Санкт-Петербургский Государственный Университет

На правах рукописи

Крюков Николай Алексеевич

Различные задачи случайного заполнения множеств

Специальность 01.01.05 –
Теория вероятностей и математическая статистика

Автореферат
диссертации на соискание степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
к. ф.-м. н., доцент. Ананьевский С. М.

Санкт-Петербург
2022

Работа выполнена в ФГБУН Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук.

Научный руководитель: кандидат физико-математических наук, **Ананьевский Сергей Михайлович**, ФГБОУ ВО Санкт-Петербургский Государственный Университет, доцент кафедры теории вероятностей и математической статистики.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук **Розовский Леонид Викторович**, ФГБОУ ВО Санкт-Петербургский государственный химико-фармацевтический университет Министерства здравоохранения России, профессор кафедры Высшей математики

доктор физико-математических наук **Тихомиров Александр Николаевич**, ФГБУН ФИЦ физико-математический институт Коми НЦ УрО РАН, профессор, главный научный сотрудник.

Ведущая организация: ФГБОУ ВО Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова.

Защита состоится « »   2022 г. в   на заседании диссертационного совета Д 002.202.01 в ПОМИ по адресу: 191023, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, д. 27, к. 311.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ПОМИ http://pdmi.ras.ru/pdmi/diss-council/.

Автореферат разослан «____» ____________ 2022 г.

Учёный секретарь диссертационного совета к.ф.-м.н. ____________________ Рядовкин К. С.

1 Общая характеристика работы

Актуальность работы и степень ее разработанности.

Задача случайного заполнения отрезка впервые была сформулирована в работе Реньи [1] следующим образом. Пусть $x > 1$. На отрезке $[0, x]$ размещается случайным образом интервал единичной длины. Обозначим этот отрезок за $(t, t+1)$. Этот отрезок разбивает изначальный отрезок на два: $[0, t]$ и $[t+1, x]$. Если какой-либо из них имеет длину меньше единицы, исключим его из дальнейшего рассмотрения. На те отрезки, длина которых хотя бы единица, опять располагается интервал длины один, и так далее. По окончании данного процесса подсчитывается суммарное количество размещённых интервалов. Оно обозначается за ξ_x. Для $0 \leqslant x < 1$ значение ξ_x принимается равным нулю. Выражение «случайным образом» означает что t является равномерно распределённой на $[0, x-1]$ случайной величиной. Более того, любое следующее случайное размещение интервала не зависит от предыдущих.

В работе Реньи [1] был показан следующий результат

Теорема 1.1. *Пусть ξ_x — описанное выше множество случайных величин. Тогда для любого $n > 1$ имеет место следующее соотношение*

$$E\{\xi_x\} = \lambda x + \lambda - 1 + o(x^{-n}), \qquad (x \to +\infty), \tag{1}$$

где константа λ определена следующим образом

$$\lambda = \int\limits_0^\infty e^{-2\int\limits_0^t \frac{1-e^{-u}}{u} du} dt.$$

Позднее в работе Дворецкого и Роббинса [2] было дано уточнение скорости сходимости в соотношении (1), а так же изучено поведение дисперсий того же множества случайных величин

Теорема 1.2. *Пусть ξ_x — описанное выше множество случайных величин. Тогда имеет место следующее соотношение*

$$E\{\xi_x\} = \lambda x + \lambda - 1 + O\left(\left(\frac{2e}{x}\right)^{x-\frac{3}{2}}\right), \qquad (x \to +\infty).$$

Также, существует такая положительная константа λ_2, что

$$D\{\xi_x\} = \lambda_2 x + \lambda_2 + O\left(\left(\frac{4e}{x}\right)^{x-4}\right), \qquad (x \to +\infty).$$

В дополнение, в работе [2] был представлен результат об асимптотической нормальности последовательности случайных величин ξ_x:

Теорема 1.3. *Последовательность случайных величин*

$$\frac{\xi_x - \mathbb{E}\{\xi_x\}}{\sqrt{\mathbb{D}\{\xi_x\}}} \tag{2}$$

слабо сходится к стандартной нормальной случайной величине при $x \to \infty$.

Также, был рассмотрен дискретный аналог задачи Реньи о парковке. В работе [3] была представлена следующая формулировка. На отрезок некоторой целой длины n (будем в случае целой длины обозначать её за n вместо x) размещаются интервалы заранее заданной целой длины l, которая может быть отлична от единичной. В данной постановке задачи, в случае $n \geqslant l$, случайная величина t вместо равномерного распределения на отрезке $[0, n - l]$ имеет равномерное распределение на множестве целых чисел $\{0, \ldots, n - l\}$.Отрезки длиной меньше l исключаются из рассмотрения. Аналогично, общее количество расположенных на отрезке длины n интервалов обозначается за ξ_n. В работе [3] при помощи метода производящей функции было получено следующее асимптотическое поведение математических ожиданий $E\{\xi_n\}$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{E\{\xi_n\}}{ln} = e^{-2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{1}{i}} \int\limits_0^1 e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{x^i}{i}} dx =: \lambda_l.$$

В последнее время задачи о случайном заполнении отрезка вновь привлекают внимание математиков. Они были недавно рассмотрены в ряде статей, в том числе [4]–[8]. В работах [4]–[5] рассматривались дискретные варианты задачи, в то время как [6]–[8] обращали внимание на непрерывные аналоги.

Аналоги описанных выше задач были также рассмотрены в работах [9]–[16].

Цель диссертационной работы.

Основной целью данной диссертации является обобщение полученных в работах [1, 2] результатов на случаи одного класса законов распределений случайного размещения интервалов, включающего в себя равномерный закон, а также получение аналогов асимптотических результатов, приведенных в работе [2] для различных моделей дискретных законов случайного размещения интервалов, обобщающих предложенную в работе [3] модель.

Методы.

В настоящей диссертации развиваются методы, приведенные в работах [1] – [3], а именно:

- Поиск рекуррентного соотношения, связывающего моменты случайных величин ξ_n,

- Метод производящей функции,

- Метод моментов.

. В сравнении с методом, приведённым в работе [3], метод производящей функции, приведённый в данной диссертации, позволяет вычислить асимптотику последовательности с большей точностью.

Научная новизна.

В диссертации получены следующие, ранее неизвестные результаты: Теорема 2.1, Следствие 1, Следствие 2, Теорема 2.2, Теорема 2.3, Теорема 2.4, Теорема 2.5, Теорема 2.6, Теорема 2.7, Теорема 2.8, Теорема 2.9, Теорема 2.10, Теорема 2.11.

Конкретные формулировки данных теорем приведены в автореферате ниже.

Теоретическая и практическая значимость.

Результаты диссертации носят теоретический характер и могут быть использованы в различных областях теории вероятностей и математической статистики, в которых важны оценки числа случайно размещенных интервалов малой длины на отрезках большой длины.

Результаты и положения, выносимые на защиту.

1. Эквивалентность всех процессов парковки для которых плотности распределений размещаемого интервала обладает свойством антисимметричности, которое определено ниже в описании содержания работы.

2. Вычисление асимптотики математических ожиданий и дисперсий в дискретном аналоге задачи о парковке, рассмотренном в работе [3], с точностью $o(e^{-n})$ (в самой работе [3] была показана асимптотика с точностью $o(n)$), а также установление асимптотической нормальности в данной задаче.

3. Вычисление точных значений математических ожиданий для описанной в пункте 2 задачи для расположения интервалов длины 2.

4. Вычисление точных значений математических ожиданий, дисперсий и третьих центральных моментов в задаче о дискретной парковке машин длины 1 с дополнительным условием остановки процесса заполнения в случае, если длина отрезка становится меньше заранее заданного значения.

5. Установление асимптотической нормальности для описанной в пункте 4 задачи.

6. Вычисление точных значений математических ожиданий в задаче о дискретной парковке машин длины 1 с дополнительным условием запрета расположения интервала на самом первом месте.

7. Вычисление точных значений математических ожиданий в задаче о дискретной парковке машин, длина которых является случайной величиной, распределённой на множестве $\{1, 2\}$.

Степень достоверности.

Все полученные в диссертационной работе результаты являются математически достоверными фактами.

Апробация результатов.

Материалы диссертации опубликованы в 6 статьях ([17] – [22]) в рецензируемых журналах, которые входят в список ВАК. Результаты диссертации докладывались автором на Санкт-Петербургском Городском семинаре по теории вероятностей и математической статистике по руководством академика РАН И. А. Ибрагимова (Санкт-Петербург, 22 октября 2021), на международной конференции Stochastic Models II (St-Petersburg, 6-8 May 2019), на международной конференции Science SPBU 2020 (St-Petersburg 24 December 2020), и на всероссийской конференции Наука СПбГУ (Санкт-Петербург, 25 декабря 2020).

В совместных работах с С.М.Ананьевским [18, 19, 20,21] постановка задачи и план исследования принадлежат научному руководителю, реализация плана полностью принадлежит автору.

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из введения, четырёх глав, Приложения и Библиографии. Общий объём диссертации составляет 79 страниц. Библиография содержит 23 наименования, в число которых включены 6 работ автора по теме диссертации.

2 Содержание работы

.

Первая глава

В первой главе, которая является введением, описывается степень разработанности темы диссертации и её актуальность. Также, формулируются цели работы, методы, описывается её степень достоверности и апробация. Кроме того, приводятся формулировки выносимых на защиту положений.

Вторая глава

Во второй главе рассматривается следующее обобщение задачи, приведённой в работе [1] и описанной в первой главе. Пусть интервалы $(t, t+1)$ размещаются на отрезке $[0, x]$ отличным от равномерного образом. Будем считать, что распределения располагаемых интервалов не зависят от конкретного отрезка, а только от его длины. В таком случае нам достаточно определить семейство распределений

$$\mathcal{P} = \{P_x\}_{x \geqslant 1},$$

где P_x — некоторое распределение на отрезке $[0, x-1]$. Тогда интервал $(t, t+1)$ располагается на отрезке $[0, x]$ таким образом, чтобы случайная величина t имела распределение P_x. Обозначим за $\xi_{\mathcal{P}}(x)$ общее количество размещённых на изначальном отрезке $[0, x]$ единичных интервалов.

Мы также предполагаем, что распределения P_x имеют соответствующие плотности p_x. В данной главе приведён следующий результат.

Теорема 2.1. *Рассмотрим два множества случайных величин $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$, которые определены при неотрицательных t следующим образом:*

$$\begin{aligned}
&\xi_1(t) = \xi_2(t) = 0, \qquad t < 1 \\
&\xi_1(1) = \xi_2(1) = 1 \\
&\xi_1(t+1) = 1 + \xi_1(\eta_1(t)) + \xi_1(t - \eta_1(t)), \qquad t > 0 \\
&\xi_2(t+1) = 1 + \xi_2(\eta_2(t)) + \xi_2(t - \eta_2(t)), \qquad t > 0,
\end{aligned}$$

где множества случайных величин $\eta_1(t)$ и $\eta_2(t)$ независимы и соответственно имеют плотности $p_{1,t}(x)$ и $p_{2,t}(x)$, определённые на отрезке $[0, t]$ и удовлетворяющие следующему соотношению (свойство антисимметричности):

$$p_{i,t}(u) + p_{i,t}(t-u) = \frac{2}{t}, \qquad \forall u \in [0, t], \quad \forall i = 1, 2. \tag{3}$$

Тогда распределения случайных величин $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ совпадают для всех положительных t.

Также, показаны два следствия из описанной выше теоремы, первое из которых утверждает, что распределение случайных величин $\xi_{\mathcal{P}}(x)$ не зависит от конкретного семейства $\mathcal{P}$, а второе обобщает асимптотический результат, полученный в работе [2] (Теорема 1.3) на множество случайных величин $\xi_{\mathcal{P}}(x)$.

Следствие 1. *Пусть $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ — два семейства мер, удовлетворяющих соотношению* (3)*. Тогда для любого $x \geqslant 0$ случайные величины $\xi_{\mathcal{P}_1}(x)$ и $\xi_{\mathcal{P}_2}(x)$ имеют одинаковые распределения.*

Следствие 2. *Пусть $\mathcal{P}$ — семейство мер, удовлетворяющее соотношению* (3)*. Тогда последовательность случайных величин*

$$\frac{\xi_{\mathcal{P}}(x) - \mathbb{E}\{\xi_{\mathcal{P}}(x)\}}{\sqrt{\mathbb{D}\{\xi_{\mathcal{P}}(x)\}}}$$

слабо сходится к стандартной нормальной случайной величине при $x \to \infty$.

Третья глава.

В третьей главе рассматривается следующий дискретный аналог задачи Реньи о парковке, описанный ранее в работе [3]. Пусть n, l — два натуральных числа. Будем случайно помещать на отрезок $[0, n]$ интервалы длины l таким образом, чтобы начало и конец интервала были целыми числами. В случае $n < l$ такое невозможно, и процесс считается завершённым. Иначе поместим интервал $(t, t+l)$, где t — случайная величина, равномерно распределённая на множестве $\{0, \ldots, n-l\}$. Он разбивает изначальный отрезок на два: $[0, t]$ и $[t+l, n]$, которые заполняются независимо по аналогичному правилу. Как только процесс завершается, что означает, что все оставшиеся свободными отрезки имеют длину меньше чем l, обозначим за $\xi_{n,l}$ суммарную длину расположенных интервалов.

В данной главе представлено следующее уточнение результата, полученного в работе [3], описывающего поведение математических ожиданий случайных величин $\xi_{n,l}$.

Теорема 2.2. *Для описанных выше случайных величин $\xi_{n,l}$ и любого $T > 1$ верно соотношение*

$$\mathbb{E}\{\xi_{n,l}\} = l\lambda_l n + l^2\lambda_l - l + o(T^{-n}), \qquad (n \to +\infty), \tag{4}$$

где константа λ_l имеет вид

$$\lambda_l = e^{-2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{1}{i}} \int\limits_0^1 e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{x^i}{i}} dx. \tag{5}$$

Отдельно, для случая $l = 2$, приведено точное выражение для математических ожиданий случайных величин $\xi_{n,2}$.

Теорема 2.3. *Для описанных выше случайных величин $\xi_{n,2}$ верно соотношение*

$$\mathbb{E}\{\xi_{n,2}\} = n - \frac{n}{e^2}\frac{\Gamma(n+1,-2)}{n!} - \frac{(-2)^{n+1}}{n!} - \frac{2}{e^2}\frac{\Gamma(n+1,-2)}{n!}.$$

Также, получен аналогичный результат в отношении дисперсий случайных величин $\xi_{n,l}$

Теорема 2.4. *Для описанных выше случайных величин $\xi_{n,l}$ верно соотношение*

$$\mathbb{D}\{\xi_{n,l}\} = K_0(n-l) + o(1).$$

Для константы K_0 также было приведена точная формула. В дополнение, приведённое выше соотношение для дисперсий было обобщено на все центральные моменты случайных величин $\xi_{n,l}$ следующим образом.

Теорема 2.5. *Для определённой выше последовательности случайных величин для любого натурального k при $n \to \infty$ верно соотношение*

$$\mathbb{E}\left\{(\xi_{n,l} - \mathbb{E}\{\xi_{n,l}\})^k\right\} = n^{\left[\frac{k}{2}\right]}(c_k + o(1)),$$

где $c_k \in \mathbb{R}$, и при чётных k для констант c_k верно равенство

$$c_k = c_2^{k/2}(k-1)!!. \tag{6}$$

В заключении третьей главы была доказана следующая теорема, являющаяся аналогом Теоремы 1.3 для случая дискретного расположения отрезков.

Теорема 2.6. *Последовательность случайных величин*

$$\frac{\xi_{n,l} - \mathbb{E}\left\{\xi_{n,l}\right\}}{\sqrt{\mathbb{D}\left\{\xi_{n,l}\right\}}}$$

слабо сходится к стандартной нормальной случайной величине

Четвёртая глава.

В четвёртой главе рассматривается дискретная задача о парковке для машин длины один. Заметим, что в этом случае постановка задачи, представленная в предыдущей главе, не имеет смысла - мы в любом случае заполним весь отрезок. Поэтому необходимо ввести дополнительные ограничения. Допустим, что мы не можем расположить интервал не только если он не поместиться на отрезок (то есть длина отрезка строго меньше, чем длина интервала), но и в случае, если длина отрезка просто не является достаточной, независимо от длины располагаемого интервала. В таком случае количество расположенных интервалов вновь будет случайной величиной, и задача в такой постановке обретает смысл.

Таким образом, поставим следующую задачу. Зафиксируем натуральное $l > 0$. Пусть у нас есть отрезок $[0, n]$. Если его длина меньше чем l, процесс прекращается. Иначе расположим на нём случайным образом интервал $(t, t+1)$ с целыми концами. Он разбивает изначальный отрезок на два, каждый из которых далее рассматривается отдельно, аналогично изначальному. Фраза «случайным образом» здесь также означает, что t является случайной величиной, равномерно распределённой на множестве целых чисел $\{0, \ldots, n-1\}$. Когда длина всех оставшихся отрезков становится меньше l, процесс прекращается, и подсчитывается суммарное количество расположенных отрезков. Обозначим эту случайную величину за ξ_n.

В первой части четвёртой главы диссертации показаны следующие результаты, касающиеся первых моментов последовательности случайных величин ξ_n.

Теорема 2.7. *Для любой натуральной константы $l > 0$ описанные выше случайные величины ξ_n имеют следующие математические ожидания:*

$$\mathbb{E}\{\xi_0\} = \ldots = \mathbb{E}\{\xi_{l-1}\} = 0,$$

$$\mathbb{E}\{\xi_n\} = \frac{2n+1-l}{l+1}, \quad \text{при} \quad n \geqslant l.$$

Теорема 2.8. *Для любой натуральной константы $l > 0$ описанные выше случайные величины ξ_n имеют следующие дисперсии:*

$$\mathbb{D}\{\xi_0\} = \ldots = \mathbb{D}\{\xi_l\} = 0,$$

$$\mathbb{D}\{\xi_{l+1}\} = \frac{2(l-1)(l^2+2l+3)}{(l+1)^3(l+2)},$$

$$\mathbb{D}\{\xi_n\} = (n+1)\frac{4(l-1)(l^2+2l+3)}{(l+1)^3(l+2)^2(l+3)}, \quad \text{при} \quad n \geqslant l+2,$$

а их третьи центральные моменты равны

$$\mathbb{E}\{\xi_0 - \mathbb{E}\xi_0\}^3 = \ldots = \mathbb{E}\{\xi_l - \mathbb{E}\xi_l\}^3 = 0,$$

$$\mathbb{E}\{\xi_{l+1} - \mathbb{E}\xi_{l+1}\}^3 = \frac{2(l-1)(l^3-l^2-5l-7)}{(l+1)^4(l+2)^2},$$

$$\mathbb{E}\{\xi_n - \mathbb{E}\xi_n\}^3 = (n-1)\frac{4(l-1)(l^3-l^2-5l-7)}{(l+1)^4(l+2)^2(l+3)}, \quad \text{при} \quad n \geqslant l+2.$$

Для случая $l = 2$. также был получен результат, аналогичный приведённому в Теореме 1.3.

Теорема 2.9. *В случае $l = 2$ последовательность распределений случайных величин*

$$\frac{\xi_n - \mathbb{E}\{\xi_n\}}{\sqrt{D\{\xi_n\}}} \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{7}$$

слабо сходится к стандартной нормальной мере.

Во второй части четвёртой главы рассматривается обобщение описанной выше задачи на случай неравномерного расположения интервала. Рассмотрим задачу случайного расположения интервалов длины 1, но при этом на каждом шагу запретим этому интервалу быть расположенным на самом левом месте. Все остальные места оставим равновероятными. Таким образом, мы располагаем интервал $(t, t+1)$, где t — случайная величина, равномерно распределённая на множестве $\{1, \ldots, n-1\}$ вместо $\{0, \ldots, n-1\}$. Аналогично обычной постановке, если $n = 1$, процесс заканчивается. Для данной задачи был получен следующий результат.

Теорема 2.10. *Математическое ожидание случайной величины ξ_n при $n \geqslant 2$ имеет следующий вид*

$$\mathbb{E}\{\xi_n\} = n\left(1 - \frac{\Gamma(n+1,-1)}{e\Gamma(n+1)}\right) - \frac{\Gamma(n,-1)}{\Gamma(n)},$$

где $\Gamma(n)$ — гамма-функция, а $\Gamma(n,-1)$ — неполная гамма-функция, которая определяется равенством

$$\Gamma(n,-1) = \int_{-1}^{+\infty} t^{n-1}e^{-t}dt.$$

Пятая глава.

В пятой главе диссертации рассматривается задача о парковке интервалов случайной длины. Предположим, что теперь на каждом шагу, перед тем как расположить интервал, сначала случайным образом будет определяться его длина, а уже потом, также случайным образом, определяется место его расположения. Будем считать, что распределение длины отрезка не зависит от длины текущего интервала, а его место равномерно распределено среди всех возможных позиций.

Заметим, что ранее мы изучали не общее занятое место, а суммарное количество расположенных отрезков, так как все располагаемые отрезки имели одинаковую длину. Однако в данном случае две обозначенные выше величины не выражаются однозначно друг через друга. В данной главе мы будем обозначать за ξ_n общее занятое место.

Для описанной выше задачи в простейшем случае, когда длина интервала варьируется от единицы до двойки, был получен следующий результат

Теорема 2.11. *Пусть случайная величина l имеет следующее распределение*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{l=1\} &= p_1,\\ \mathbb{P}\{l=2\} &= p_2 = 1-p_1.\end{aligned}$$

В таком случае математическое ожидание случайной величины ξ_n для $n \geqslant 2$ имеет следующий вид

$$\mathbb{E}\{\xi_n\} = \frac{1-p_2^2}{2p_2^2} + n\left(1+\frac{1-p_2}{2p_2^2}\right) - n\frac{1+p_2}{2p_2^2}\frac{\Gamma(n+1,-2p_2)}{e^{2p_2}\Gamma(n+1)} - \frac{1+p_2}{p_2}\frac{\Gamma(n,-2p_2)}{e^{2p_2}\Gamma(n)}.$$

Шестая глава

В шестой главе приведены доказательства технических лемм, используемых в предыдущих главах.

Литература

[1] *Rényi A.*, “On a one-dimensional problem concerning space-filling” // Publications of the Mathematical Institute of the Hungarian Academy of Sciences. Vol. 3. P. 109–127. 1958.

[2] *Dvoretzky A., Robbins H.*, “On the “parking” problem” // Publications of the Mathematical Institute of the Hungarian Academy of Sciences. Vol. 9. P. 209–226. 1964.

[3] *Pinsky R. G.*, “Problems from the Discrete to the Continuous” // Springer International Publishing Switzerland. Chapter 3. P. 21–34. 2014.

[4] *Clay M. P., Simanyi N. J.*, “Rényi’s parking problem revisited” // Stochastic and Dynamics. Vol. 2 (16). 1660006. 2016.

[5] *Gerin L.*, “The Page-Rényi parking process” // Electronic Journal of Combinatorics. Vol. 4 (22). P4.4. 2015.

[6] *Ільєнко А. Б., Фатенко В. В.*, “Узагальнення задачі Реньї про паркування” // Наукові вісті НТУУ «КПІ» : міжнародний науково-технічний журнал. № 4(114). С. 54–60. 2017.

[7] *Ананьевский С. М.*, “Задача парковки для отрезков различной длины”// Записки научных семинаров ПОМИ. Т.228. Вероятность и статистика. С. 16–23. 1996.

[8] *Ананьевский С. М.*, “Некоторые обобщения задачи о «парковке»” // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. Т 3 (61). Вып. 4. С. 525–532. 2016.

[9] *Ney P. E.*, “A random interval filling problem” // Annals of Mathematical Statistics Vol. 2 (33). P. 702–718. 1962.

[10] *Mullooly J. P.*, “A one dimensional random space-filling problem” // Journal of Applied Probability, Vol. 5. No. 2. P. 427–435. 1968.

[11] *Baryshnikov Y., Gnedin A.*, “Counting intervals in the packing process” // The Annals of Applied Probability. Vol. 11. No. 3. P. 863–877. 2001.

[12] *Coffman E. G., Leopold Flatto L., and Jelenković P.* “Interval packing: the vacant interval distribution” // The Annals of Applied Probability. Vol. 10. No. 1. P. 240–257. 2000.

[13] *Rhee W. T., Talagrand M.* “Packing random intervals” // The Annals of Applied Probability. Vol. 6. No. 2. P. 572–576. 1996.

[14] *Поярков А. П.*, “Случайные упаковки куба” // Фундаментальная и прикладная математика. Т. 11. No 5. С. 187–196. 2005.

[15] *Mackey M., Sullivan W. G.*, “Exhaustion of an interval by iterated Rényi parking”// arXiv:1610.06423 [math.PR]. 2016.

[16] *Xu C., Skiena S.*,“Marking Streets to Improve Parking Density”// arXiv:1503.09057 [physics.soc-ph]. 2015.

[17] *Крюков Н. А.*, “Дискретизация задачи о парковке” // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. Т. 7 (65). Вып. 4, С. 662–677. 2019.

[18] *Ананьевский С. М., Крюков Н. А.*, “Асимптотическая нормальность в дискретном аналоге задачи о парковке”// Записки научных семинаров ПОМИ. Т. 495. Вероятность и статистика. С. 9–36. 2020.

[19] *Ананьевский С. М., Крюков Н. А.*, “Задача об эгоистичной парковке” // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. Т. 5 (63). Вып. 4. С. 549–555. 2018.

[20] *Ананьевский С. М., Крюков Н. А.*, “Асимптотическая нормальность в задаче об эгоистичной парковке” // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. Т. 6 (64). Вып. 4. С. 592–607. 2019.

[21] *Ананьевский С. М., Крюков Н. А.*, “Об асимптотической нормальности в одном обобщении задачи Реньи” // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. Т. 6 (64). Вып. 3. С. 353–362. 2019.

[22] *Крюков Н. А.*, “Односторонняя эгоистичная парковка”// Записки научных семинаров ПОМИ. Т. 501. Вероятность и статистика. С. 194–202. 2021.

[23] *Billingsley P.*, “Probability and Measure” // Third Edition, A Wiley-Interscience Publication, John Wiley Sons, New York, 1985.