$, задаваемое условием*

$$\mathfrak{f}([\hat{\pi}]) = \lambda, \text{ если } \boldsymbol{\sigma}_\gamma([\hat{\pi}]) = \dot{\boldsymbol{\sigma}}_\gamma(\lambda)$$

или эквивалетным ему равенством

$$\dot{\boldsymbol{\mu}}_\gamma(t) = \mathfrak{f}(\boldsymbol{\mu}_\gamma(t)), \quad t \in \sigma_{ac}(E^T_\gamma), \gamma \in \Sigma,$$

является гомеоморфизмом.

В **Заключении** приведены основные результаты работы, которые заключаются в следующем:

1. Получено каноническое представление алгебры эйконалов, дающее эффективное описание ее спектра.
2. Построена функциональная модель алгебры эйконалов.
3. Исследована структура спектра и установлена ее связь с геометрией исходного графа.

Публикации автора по теме диссертации

[1] M. I. Belishev и A. V. Kaplun, «Eikonal algebra on a graph of simple structure,» — *Eurasian Journal of Mathematical and Computer Applications*, т. 6, № 3, с. 4—33, 2018.

[2] А. В. Каплун, «Каноническое представление алгебры эйконалов трехлучевого графа,» — *Зап. научн. сем. ПОМИ*, т. 506, с. 57—78, 2021.

[3] М. И. Белишев и А. В. Каплун, «Каноническое представление C*-алгебры эйконалов метрического графа,» — *Известия Российской академии наук. Серия математическая*, т. 86, № 4, с. 3—50, 2022.

[7] Теорема 4 в тексте диссертации.

Каплун Александр Владимирович

Алгебра эйконалов метрического графа

Автореф. дис. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук

Подписано в печать 06.06.2022. Заказ № ____________
Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 1. Тираж 100 экз.
Типография ______________________________________