Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования «Тульский государственный педагогический университет
им. Л. Н. Толстого»

На правах рукописи

Басалов Юрий Александрович

ОЦЕНКИ КОНСТАНТЫ НАИЛУЧШИХ СОВМЕСТНЫХ ДИОФАНТОВЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

01.01.06 - математическая логика, алгебра и теория чисел

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор
Добровольский Николай Михайлович

Тула - 2022

Содержание

Введение

Актуальность исследования

Теория диофантовых приближений сформировалась как естественное развитие теории цепных дробей, активно развивавшейся в XVII-XIX веках. Исследованию непрерывных дробей посвящали свои работы Л. Эйлер, Ж. Л. Лагранж, Ж. Лиувилль, К. Ф. Гаусс. Ключевой особенностью цепных дробей является то, что они обеспечивают наилучшие приближения действительного числа рациональными дробями, обладая при этом простой и изящной алгебраической и геометрической структурой.

Теория диофантовых приближений интересуется более общими вопросами аппроксимации в целых числах. Многие проблемы теории диофантовых приближений исходят из фундаментального утверждения, полученного П. Г. Дирихле в 1842 [62]

Теорема 1. *Пусть α_{ij} $(1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq m)$ и Q – произвольные действительные числа, причем $Q > 1$. Тогда найдутся целые числа $q_1,\ q_2, \ldots,\ q_m$ и $p_1,\ p_2, \ldots,\ p_n$ такие, что $1 \leq max\left(|q_1|,\ |q_2|, \ldots,\ |q_m|\right) < Q^{\frac{n}{m}}$ и*

$$\left|\sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} \cdot q_j - p_i\right| \leq \frac{1}{Q}, \qquad (1 \leq i \leq n). \tag{1}$$

Для $m = 1$ неравенство (1) можно записать в виде

$$\max_{i=\overline{1,n}} q \left|q\alpha_i - p_i\right|^n < 1. \tag{2}$$

Можно ли усилить это неравенство, заменив 1 на какое-то число C?

Определение 1. *Точная нижняя грань величины C, для которой существует бесконечное количество наборов целых чисел $p_1, \ldots,\ p_n,\ q$, удовлетворяющих неравенству*

$$\max_{i=\overline{1,n}} q \left|q\alpha_i - p_i\right|^n < C,$$

называется константой наилучших диофантовых приближений $C(\vec{\alpha})$ для вектора $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.

Определение 2. *Константой наилучших диофантовых приближений C_n называется точная верхняя грань числа $C(\vec{x})$ по всем векторам $\vec{x}$ размерности n*

$$C_n = \sup_{\vec{x} \in \mathbb{R}^n} C(\vec{x}).$$

Данная работа посвящена вопросам оценки снизу константы наилучших диофантовых приближений C_n.

Петербургской, а вместе с ней и русской, научной школе в области диофантовых приближений более полутора веков. К первым исследованиям русских ученых в этой области можно отнести работу П. Л. Чебышева 1866 г. «Об одном арифметическом вопросе» [49]. В этой работе он получает оценку степени приближения для неоднородной линейной формы. А именно, показывает, что для произвольных чисел a, b существует бесконечное количество пар целых чисел x, y таких, что

$$|x - ay - b| < \frac{2}{y}.$$

Изучение этого вопроса было затем продолжено Ш. Эрмитом [70], а позднее Г. Минковским [83].

В теории бинарных квадратичных форм известно следующее утверждение. Если $\varphi(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ – бинарная форма с произвольными коэффициентами a, b, c и определителем $\Delta = b^2 - 4ac \neq 0$ (если $\Delta = 0$, то бинарная форма приводится к линейной), то переменным x, y можно дать такие целые, не равные одновременно нулю, значения, что

$$\varphi(x, y) \leq \sqrt{\frac{1}{3}\,|\Delta|} \quad \text{для определенных квадратичных форм, где } \Delta < 0, \tag{3}$$

и

$$\varphi(x, y) \leq \sqrt{\frac{1}{5}\,|\Delta|} \quad \text{для неопределенных квадратичных форм, где } \Delta > 0. \tag{4}$$

Указанное утверждение впервые было четко сформулировано учениками П. Л. Чебышева: А. Н. Коркиным и Е. Н. Золотарёвым [76]. При исследовании этого вопроса ими была обнаружена принципиальная разница между случаями $\Delta < 0$ и $\Delta > 0$. При $\Delta > 0$ равенство $\varphi(x, y) = \sqrt{\frac{1}{5}\,|\Delta|}$ достигается на некотором классе эквивалентных квадратичных форм. Если исключить этот класс из рассмотрения, то можно усилить неравенство (4) до неравенства

$$\varphi(x, y) \leq \sqrt{\frac{1}{8}\,|\Delta|},$$

где равенство также достигается на определенном классе квадратичных форм. Этот процесс можно продолжать далее. В то же время, для $\Delta < 0$, после исключения из рассмотрения класса эквивалентных форм, для которых $\varphi(x, y) = \sqrt{\frac{1}{3}\,|\Delta|}$, можно будет найти формы, для которых $\varphi(x, y) < \sqrt{\lambda\,|\Delta|}$ для любого $\lambda < \frac{1}{3}$.

Задача дальнейшего продолжения ряда описанных выше констант $\frac{1}{5}, \frac{1}{8}, \ldots$ (при $\Delta > 0$) была решена учеником А. Н. Коркина, академиком А. А. Марковым в 1880 в магистерской диссертации «О бинарных квадратичных формах положительного определителя» [29]. А. А. Марков доказал, что ряд чисел $\frac{1}{5}, \frac{1}{8}, \frac{25}{221}, \ldots$ – бесконечный и стремится к пределу $\frac{4}{9}$. По сути, этот ряд и соответствующие каждому члену квадратичные формы описывает классы плохоприближаемых неопределенных квадратичных форм. Фундаментальность этой работы отмечает Б. Н. Делоне в работе [18]. В этой же работе он дает интересную геометрическую интерпретацию задачи А. А. Маркова и ее обобщения.

Описанные выше результаты имеют непосредственную связь с оценкой константы наилучших диофантовых приближений для $n = 1$.

Теорема 2. *[25] Пусть θ иррационально и является корнем уравнения $\varphi(\theta, 1) = 0$ и $\mu(f) = \inf |\varphi(x, y)|$ (x, y – целые, не равные нулю одновременно). Тогда*

1. *$C(\theta) \geq \mu(f)\sqrt{|\Delta|}$, каковы бы ни были a, b, c.*

2. *Если a, b, c – рациональные, то в предыдущем неравенстве всегда имеет место знак равенства.*

3. *Если, кроме того, $\varphi(x, y)$ принимает оба значения $\pm\mu$ для целых значений переменных, то существует бесконечно много целых p, q таких, что $|q(\theta q - p)| < C(\theta)$.*

С одной стороны, из этого утверждения непосредственно следует, что $C_1 \geq 1/\sqrt{5}$. С другой стороны, вместо цепочки неравенств для классов квадратичных форм можно записать цепочку неравенств для классов квадратичных иррациональностей, причем в правых частях будут находиться те же константы $\frac{1}{5}, \frac{1}{8}, \ldots$. Доказательство того, что $C_1 = 1/\sqrt{5}$ было получено А. Гурвицом [72] в 1891 г.

Разрешив полностью проблему Коркина для неопределенных бинарных форм, А. А. Марков в работах «О неопределенных тройничных квадратичных формах» (1901 г.) [30], «О неопределенных квадратичных формах с четырьмя переменными» (1902 г.) [31] ставит аналогичную проблему для неопределенных тернарных и кватернарных форм. Позднее исследования в этом направлении продолжил Б. А. Венков в работе [10] от 1945 г.

Значительный вклад в тесно связанный с диофантовыми приближениями раздел геометрии чисел внес другой ученик П. Л. Чебышева – Г. Ф. Вороной. Он подошел к вопросу изучения квадратичных форм с точки зрения геометрии [12]. В своей докторской диссертации «Об одном обобщении алгоритма непрерывных дробей» (1896 г.) [11], удостоенной премии имени В. Я. Буняковского, он построил и обосновал новые алгоритмы вычисления основных единиц кубического поля алгебраических чисел.

Важным понятием геометрии чисел является

Определение 3. *Пусть $\mathbb{F}$ – точечное тело. Если решетка Λ не имеет в $\mathbb{F}$ отличных от $\mathbb{O}$ точек ($\mathbb{O} \in \mathbb{F}$), то Λ допустима для $\mathbb{F}$. Точную нижнюю грань*

$$\Delta(\mathbb{F}) = \inf d(\Lambda)$$

определителей $d(\Lambda)$ всех $\mathbb{F}$-допустимых решеток Λ называют критическим определителем множества $\mathbb{F}$.

Вычисление критического определителя произвольного тела $\mathbb{F}$ является сложной задачей. Вопросам оценки значений некоторых критических определителей посвящены исследования А. В. Малышева. В своих работах он активно использовал метод Л. Дж. Морделла (1973 г.)[28]. В сочетании с использованием ЭВМ это позволило ему достичь значительных результатов в доказательстве гипотезы Минковского о критическом определителе области $|x|^p + |y|^p < 1$ [14, 16]. Некоторые асимптотические формулы количества представлений целого числа квадратичными формами можно найти в работе 1979 Е. В. Подсыпанина «Количество целых точек в эллиптической области (замечание к одной теореме А. В. Малышева)» [38]. Также Е. В. Подсыпанин [37] дает подробное исследование одного из вариантов обобщения цепных дробей – алгоритма Вигго Бруна – исследует его сходимость, получает выражение знаменателя n-ых подходящих дробей как функции неполных частных $a_1, \ldots, a_n$, $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$.

Нельзя не отметить вклад А. Я. Хинчина в развитие теории диофантовых приближений и цепных дробей в нашей стране. В 1936 в работе «Метрические задачи теории иррациональных чисел» [46] им было доказано существование постоянной Хинчина. Пусть

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots}}} -$$

разложение в цепную дробь, a_0 – целое, а остальные a_i – натуральные, тогда для почти всех вещественных чисел x выполняется, что среднее геометрическое элементов этого разложения равно

$$\lim_{n\to\infty} (a_1 a_2 \ldots a_n)^{1/n} = K_0 = 2,6854520010\ldots$$

При этом постоянную Хинчина K_0 можно выразить в виде бесконечного произведения

$$K_0 = \prod_{r=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{r(r+2)}\right)^{\log_2 r}.$$

Значимость этого результата сложно переоценить. Если каким-либо образом случайно выбирать элементы последовательности натуральных чисел, то среднее геометрическое элементов, вообще говоря, совершенно не обязательно будет одним и тем же для всех или почти всех получаемых последовательностей. Поэтому существование постоянной Хинчина – то обстоятельство, что среднее геометрическое элементов разложения в цепную дробь оказывается одним и тем же для почти всех вещественных чисел – это один из самых поразительных фактов в математике (по мнению профессора MIT С. Финча в книге [65]).

Также, нельзя не отметить монографию А. Я. Хинчина «Цепные дроби» [48], где дается исчерпывающее описание теории непрерывных дробей. В частности, в этой работе подробно показывается связь цепных дробей и диофантовых приближений одного действительного числа. В работе «Принцип Дирихле в теории диофантовых приближений» [47] излагается ряд методических вопросов, связанных с применением принципа Дирихле.

С течением времени исследования в области диофантовых приближений и в области цепных дробей стали развиваться в различных направлениях. Далее мы рассмотрим результаты в области диофантовых приближений и геометрии чисел, а затем вернемся к вопросам, связанным с исследованием цепных дробей.

Известна следующая гипотеза Минковского: в R^n для любой решетки Λ и любой точки L в множестве $\Lambda + L$ содержится точка $Y = (y_1, \dots, y_n)$, для которой будет выполнено

$$M = \prod_{i=1}^{n} |y_i| \leq 2^{-n} |\det \Lambda|.$$

Вопросу ее доказательства посвящено множество работ. Первый значительный результат был получен в 1934 Н. Г. Чеботаревым в работе «Заметки по алгебре и теории чисел» [50]. Он получил оценку

$$M \leq 2^{-n/2} |\det \Lambda|.$$

Исследованиям, связанным с гипотезой Минковского, посвящены работы Б. Ф. Скубенко. В 1972-1976 в работах [39, 40, 41] он излагает доказательства гипотезы Минковского для $n \leq 5$. В частности, он вводит и использует понятие «парус» – границу замкнутой выпуклой оболочки множества $(\Lambda \backslash 0)^f$, которое строится как отображение f множества $\Lambda \backslash 0$, полученного из Λ путем отбрасывания точки 0. Отображение f переводит точку $X = (x_1, \dots, x_n)$ в точку $X^f = (x_1^2, \dots, x_n^2)$. Парус состоит из $(n-1)$-мерных граней, соприкасающихся по $(n-2)$-мерным граням. Грани являются выпуклыми конечными многогранниками. В работе «К гипотезе Минковского при больших n» [42] он дает оценку

$$M < 2^{n/2} e^2 \left(\frac{\log^2 n}{n} \right)^{1/3}$$

для достаточно больших n.

В работе 1982 г. «К совместным приближениям алгебраических иррациональностей» [43] Б. Ф. Скубенко дает ряд интересных результатов для совместных приближений чисел чисто вещественных алгебраических и, в частности, кубических полей. Во-первых, повторяет полученную в 1955 Дж. В. С. Касселсом [58] оценку для константы наилучших диофантовых приближений для чисел из чисто вещественного кубического поля

$$\max\left(||q\theta_1||, ||q\theta_2||\right) \leq \frac{2}{7} q^{-1/2},$$

где θ_1, θ_2 принадлежит полю $\mathbb{Q}(2\cos\frac{2\pi}{7})$, а

$$||q\theta|| = \min_{a \in \mathbb{Z}} |q\theta - a|,$$

– расстояние до ближайшего целого. Во-вторых, Б. Ф. Скубенко дает оценку

$$||q\theta_i|| \cdot ||q\theta_j|| < \alpha_{ij}(q \log q)^{-1}$$

для произвольного целого q, θ_i, θ_j из чисто вещественного кубического поля и числа α_{ij}, зависящего только от θ_i, θ_j.

Известна следующая обобщенная теорема Рота–Шмидта [93].

Теорема 3. *Пусть $\theta_1, \ldots, \theta_n$ – вещественные алгебраические числа, такие что $1, \theta_1, \ldots, \theta_n$ линейно независимы над полем рациональных чисел. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует только конечное количество натуральных чисел q таких, что*

$$||q\theta_1|| \cdot \ldots \cdot ||q\theta_n|| < q^{-1-\varepsilon}.$$

В работе «К обобщенной теореме Рота–Шмидта» [44] Б. Ф. Скубенко дает следующее дополнение описанной выше теоремы.

Теорема 4. *Пусть $\theta_1, \ldots, \theta_n$ вещественные алгебраические числа из чисто вещественного алгебраического поля степени n. Тогда существует $C > 0$, что*

$$||q\theta_1|| \cdot \ldots \cdot ||q\theta_n|| \leq C(q \log q)^{-1}$$

для бесконечного числа натуральных чисел q.

Логическим продолжением этих исследований можно считать работу Н. Г. Мощевитина от 1992 г. «О совместных приближениях алгебраических чисел» [32]. В этой работе Н. Г. Мощевитин, основываясь на работах Б. Ф. Скубенко, вместо оценки совместного произведения получает оценку для отдельных сомножителей, сформулированную в следующей теореме.

Теорема 5. *Пусть натуральное q задает совместные приближения к числам $\theta_1, \dots, \theta_n$:*

$$||q\theta_i|| < cq^{-1/s}, \quad i = \overline{1, n}$$

где $c > 0$ – некоторая константа. Тогда

$$||q\theta_i|| > Cq^{-1/s} \log^{-\beta} q, \quad i = \overline{1, n}$$

с константами $C, \beta > 0$, зависящими от $\theta_1, \dots, \theta_n$ и c.

Дальнейшим развитием исследования в этой области является работа Н. Г. Мощевитина 1997 г. «О совместных диофантовых приближениях. Векторы заданного диофантова типа» [33]. В ней он, используя аппарат геометрии чисел, дает два обобщающих результата, непосредственно связанных с константой наилучших совместных диофантовых приближений. В этой работе сформулировано следующее определение.

Определение 4. *Пусть $\varphi(y)$ – функция от вещественного аргумента. Тогда натуральное p называется совместным φ-приближением к $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, если*

$$\max_{j=1,n} \min_{q \in \mathbb{Z}} |p\alpha_j - q| \leq \varphi(p).$$

Затем он доказывает следующие утверждения.

Теорема 6. *Пусть $\varphi(y) = y^{-1/s}\omega(y)$, где $\omega(y)$ монотонно убывает (не обязательно строго) при $y \geq 1$ и*

$$\omega(1) \leq 2^{-(s+1)(s+2)}(s!)^{-1/s}.$$

Тогда существуют числа $\theta_1, \dots, \theta_n$, допускающие бесконечную последовательность совместных φ-приближений, но не допускающих ни одного совместного $2^{-(s+3)}\varphi$-приближения.

Теорема 7. *Если в условии предыдущей теоремы потребовать более сильное условие*

$$\omega(1) \leq 2^{-(s+1)(s+3)}(s!)^{-1/s},$$

тогда существуют числа $\theta_1, \dots, \theta_n$, допускающие бесконечно много совместных φ-приближений, но не допускающих ни одного совместного φ-приближения.

Принципиальным отличием этих утверждений от упомянутых ранее является замена числовых констант на достаточно обширный класс функций $\varphi(y)$. Если в последней теореме сделать подстановку $\omega(y) = 2^{-(s+1)(s+3)}(s!)^{-1/s}$, мы получим оценку константы совместных диофантовых приближений

$$C_s \geq 2^{-(s+1)(s+3)}(s!)^{-1/s}.$$

В работе 2002 г. «К теореме Блихфельдта–Мюллендера–Спона о совместных приближениях» [34] Н. Г. Мощевитин развивает полученную В. Споном [94] (1968 г.) и В. Г. Новаком [88] (1993 г.) оценку сверху константы наилучших диофантовых приближений

$$C_n \leq \frac{1}{\beta_n}, \quad \beta_n \geq n \cdot 2^{n+1} \left(\int\limits_0^1 \frac{u^{n-1}du}{(1+u)^n + (1+u^n)} + \varepsilon_n \right), \quad \varepsilon_n > 0$$

и получает оценку для остаточного члена

$$\varepsilon_n = \frac{1}{2(\log 2\pi)^3 en^2 \cdot 2^{2n+7}} \left(1 - \frac{2^{1/m}}{2}\right)^{n+2} > 0, \quad n \geq 2.$$

При ее доказательстве он использовал следующее свойство совместных диофантовых приближений, полученное Дж. К. Лагариасом [79] в 1982

Лемма 1. *Пусть знаменатели q n-мерных наилучших совместных приближений образуют бесконечную последовательность $q_1 < \ldots < q_\mu < q_{\mu+1} < \ldots$. Тогда $q_{\mu+2^{n+1}} > 2q_\mu$.*

В 1982 Дж. К. Лагариас ввел величину, показывающую скорость роста знаменателей совместных приближений

$$g(\alpha) = \lim_{\alpha \in \mathbb{R}^n} \inf_{\nu \to \infty} q_\nu^{1/\nu},$$

где $q_1 < \ldots < q_i < q_{i+1} < \ldots$ – последовательные знаменатели совместных диофантовых приближений, и получил оценку

$$g(\alpha) \geq \theta \left(\frac{8+13\theta}{\theta^{13}}\right)^{1/11} \approx 1.28040\ldots$$

В работе 2005 г. «О наилучших двумерных совместных диофантовых приближениях в sup-норме» [35] Н. Г. Мощевитин улучшил оценку $g(\alpha)$ для двух чисел

$$g(\alpha) \geq \theta = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \approx 1.2720\ldots,$$

Как уже ранее отмечалось, теория диофантовых приближений тесно связана с теорией непрерывных дробей. В последнее время активные исследования в области цепных дробей велись В. И. Парусниковым и А. Д. Брюно. Ими в серии работ был дано обобщение алгоритма цепных дробей вначале на трехмерный [2, 3] (1994-1997 гг.), а потом и на многомерный случай [4, 5, 6, 7] (2004-2015 гг.).

Изложим суть этого обобщения. Пусть в n-мерном вещественном пространстве $\mathbb{R}^n$ с координатами $X = (x_1, \ldots, x_n)$ заданы m однородных вещественных форм (т. е. многочленов от переменных) $f_1(X), \dots, f_m(X)$. Модули $g_i(X) = |f_i(X)|$ форм $f_i(X), i = \overline{1,m}$, задают отображение $G(X) = (g_1(X), \dots, g_m(X))$ пространства R^n в положительный ортант $\mathbb{S} = R^m_+$ в m-мерном пространстве $\mathbb{R}^m$ с координатами

$$\mathbb{S} = (s_1, \dots, s_m) : s_i = g_i(X) = |f_i(X)|, i = \overline{1, \dots, m}.$$

При этом целочисленная решётка $\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$ отображается в некоторое множество $\mathbb{Z} \subset \mathbb{S}$. Замыкание выпуклой оболочки $\mathbb{H}$ множества $\mathbb{Z} \backslash 0$ является выпуклым множеством. Все целочисленные точки $X \in \mathbb{Z}^n \backslash 0$, отображающиеся на границу $\delta\mathbb{H}$ множества $\mathbb{H}$, назовём граничными. Ограничимся случаями, когда выпуклое множество $\mathbb{H}$ является многогранным, т.е. его граница $\delta\mathbb{H}$ состоит из вершин, рёбер, граней различных размерностей и не содержит непрерывных «кривых» частей. В этих случаях граница $\delta\mathbb{H}$ вычисляется с помощью стандартных программ для вычисления выпуклых многогранных оболочек [55]. Это и даёт алгоритмическое обобщение цепной дроби на любую размерность.

В работе «Вычисление основных единиц числовых колец с помощью обобщенной цепной дроби» [8] А. Д. Брюно сводит вычисление основных единиц кольца $\mathbb{Z}[\lambda]$ для целого неприводимого в $\mathbb{Q}$ вещественного многочлена и к вычислению куска границы $\delta\mathbb{H}$, содержащий $(m-1)$-мерную грань.

В. Г. Журавлев в серии работ [21, 22, 23] разработал ядерно-модульный алгоритм разложения алгебраических чисел в цепные дроби. В этих работах, используя методы дифференцирования индуцированных разбиений торов, строятся периодические ядерные приближения, для которых можно получить оценки, схожие с (2). Если вектор $\vec{x}$ таков, что вместе с 1 он образует базис чисто вещественного поля алгебраических чисел степени $n+1$, то для любого фиксированного $\theta > 0$ можно построить подходящие дроби $\frac{p_{ij}}{q_i}$ такие, что

$$\left| x_i - \frac{p_{ij}}{q_i} \right| \le \frac{c}{q_i^{1+1/n-\theta}}$$

для всех $j > j(\alpha, \theta)$, где константы $j(\alpha, \theta) > 0$ и $c = c(\alpha, \theta) > c$ не зависят от j. В работе [24] этот подход был обобщен для приближения линейных форм. У представителей Владимирской школы, учеников В. Г. Журавлева, имеются и другие работы в области теории диофантовых приближений [17, 52].

В настоящее время в нашей стране исследования в области приближения действительных чисел и теории цепных дробей проводятся также Е. И. Коркиной [27], О. Н. Германом [13], В. А. Быковским и М. О. Авдеевой [1, 9], О. А. Горкушой [15], Н. М. Добровольским и Н. Н. Добровольским [19, 20, 63].

Данная работа посвящена вопросу оценки снизу константы наилучших диофантовых приближений для n действительных чисел. Это проблема тесно связана с исследованиями в области диофантовых приближений, которые, как описано выше, активно развиваются в нашей стране на протяжении последних полутора столетий.

Формулировка вопроса

Задача приближения n действительных чисел является частным случаем задачи приближения n действительных линейных форм

$$\begin{pmatrix} \vec{\alpha_1} \\ \vec{\alpha_2} \\ \cdot\ \cdot \\ \vec{\alpha_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1m} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nm} \end{pmatrix}$$

и тесно связана с приближением одной линейной формы с помощью принципа переноса Хинчина [51]. При этом она имеет свою богатую историю, восходящую к П. Г. Дирихле [62].

Сформулируем задачу наилучших совместных диофантовых приближений n действительных чисел. Пусть

$$\vec{\alpha} = (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n)$$

— произвольный вектор действительных чисел. Нас будут интересовать приближения $\vec{\alpha}$ рациональными дробями

$$\frac{\vec{p}}{q} = \left(\frac{p_1}{q},\ \frac{p_2}{q},\ \ldots,\ \frac{p_n}{q}\right).$$

По теореме Дирихле (теорема 10, [51]), существует бесконечно много рациональных векторов $\vec{p}/q$ таких, что

$$\left|\alpha_i - \frac{p_i}{q}\right| < q^{-\frac{n+1}{n}}, \qquad i = \overline{1, \ldots, n}.$$

В качестве меры качества приближения мы будем использовать:

Определение 1. *Мерой качества совместных приближений Дирихле первого рода вектора $\vec{\alpha}$ рациональным вектором $\vec{p}/q$ называется величина*

$$D(\vec{\alpha}, \vec{p}/q) = \max_{i=\overline{1,n}} q\, |q\alpha_i - p_i|^n. \tag{5}$$

Тогда из теоремы Дирихле (теорема 1) следует, что существуют числа C такие, что неравенство

$$\max_{i=\overline{1,n}} q\, |q\alpha_i - p_i|^n < C \tag{6}$$

имеет бесконечное количество решений в целых числах $q > 0, p_1, \ldots, p_n$.

Определение 2. *Константой наилучших диофантовых приближений $C(\vec{x})$ для вектора $\vec{x}$ называется точная нижняя грань величины C, для которой существует бесконечное число рациональных векторов $\vec{p}/q$, удовлетворяющих неравенству*

$$D(\vec{x}, \vec{p}/q) < C. \tag{7}$$

То есть, для любой положительной константы $C < C(\vec{x})$ неравенство

$$D(\vec{x}, \vec{p}/q) < C$$

имеет конечное число решений с рациональным вектором $\vec{p}/q$, для $C > C(\vec{x})$ — бесконечное число решений, а для $C(\vec{x})$ вопрос о количестве решений остается открытым.

Из теоремы Дирихле непосредственно следует, что для любого вектора $\vec{x}$ константа наилучших диофантовых приближений $C(\vec{x}) \leq 1$.

Определение 3. *Константой наилучших диофантовых приближений C_n называется точная верхняя грань числа $C(\vec{x})$ по всем векторам $\vec{x}$ размерности n:*

$$C_n = \sup_{\vec{x} \in \mathbb{R}^s} C(\vec{x}).$$

То есть, C_n — это наименьшее положительное число, при котором неравенство (6) имеет бесконечное количество решений для всех $C = C_n + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) и любых $\vec{x}$. Нас в дальнейшем будет интересовать вопрос вычисления или оценки значения C_n.

Этот вопрос вызывает особый интерес в связи с тем, что вектора $\vec{x}$ для которых $C(\vec{x}) = C_n$ по сути являются плохоприближаемыми, так как на них величина (5) достигает наибольшего значения. Сразу встает вопрос о структуре этих векторов, о их свойствах, о причинах того, почему они являются плохоприближаемыми. Также вызывают интерес их экстремальные свойства – например, для $n = 1$ это числа из квадратичного поля $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$, в частности, всем известное золотое сечение.

Выделяют еще один частный случай наилучших диофантовых приближений $C(\vec{x})$ – наилучшие приближения алгебраических векторов $\vec{x}$.

Определение 4. *Константой наилучших диофантовых приближений C_n^* алгебраических чисел называют точную верхнюю грань числа $C(\vec{x})$ по всем векторам $\vec{x}$, таким, что вместе с 1 они образуют базис чисто вещественного поля алгебраических чисел степени $n + 1$.*

Для C_n^* было получено значительное количество оценок [53, 54, 60, 96]. Для нас этот случай имеет особый интерес в силу двух факторов.

Во-первых, методы оценки для алгебраических чисел значительно отличаются своим разнообразием от оценок для произвольных действительных чисел.

Во-вторых, Т. Кьюзик выдвигал гипотезу [60], что $C_n = C_n^*$. Одним из результатов, который может косвенно подкрепить это равенство является оценка, полученная Дж. Шекерсом (Szekers) [95]

$$C_n^* \leq C_n.$$

Отметим, что неравенство имеет место тогда, когда плохо приближаемый вектор $\vec{x}$ не является алгебраическим. Другим фактом, которым можно подкрепить эту гипотезу, является случай $n = 1$, где $C_1^* = C_1$. Для $n = 2$ известно, что $C_2^* = 2/7$, а $C_2 \geq 2/7$. Возможно, в будущем эта гипотеза будет либо подтверждена, либо опровергнута.

Степень разработанности

Исторически, в основе оценок для $n = 1$ лежит теория цепных дробей, и наиболее значимой является оценка А. Гурвица [72], полученная им в 1891. Для $n = 2$ в основе известных оценок лежит математический аппарат линейной алгебры (Ф. Фуртвенглер [67, 68]), геометрия чисел (Г. Дэвенпорт, Дж. В. С. Касселс [58, 59, 61]) и результаты многомерных обобщений цепных дробей (В. Адамс, Т. Кьюзик [53, 60]).

Одной из первых общих оценок снизу является результат, полученный в 1929 Ф. Фуртвенглером [67, 68]. Он построил оценки дискриминантов алгебраических полей, которые приводят к оценке качества приближения n действительных чисел рациональными, что формулируется в следующей теореме

Теорема 8. *Пусть k – положительное число меньшее $1/\sqrt{|\Delta|}$, где Δ – это наименьший по модулю дискриминант алгебраического поля степени $n+1$. Тогда для любых действительных чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ неравенства*

$$q\,|q\alpha_i - p_i|^n < k, \qquad i = \overline{1, n}$$

имеют бесконечное количество решений в целых числах $p_1, p_2, \ldots, p_n, q$.

Это утверждение в свою очередь приводит к оценке константы наилучших совместных диофантовых приближений

$$C_n \geq 1/\sqrt{|\Delta|}.$$

Одна из наиболее фундаментальных на данный момент оценок принадлежит Г. Дэвенпорту [61]. Позднее она была доработана Дж. В. С. Касселсом [58]. Г. Дэвенпорт обнаружил связь между значением критического определителя (см. определение 7) звездного тела и значениями некоторых алгебраических форм. В частном случае это позволяет, вычислив критический определитель $(n+1)$-мерного звездного тела Дэвенпорта

$$\mathbb{F}_n : |x_0| \max_{1 \le i \le n} |x_i|^n < 1,$$

получить значение константы наилучших совместных диофантовых приближений. Однако, вычисление критических определителей для тел такого вида является сложной задачей. Поэтому Дж. В. С. Касселс перешел от непосредственного вычисления критического определителя к оценке его значения. Этот подход оказался достаточно плодотворным, позволив получить оценки константы наилучших совместных диофантовых приближений для $n = 2, 3, 4$. Оценки такого рода являются достаточно сложной вычислительной задачей, и в каждом отдельном случае решение такой задачи требовало использования новых подходов.

Отметим некоторые известные оценки константы наилучших диофантовых приближений сверху. Первая оценка сверху была получена Г. Минковским [83] в 1896 с ипользованием геометрии чисел. Г. Ф. Блихфельдт [57], введя понятие фундаментального параллелепипеда в 1914, улучшил результат Г. Минковского. Позднее подход Г. Ф. Блихфельдта получил развитие в работах П. Мюллендера, В. Спона, В. Г. Новака [85, 94, 87, 88]. Значительный интерес представляет сравнение подходов при оценке константы наилучших совместных диофантовых приближений сверху и снизу.

Цели и задачи исследования

Целью данной работы является развитие подходов Г. Дэвенпорта, Дж. В. С. Касселса, Т. Кьюзика, С. Красса с целью получения оценки снизу константы наилучших диофантовых приближений для $n > 4$. Для этого будет использоваться оценка наибольшего значения $V_{n,s}$ – объема параллелепипеда с центром в начале координат, находящегося внутри $(n+1)$-мерного звездного тела Дэвенпорта

$$\mathbb{F}_n : |x_0| \max_{1 \le i \le n} |x_i|^n < 1.$$

Новизна исследования

Все результаты настоящей диссертации являются новыми.

Теоретическая и практическая значимость работы

Получены новые оценки константы наилучших диофантовых приближений, а также значительная информация о структуре значений $V_{n,s}$. Предложена новая методика оценки значений

$V_{n,s}$: вначале с помощью численных экспериментов высказывается гипотеза о виде точных значений оценок, затем эти оценки выводятся и доказываются аналитически. Эта методика может быть обобщена и применена к вопросу оценки некоторых критических определителей решеток.

Методы исследования

В середине XX века Г. Дэвенпортом была найдена фундаментальная связь значения константы наилучших совместных диофантовых приближений и критического определителя звездного тела специального вида. Позднее Дж. В. С. Касселс перешел от непосредственного вычисления критического определителя к оценке его значения с помощью вычисления наибольшего значения $V_{n,s}$ – объема параллелепипеда с центром в начале координат, обладающего определенными свойствами. Этот подход позволил получить оценки константы наилучших совместных диофантовых приближений для $n = 2, 3, 4$ (см. работы Дж. В. С. Касселса [58], Т. Кьюзика [59], С. Красса [77, 78]).

Идея построения оценок отличается от работы Т. Кьюзика [59]. Задача получения оценок значений критического определителя звездного тела Дэвенпорта сводится к задаче нахождения наибольшего объема параллелепипеда с центром в начале координат находящегося внутри $(n + 1)$-мерного звездного тела Касселса. Эта задача в свою очередь была сведена к задаче многомерной оптимизации. Численные эксперименты в системе компьютерной алгебры `Wolfram Mathematica` позволили высказать гипотезу о виде точных значений оценок $V_{n,s}$, затем эти оценки были выведены и доказаны аналитически. Другим отличием построенных оценок является возможность обобщения их на любую размерность.

Положения, выносимые на защиту:

1. Теорема 24 о том, что для объема $V_{5,2}$ наибольшего параллелепипеда звездного тела Касселса размерности 5 справедлива оценка
$$V_{5,2} \geq \sqrt{\frac{27\left(9+5\sqrt{5}\right)}{88}},$$
и как следствие для константы совместных диофантовых приближений C_5 размерности 5 справедлива оценка
$$C_5 \geq \frac{3}{46}\sqrt{\frac{3\left(9+5\sqrt{5}\right)}{1166}}.$$
2. Теорема 25 о том, что для объема $V_{6,3}$ размерности 6 справедлива оценка
$$V_{6,3} \geq \frac{9+5\sqrt{5}}{11},$$

и как следствие для константы совместных диофантовых приближений C_6 размерности 6 справедлива оценка

$$C_6 \geq \frac{9+5\sqrt{5}}{11\sqrt{184\,607}}.$$

Апробация работы

Основные результаты настоящей диссертации опубликованы в статьях [107, 108, 109] за авторством соискателя. Каждая из публикаций напечатана в журнале, входящем в список ВАК. Результаты диссертации докладывались

- на XV, XVI, XVIII и XIX Международной конференции Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения [103, 106, 111];
- на семинаре по теории чисел на механико-математическом факультете МГУ;
- на алгебраическом семинаре ПОМИ РАН.

1. История вопроса

1.1. Оценки для $n = 1$ и $n = 2$

Первые результаты по оценке константы наилучших диофантовых приближений были получены в XIX веке. В первую очередь, это общий результат, полученный П. Г. Дирихле в 1842 [62] для n линейных форм:

Теорема 9. *Пусть α_{ij} $(1 \le i \le n,\ 1 \le j \le m)$ и Q – произвольные действительные числа, причем $Q > 1$. Тогда найдутся целые числа $q_1,\ q_2, \dots,\ q_m$ и $p_1,\ p_2, \dots,\ p_n$ такие, что*

$$1 \le \max\left(|q_1|,\ |q_2|, \dots,\ |q_m|\right) < Q^{\frac{n}{m}}$$

$$\max_{1 \le i \le n} \left| \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} \cdot q_j - p_i \right| \le \frac{1}{Q}. \tag{8}$$

Доказательство. См. [51].

откуда непосредственно следует

Теорема 10. *Пусть $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \dots,\ \alpha_n$ и Q – произвольные действительные числа, причем $Q > 1$. Тогда найдутся целые числа $p_1,\ ,p_2\ , \dots,\ p_n$ и q такие, что $1 \le q < Q^n$ и*

$$\max_{1 \le i \le n} |q\alpha_i - p_i| \le \frac{1}{Q} < \frac{1}{q}.$$

Из этой теоремы следует, что $C_n \le 1$. Доказательство этих теорем основано на принципе Дирихле.

В 1891 А. Гурвиц [72], используя теорию цепных дробей и теорию квадратичных иррациональностей, доказал следующую теорему.

Теорема 11. *Справедливы следующие утверждения:*

- *Для любого иррационального числа α существует бесконечное множество различных рациональных чисел p/q, удовлетворяющих неравенству*

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{\sqrt{5}\, q^2}.$$

- *Сформулированное выше утверждение становится неверным, если заменить $\sqrt{5}$ на любое число $A > \sqrt{5}$.*

Доказательство. См. [51].

Это утверждение приводит к первому и единственному известному точному значению C_n. Это

$$C_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

При этом равенство достигается при приближении чисел из квадратичного поля $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$.

В дальнейшем проводилось много исследований по вопросу обобщения цепных дробей на многомерный, в частности двухмерный, случай. Первым такие обобщения рассмотрел Л. Эйлер [64] в 1775 В конце XIX века К. Г. Я. Якоби [73] разработал первый алгоритм, позволяющий разложить произвольный вектор в векторную цепную дробь. В начале XX века А. О. Перрон в своей магистерской диссертации (1907 г.) исследовал этот алгоритм [92]. В их честь он был назван алгоритмом Якоби-Перрона. Этот алгоритм достаточно хорошо исследован [56, 86, 80].

Позднее были получены другие алгоритмы обобщения цепных дробей [4, 5, 6]. Однако, никакие из полученных алгоритмов не позволили получить оценки для C_2.

Для C_2 значительные результаты были получены в середине XX века.

В 1927 Ф. Фуртвенглер [67, 68] показал (см. 1.2.), что $C_2 \geq \frac{1}{\sqrt{23}}$. Затем Дж. В. С. Касселс [58], используя результаты Г. Дэвенпорта [61], получил оценку $C_2 \geq \frac{2}{7}$.

Дальнейшие исследования по этому вопросу, во многом были посвящены определению классов чисел на которых достигается оценка $C_2(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{2}{7}$. Это связано с тем, что оценка Дж. В. С. Касселса в этом вопросе не конструктивна. Для случая $n = 2$ были получены значительные результаты в этом направлении. Был детально исследован вопрос оценки

$$C_2^* = C(\alpha, \beta),$$

где α и β – кубические иррациональности [53, 54, 60, 96]. Результатом этих исследований стала оценка $C_2^* = 2/7$, которая достигается для алгебраических целых чисел из чисто кубического поля $Q\left(2\cos\frac{2\pi}{7}\right)$ [60].

1.2. Оценка Ф. Фуртвенглера

В 1927 Ф. Фуртвенглер используя теорию алгебраических полей и произведя оценку дискриминанта произвольного алгебраического поля [67, 68], получил следующую оценку:

Теорема 12. *Пусть k – положительное число? меньшее $1/\sqrt{|\Delta|}$, где Δ – это наименьший по модулю дискриминант алгебраического поля степени $n+1$. Тогда для любых действительных чисел $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n$ неравенства*

$$q\left|q\alpha_i - p_i\right|^n < k, \qquad i = \overline{1, n}$$

имеют только конечное количество решений в целых числах $p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_n,\ q$.

Доказательство. См. [67, 68].

Из этого утверждения непосредственно следует, что

$$C_n \geq 1/\sqrt{|\Delta|}. \tag{9}$$

Например, для $n = 2$ наилучшая оценка достигается при $\Delta = -23$ [97] (дискриминант кубического поля, порождаемого уравнением $x^3 - x^2 - 1 = 0$) и соответствующая оценка равна $C_2 \geq 1/\sqrt{23}$. Для $n = 3$ наименьший по модулю дискриминант равен 117 [97] (дискриминант поля, порождаемого уравнением $x^4 - x^3 - x^2 + x + 1 = 0$) и соответствующая оценка равна $C_3 \geq 1/\sqrt{117}$.

1.3. Оценки Г. Дэвенпорта и Дж. В.С. Касселса

Рассмотрим более подробно оценки Г. Дэвенпорта и Дж. В.С. Касселса.

1.3.1. Предварительные понятия из геометрии чисел

Напомним некоторые понятия из геометрии чисел [26].

Определение 5. *Функция* $F(\overline{x})$, *где* $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ *называется лучевой, если*

- $F(\overline{x})$ *неотрицательна, то есть* $F(\overline{x}) \geq 0$;
- $F(\overline{x})$ *непрерывна;*
- $F(\overline{x})$ *однородна, то есть для любого* $t \geq 0$, $F(t\overline{x}) = tF(\overline{x})$.

Определение 6. *Пусть* $a_1, \ldots, a_n$ – *линейно независимые точки вещественного евклидова пространства. Множество всех точек*

$$x = u_1 a_1 + \ldots + u_n a_n$$

с целыми коэффициентами $u_1, \ldots, u_n$ *называется решеткой* Λ. *Величина*

$$d(\Lambda) = |\det(a_1, \ldots, a_n)|$$

называется определителем решетки Λ.

Определение 7. *Пусть $\mathbb{F}$ – точечное тело. Если решетка Λ не имеет в $\mathbb{F}$ отличных от $\mathbb{O}$ точек ($\mathbb{O} \in \mathbb{F}$), то Λ допустима для $\mathbb{F}$ или $\mathbb{F}$-допустима. Точную нижнюю грань*

$$\Delta(\mathbb{F}) = \inf d(\Lambda)$$

определителей $d(\Lambda)$ всех $\mathbb{F}$-допустимых решеток Λ называют критическим определителем множества $\mathbb{F}$. Если $\mathbb{F}$-допустимых решеток нет, то $\mathbb{F}$ является множеством бесконечного типа и $\Delta(\mathbb{F}) = \infty$.

Определение 8. *Под звездным телом понимают множество, обладающее следующими свойствами:*

- *существует точка, называемая "началом", которая является внутренней точкой множества;*
- *любой луч, выходящий из "начала", либо не пересекается с границей множества, либо имеет с ней только одну общую точку.*

1.3.2. Теорема Минковского о линейных формах

Справедлива следующая теорема.

Теорема 13. *Пусть α_{ij} $(1 \leq i, j \leq n)$ – действительные числа с определителем, равным ± 1. Пусть числа $A_1, \ldots, A_n$ положительны и $A_1 A_2 \ldots A_n = 1$. Тогда существует целая точка $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n) \neq 0$ такая, что*

$$|\alpha_{i1}x_1 + \ldots + \alpha_{in}x_n| < A_i, \qquad (1 \leq i \leq n-1),$$

$$|\alpha_{n1}x_1 + \ldots + \alpha_{in}x_n| \leq A_n.$$

Доказательство. См. [26].

Непосредственно из этой теоремы следует, что для произвольных действительных чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ и целого числа Q, существуют такие $n+1$ целых чисел $u_0, \ldots, u_n$, одновременно не равных нулю, что

$$|u_0\alpha_j - u_j| < Q^{-1/n}, \qquad 1 \leq j \leq n,$$

$$|u_0| \leq Q.$$

Или же

$$\left|\alpha_j - \frac{u_j}{u_0}\right| < \frac{1}{u_0 Q^{1/n}}, \qquad 1 \leq j \leq n,$$

С другой стороны
$$u_0 \left(\max_{1 \le j \le n} |u_0 \alpha_j - u_j| \right)^n < 1. \tag{10}$$

На самом деле, это неравенство имеет бесконечно много решений $u_0 > 0, u_1, \ldots, u_n$. Нам в первую очередь интересно, какой константой можно заменить 1 в правой части (10). По сути, это описанная выше константа C_n (6)
$$\max_{i=\overline{1,n}} q \left| q\alpha_i - p_i \right|^n < C_n.$$

1.3.3. Предварительные рассуждения

Напомним, что нас интересует оценка константы C_n (6)
$$\max_{i=\overline{1,n}} q \left| q\alpha_i - p_i \right|^n < C_n.$$

Заметим, что вместо минимизации выражения $\max\limits_{i=\overline{1,n}} |q\alpha_j - p_i|$ можно заняться минимизацией выражения $\sum\limits_{i=\overline{1,n}} (q\alpha_j - p_i)^2$ или $\prod\limits_{i=\overline{1,n}} |q\alpha_j - p_i|$. Все эти задачи можно объединить в следующей общей проблеме.

Проблема. *Пусть $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ – лучевая функция от n переменных. Каково наименьшее значение*
$$q\Phi^n(q\alpha_1 - p_1, \ldots, q\alpha_n - p_n)$$
для различных наборов $q > 0$ и $p_1, \ldots, p_n$?

Пусть
$$D(\Phi, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \lim \inf_{u_0 \to \infty} u_0 \Phi^n(u_0\alpha_1 - u_1, \ldots, u_0\alpha_n - u_n)$$
и
$$D(\Phi) = \sup_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n} D(\Phi, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$$

В середине XX века Г. Дэвенпорт, занимаясь проблемами геометрии чисел, смог получить оценку сверху для $D(\Phi)$. Для этого он использовал свойства критических определителей решеток, сходимость функций и решеток.

Рассмотрим следующую лучевую функцию
$$F(x_0, \ldots, x_n) = \left(|x_0| \Phi^n(x_1 \operatorname{sign} x_0, \ldots, x_n \operatorname{sign} x_0) \right)^{\frac{1}{n+1}}.$$

Пусть
$$\delta(F) = \sup_{\Lambda} \frac{F^{n+1}(\Lambda)}{d(\Lambda)},$$

где точная верхняя грань берется по всем $(n+1)$-мерным решеткам. Тогда [26]

$$\delta(F) = \{\Delta\mathbb{F}\}^{-1},$$

где $\mathbb{F}$ это $(n+1)$-мерное звездное тело

$$\mathbb{F} : F(x_0, \ldots, x_n) < 1,$$

а $\Delta\mathbb{F}$ – его критический определитель.

Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 14 (Г. Дэвенпорт). *Пусть Φ и F связаны, как описано выше, тогда*

$$D(\Phi) = \delta(F).$$

Доказательство. См. [26].

1.3.4. Оценка Г. Дэвенпорта

Пусть

$$\Phi(x_1, \ldots, x_n) = \max_{1\le i\le n} |x_i|$$

и

$$F^{n+1}(x_0, \ldots, x_n) = |x_0| \max_{1\le i\le n} |x_i|^n.$$

Тогда согласно теореме 14

$$\sup_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n} \max_{i=\overline{1,n}} q\,|q\alpha_i - p_i|^n \le \delta(F).$$

Откуда

$$C_n = \delta(F) = \frac{1}{\Delta\mathbb{F}}$$

где $\mathbb{F}$ – это $(n+1)$-мерное звездное тело (будем называть его *звездным телом Дэвенпорта*)

$$\mathbb{F} : F(x_0, \ldots, x_n) < 1,$$

или же

$$|x_0| \max_{1\le i\le n} |x_i|^n < 1, \tag{11}$$

а $\Delta\mathbb{F}$ – его критический определитель (будем обозначать его D_n). Это приводит нас к

Теорема 15.

$$C_n = \frac{1}{D_n}. \tag{12}$$

Доказательство. См. выше.

1.3.5. Оценка Дж. В.С. Касселса

Однако вычисление D_n на практике оказалось очень сложно. Это во многом связано с тем, что звездное тело, для которого необходимо найти критический определитель, негладкое. Вместо непосредственного вычисления D_n, Дж. В.С. Касселс [59] смог оценить сверху D_n, используя дискриминант d произвольного алгебраического поля F степени n, и тем самым оценить снизу C_n.

Теорема 16. *Пусть*

$$f_{n,s} = \frac{1}{2^s} \prod_{i=1}^{s} |x_i^2 + x_{s+i}^2| \prod_{i=2s+1}^{n} |x_i| \tag{13}$$

и $2^n V_{n,s}$ – объем наибольшего параллелепипеда с центром в начале координат, содержащегося внутри фигуры (будем называть его звездным телом Касселса)

$$f_{n,s} \leq 1. \tag{14}$$

Пусть $\Delta_{n,s}$ – наименьшее абсолютное значение дискриминанта действительного поля степени $n+1$, которое имеет s пар комплексно-сопряженных алгебраических чисел (то есть $2s \leq n+1$). Тогда

$$D_n \leq \sqrt{\Delta_{n,s}}/V_{n,s}, \tag{15}$$

или же

$$C_n \geq V_{n,s}/\sqrt{\Delta_{n,s}}. \tag{16}$$

Доказательство. [59]

Пусть $M_1, \ldots, M_{n+1}$ – это $(n+1)$ линейных форм от n переменных, такие что коэфициенты M_1 образуют базис F, коэффициенты остальных форм являются им сопряженными. Пусть $r+2s = (n+1)$, и M_j и M_{s+j} $(1 \leq j \leq s)$ – это комплексно-сопряженные формы, а $M_{2s+1}, \ldots, M_{n+1}$ – это r чисто действительных форм. Тогда

$$|M_1 \cdot \ldots \cdot M_{n+1}| \geq 1 \tag{17}$$

для произвольных действительных чисел, не всех равных нулю. Целочисленная решетка

$$x_{j-1} + i x_{s+j-1} = \sqrt{2} M_j \quad (1 \leq j \leq s) \qquad\qquad x_{j-1} = M_j \quad (2s+1 \leq j \leq n+1) \tag{18}$$

имеет определитель $d^{1/2}$ и не содержит отличных от нуля целых точек внутри (11). Так как $x_{j-1}^2 + x_{s+j-1}^2 = 2 M_j M_{s+j} = 2|M_j|^2$, то

$$\max(|x_j|, |x_{s+j}|) \geq |M_j| = |M_{s+j}|.$$

Отсюда непосредственно следует, что $D_n \leq |d|^{1/2}$, что дает оценку Ф. Фуртвенглера (9).

Можно усилить эту оценку[59], используя неравенство

$$2^{-s}(x_0^2 + x_s^2) \cdot \ldots \cdot (x_{s-1}^2 + x_{2s-1}^2)|x_{2s} \cdot \ldots \cdot x_n| \geq 1, \tag{19}$$

которое получается из (17) и (18), для любых $x_0, \ldots, x_n$, не всех равных нулю. Пусть $2^n V$ – это наибольший объем n-мерного параллелепипеда $|y_1| \leq 1, \ldots, |y_n| \leq 1$, лежащего внутри фигуры

$$2^{-s}(x_0^2 + x_s^2) \cdot \ldots \cdot (x_{s-1}^2 + x_{2s-1}^2)|x_{2s} \cdot \ldots \cdot x_{n-1}| \leq 1, \tag{20}$$

где $y_1, \ldots, y_n$ – это линейные формы от $x_0, \ldots, x_{n-1}$. Определитель решетки порожденной этими формами равен V^{-1}, и в силу гомогенности левая часть (20) всегда $\leq (\max\limits_{1 \leq i \leq n} |y_i|)^n$.

Отсюда, используя (19), получаем, что решетка $y_1, \ldots, y_n, x_n$ является допустимой для области (11),откуда

$$D_n \leq V^{-1}|d|^{1/2}.$$

Это приводит нас к оценке (16)

$$C_n \geq \frac{V}{|d|^{1/2}}.$$

Теорема доказана. □

1.4. Известные результаты

Несложно показать, что $V_{2,0} = 2$ и $V_{2,1} = 1$. А так как наименьший дискриминант чисто действительного кубического поля равен 49 (для случая $x^3 + 2x^2 - x - 1 = 0$), мы получаем оценку $C_2 \geq \frac{2}{7} (> \frac{1}{\sqrt{23}})$. Этот результат принадлежит Дж. В.С. Касселсу [58].

Оценка в случае $n = 3$ принадлежит Т. Кьюзику [59]. Он показал, что

$$V_{3,1} = 2; \qquad V_{3,0} \geq \frac{3^{3/2}}{2}.$$

Для этого он решил достаточно сложную трехмерную оптимизационную задачу, смог явно построить параллелепипед наибольшего объема $V_{3,1}$ и доказать его оптимальность.

Так как [82] $\Delta_{3,1} = 275, \Delta_{3,0} = 725$, то

$$C_3 \geq \frac{2}{\sqrt{275}} > \frac{3^{3/2}}{2\sqrt{725}}.$$

С. Красс [77, 78] показал, что

$$V_{4,2} \geq \frac{16}{9}; \qquad V_{4,1} \geq 2; \qquad V_{4,0} \geq 4.$$

При оценке $V_{4,2}$ С. Красс не пошел путем Т. Кьюзика, а лишь предъявил параллелепипед, доказав, что он удовлетворяет необходимым условиям, то есть его оценка допускает возможность улучшения.

Так как [71] $\Delta_{4,2} = 1609, \Delta_{4,1} = 4511, \Delta_{4,0} = 14641$, то

$$C_4 \geq \frac{16}{9\sqrt{1609}} > \frac{4}{\sqrt{14641}} > \frac{2}{\sqrt{4511}}.$$

Ему же принадлежат и более общие оценки [77]:

$$V_{n,[n/2]} \leq V_{n,[n/2]-1} \leq \ldots \leq V_{n,0}$$

$$V_{n,s}V_{n',s'} \leq V_{n+n',s+s'}, \tag{21}$$

откуда (так как $V_{4,2} \geq \frac{16}{9}$) может быть улучшена оценка Ф. Фуртвенглера (9) для $C_n (n \geq 4)$

$$C_n \geq \frac{V_{n,[n/2]}}{\sqrt{\Delta_{n+1}}} \geq \frac{(16/9)^{[n/4]}}{\sqrt{\Delta_{n+1}}} > \frac{1}{\sqrt{\Delta_{n+1}}}. \tag{22}$$

Также С. Красс [78] приводит численную оценку

$$V_{5,2} \geq 2.3932\ldots$$

1.5. Другие оценки константы наилучших диофантовых приближений

До этого мы рассматривали оценки C_n снизу. Рассмотрим также и известные результаты по оценке константы C_n сверху [34].

В 1896 Г. Минковский, используя геометрию чисел [83], получил оценку

$$C_n \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \sim \frac{1}{e}, \quad n \to \infty.$$

В 1914 Г. Ф. Блихфельдт, сформулировав понятие фундаментального параллелепипеда и совместив его с подходом Г. Минковского [57], улучшил его результат, доказав, что

$$C_n \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n-1}} \sim \frac{1}{e + \frac{1}{e}}, \quad n \to \infty.$$

В 1948 П. Мюллендер [85], развивая метод Ф. Блихфельдта и обобщая конструкции Л. Дж. Морделла [84] и Коксмы–Меленбелда [75], получил оценку

$$C_n \leq \frac{1}{\beta}, \quad \beta = 25/8 + o(1), \quad n \to \infty.$$

Вместо выбора конкретных точек для применения оценки Г. Минковского, как у Г. Ф. Блихфельдта, П. Мюллендер построил условия, необходимые для применения оценки Г. Минковского, и поставил задачу найти такие точки, в которых оценка будет наилучшей.

Следующий результат принадлежит В. Спону (1967) [94]; усиливая оценки П. Мюллендера (в основном технически), он доказал, что

$$C_n \leq \frac{1}{\beta_n}, \quad \beta_n \geq n \cdot 2^{n+1} \int\limits_0^1 \frac{u^{n-1} du}{(1+u)^n + (1+u^n)} \sim \pi, \quad n \to \infty.$$

В своей работе В. Спон предполагает [34], что этот последний результат представляет собой наилучшую оценку, которая может быть получена с помощью теоремы Минковского о выпуклом теле и подхода Блихфельдта.

Позднее В. Г. Новак [88] предложил конструкцию, которая позволяет улучшить результат Спона и добавить в правой части положительную величину ϵ_n

$$C_n \leq \frac{1}{\beta_n}, \quad \beta_n \geq n \cdot 2^{n+1} \int\limits_0^1 \frac{u^{n-1} du}{(1+u)^n + (1+u^n)} + \varepsilon_n.$$

Оценки для ε_n получены, например, в [34].

В случае небольших размерностей существуют и более точные оценки. Например, используя оценки критических опеределителей некоторых звездных тел, Дж. Макк и В. Г. Новак [81, 87] получили результат $C_2 \leq \left(\frac{8}{13}\right)^2$.

2. Предварительные оценки наибольших параллелепипедов

2.1. Предварительные рассуждения

Рассмотрим матрицу n-ого порядка

$$A_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{23}$$

Пусть $\mathbb{E}$ – n-мерный единичный куб, состоящий из точек

$$\vec{e} = (e_1, e_2, \ldots, e_n), \qquad 0 \le e_i \le 1, \qquad i = \overline{1, n}.$$

Матрица A преобразует его в n-мерный параллелепипед

$$\mathbb{A} : \vec{a} = A \cdot \vec{e}. \tag{24}$$

Заметим, что таким образом каждому n-мерному параллелепипеду соответствует матрица A. Объем этого параллелепипеда равен $2^n \det A$.

Пусть $\mathbb{F}_{n,s}$ – это n-мерное звездное тело

$$\mathbb{F}_{n,s} : f_{n,s} \le 1,$$

где $f_{n,s}$ это (13).

Нас будет интересовать, находится ли некоторый параллелепипед $\mathbb{A}$ внутри звездчатого тела $\mathbb{F}_{n,s}$. Можно предложить следующий метод проверки этого утверждения. Составим оптимизационную задачу

$$\begin{gathered} f_{n,s} \to \max, \\ |b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \ldots + b_{1n}x_n| \le 1, \\ |b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \ldots + b_{2n}x_n| \le 1, \\ \ldots \\ |b_{n1}x_1 + b_{n2}x_2 + \ldots + b_{nn}x_n| \le 1. \end{gathered} \tag{25}$$

Если решение задачи ≤ 1, то параллелепипед $\mathbb{A}$ лежит полностью внутри звездного тела $\mathbb{F}_{n,s}$, в противном случае, часть его находится вне звездного тела.

Таким образом, если параллелепипед $\mathbb{A}$ лежит внутри звездного тела $\mathbb{F}_{n,s}$, имеет место оценка

$$V_{n,s} \ge \det A. \tag{26}$$

В дальнейшем нашей целью будет построение матрицы A такого вида, чтобы задача (25) имела решение $\max f_{n,s} \leq 1$. Параллелепипеды $\mathbb{A}$, для которых $\det A$ "велико", будем называть *наибольшими.* Соответствующую наибольшему параллелепипеду матрицу мы также будем называть *наибольшей.*

2.2. Численные эксперименты

На первом этапе исследования решено провести вычислительные эксперименты по численному нахождению наибольших значений $V_{n,s}$. В качестве инструмента исследования был выбран математический пакет `Wolfram Mathematica`.

Идея эксперимента состоит в следующем. Будем производить направленный перебор матриц A (23) с целью найти матрицу с наибольшим $\det A$, удовлетворяющую условию (25). Суть перебора следующая – построить "сетку" из коэффициентов матрицы и постепенно сужать ее в сторону соответствующую большим значениям $\det A$.

Такой подход имеет право на существование по следующим причинам:

- Во-первых, небольшое изменение параметров параллелепипеда $\mathbb{A}$ приводит к небольшому изменению $\max f_{n,s}$ на нем. Это позволяет применить к задаче итерационные методы поиска экстремума. Например, деление пополам. Применение градиентных методов в данном случае невозможно, так как нам ничего неизвестно об аналитическом представлении оптимизируемой функции

  $$\overline{\mathbb{F}}(A) = \max \det A | \max_{A} f_{n,s} \leq 1.$$

  Для сужения интервала поиска мы будем использовать следующую эвристику: делим текущий интервал на три части (пусть длина части равна h_i) по каждому измерению, находим среди полученных точек точку, где значение $\overline{\mathbb{F}}(A)$ максимально, строим вокруг этой точки параллелепипед со сторонами $2h_i$ и продолжаем поиск в нем.

  Отметим, что в первой итерации целесообразно делить текущий интервал не на три, а на большее число частей.

- Во-вторых, самой сложной подзадачей, которую приходится решать, является нахождение $\max_{A} f_{n,s}$ – это задача оптимизации нелинейной функции при линейных ограничениях. Как показывает практика, она может быть достаточно успешна решена с помощью системы компьютерной алгебры `Wolfram Mathematica`. Подробнее этот вопрос рассматривается в 2.2.1..

Заметим также, что в общем случае описанный выше подход не гарантирует сходимости к локальному экстремуму и соответственно не позволяет найти абсолютное наибольшее значение $V_{n,s}$ для какой-то конкретной размерности. С другой стороны, этот подход позволяет получить предварительные результаты и проверить, может ли матрица A определенной структуры быть интересна для дальнейших исследований на предмет соответствия ей наибольшего параллелепипеда $\mathbb{A}$.

2.2.1. Методика оценки $\max f_{n,s}$

Отдельный вопрос встает о проверке допустимости конкретного параллелепипеда $\mathbb{A}$ (находится ли $\mathbb{A}$ внутри звездчатого тела $\mathbb{F}_{n,s}$.). Как уже отмечалось выше, для этого достаточно решить задачу (25). На практике выяснилось, что математический пакет `Wolfram Mathematica` не всегда корректно может решить данную оптимизационную задачу. Далее мы опишем технические проблемы, возникшие в процессе численных решения задачи (25).

Так как нам необходимо найти максимум значения функции, мы используем метод `NMaximize` для $f_{n,s}$. Помимо оптимизируемой функции и ограничений он имеет следующие параметры:

- `AccuracyGoal` и `PrecisionGoal` – точность полученного результата;
- `WorkingPrecision` – точность вычислений;
- `Method` – метод, возможные варианты `DifferentialEvolution`, `NelderMead`, `SimulatedAnnealing`, `RandomSearch`.

Потенциальными способами повысить точность полученного результата является изменение этих параметров. Повышение `AccuracyGoal, PrecisionGoal, WorkingPrecision` на практике, во-первых, значительно увеличивают время выполнения `NMaximize`, а во-вторых, чаще всего не решают проблемы сходимости к “неправильному” локальному минимуму. Этот эффект достаточно наглядно иллюстрируется на задаче

$$-x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2, \qquad x^2 + y^2 \leq 4.$$

График ее значений изображен на рисунке 1. На нем видно, что в данной области существует два локальных минимума, и оптимизационные алгоритмы теоретически могут сходиться к любому из них.

Поэтому нас интересовала зависимость результата оптимизации от параметра `Method`. Выяснилось, что в случае задач типа (25) результаты могут значительно различаться. Например,

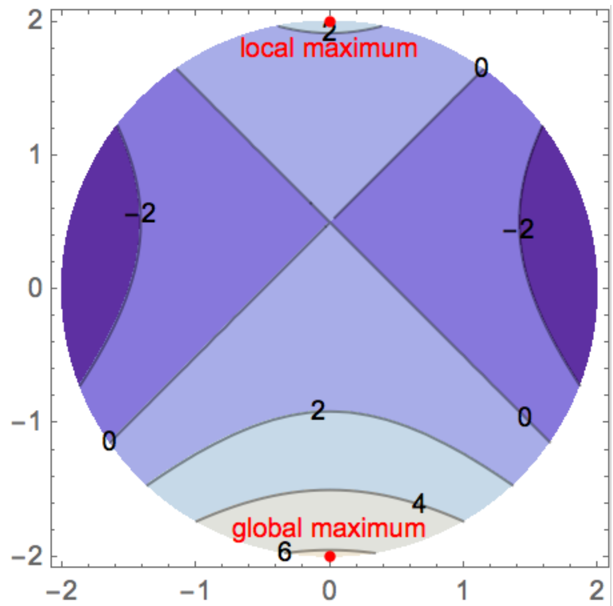

Рис. 1. Пример нескольких локальных минимумов

для задачи

$$f = -\frac{1}{4}c\left(-y_4 + y_5\right)\left(a^2 y_1^2 + b^2\left(-y_2 + y_3\right)^2\right)\left(b^2\left(y_2 + y_3\right)^2 + c^2\left(y_4 + y_5\right)^2\right),$$

$$\text{где } a = 0.657,\ b = 1.138,\ c = 0.893,$$

$$-1 \le y1 \le 1,\ -1 \le y2 \le 1,\ -1 \le y3 \le 1,\ -1 \le y4 \le 1,\ -1 \le y5 \le 1$$

результаты имеют следующий вид:

Метод	Значение	Точка
`DifferentialEvolution`	1.18409	$(-1, -1, -1, 0.3333, 1)$
`NelderMead`	1.04968	$(1, -0.2113, -1, -1, 1)$
`SimulatedAnnealing`	1.18409	$(1, 1, -1, -1, -0.3333)$
`RandomSearch`	1	$(-1, -1, -1, -1, 1)$

Поэтому было решено: во-первых, отказаться от использования методов `NelderMead` и `RandomSearch`, а во-вторых – производить предварительную проверку значений $f_{n,s}$ в вершинах, на ребрах и диагоналях. Это позволяет, во-первых, отсечь значительную часть некорректных значений, даже не решая оптимизационную задачу (на решение этой задачи требуется значительное количество ресурсов, поэтому такой подход также является и оптимизацией скорости), а во-вторых, это может нивелировать ошибки, возможные при работе функции `NMaximize`. Получившаяся программа приведена в приложении.

2.2.2. Результаты численных экспериментов

В результате экспериментов, проводимых для размерностей 3 и 4, выяснилось, что существует множество наибольших матриц (а соответственно и параллелепипедов) с одинаковыми $\det A$. Поэтому было произведено исследование с целью получения наибольшей матрицы A с наиболее простой структурой. Оказалось, что можно найти наибольшую матрицу A следующего вида (примеры таких матриц см. в 2.3.)

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \multicolumn{9}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \cdots & a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 & a_1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 & a_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \multicolumn{9}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_k & a_k \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_k & a_k \end{pmatrix}. \tag{27}$$

Стоит отметить следующие моменты.

Во-первых, исходя из вида матрицы A, можно описать структуру параллелепипеда $V_{n,s}$: все его грани – прямоугольники (причем часть из них – квадраты), ребра либо параллельны осям координат, либо образуют с ними угол 45°.

Во-вторых, уже для $n = 7$ наибольшая матрица A_7^* может быть получена как комбинация наибольших матриц A_3^* и A_4^* (точные их значения см. ниже)

$$A_3^* = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & \alpha_1 \\ 0 & -\alpha_1 & \alpha_1 \end{pmatrix}.$$

$$A_4^* = \begin{pmatrix} \alpha_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}\alpha_2 & \sqrt{2}\alpha_2 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2}\alpha_2 & \sqrt{2}\alpha_2 \end{pmatrix}.$$

$$A_7^* = \left(\begin{array}{ccccccc} \alpha_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}\alpha_3 & \sqrt{2}\alpha_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2}\alpha_3 & \sqrt{2}\alpha_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_3 & \alpha_3 \\ \underbrace{0}_{A_3^*} & \underbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0}_{A_4^*} & & & & \underbrace{-\alpha_3 \quad \alpha_3}_{A_3^*} & \end{array} \right).$$

Вообще, для $n > 6$ матрицу A_n^* можно получить из A_{n-4}^* и A_4^*. Этот факт схож с результатом, полученным С. Крассом [77]

$$V_{n,s} V_{n',s'} \leq V_{n+n',s+s'}, \tag{28}$$

только вместо знака неравенства стоит равенство.

2.3. Вывод значений A_n

Больший интерес для нас представляют не численные значения этих матриц, а аналитические. Для их нахождения можно поступить следующим образом. Можно постараться определить точки, в которых наибольший параллелепипед $V_{n,[n/2]}$ касается звездного тела $\mathbb{F}_{n,[n/2]}$, выписать в этих точках граничные условия и на их основании получить параметры параллелепипеда. Далее мы реализуем этот подход, активно применяя язык `Wolfram Mathematica`.

2.3.1. Случай $n = 3$

Начнем с рассмотрения случая $n = 3$. В этом случае в результате численных экспериментов была найдена матрица

$$A_3^N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Мы рассмотрим матрицу вида (27)

$$A_3^* = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & b \\ 0 & -b & b \end{pmatrix}.$$

Построим обратную задачу. Выберем набор точек, в которых $f_{3,1}$ должна быть ≤ 1 – если выбрать в качестве него все точки $\mathbb{A}_3^*$ (набор δ_{max}), то матрица гарантированно будет удовлетворять задаче (25). При фиксированном наборе δ_0 точек будем максимизировать значение $\det A_3^*$. Если $\det A_3^*$ совпадет с $\det A_3$ наибольшей матрицы для $n = 3$, это будет означать, что можно перейти при проверке задачи (25) от набора δ_{max} к набору δ_0. Сужая набор δ_0 до минимума, мы получим граничные точки, в которых $f_{3,1} = 1$.

Было решено начать с набора точек M_1 со значениями координат $-1, 0, 1$ (на единичном кубе, единичный куб с помощью преобразования (24) приводится к $\mathbb{A}_3^*$). Программа, проверяющая этот набор точек, на языке `Wolfram Mathematica` имеет вид:

```
transform = {{a, 0, 0}, {0, b, b}, {0, -b, b}};
f31 = Function[{x1, x2, x3}, (x1^2 + x2^2)*x3/2];
m = {Det[transform]};
Do[AppendTo[m, Abs[Apply[f31, transform. point]] <= 1],
  {point, Tuples[{-1, 0, 1}, 3]}];
NMaximize[m, {a, b}]
```

ее результат

```
{2., {a -> 0.999978, b -> 1.00001}}.
```

Опытным путем было выявлено, что в если в качестве граничных точек взять набор только из одной точки $M_2 = (1, 1, 0)$, результат оптимизации не изменится. Это иллюстрирует следующая программа:

```
transform = {{a, 0, 0}, {0, b, b}, {0, -b, b}};
f31 = Function[{x1, x2, x3}, (x1^2 + x2^2)*x3/2];
m = {Det[transform], Abs[Apply[f31, transform.{1, 1, 0}]] <= 1};
NMaximize[m, {a, b}]
```

Точка $(1, 1, 0)$ с помощью преобразования (24) превращается в точку (a, b, b), что приводит нас к задаче:

$$\begin{gathered} 2ab^2 \to \max, \\ \frac{1}{2}\left(a^2 + b^2\right) b = 1. \end{gathered} \tag{29}$$

Решим эту задачу. Из ограничения

$$\frac{1}{2}\left(a^2 + b^2\right) b = 1,$$

$$a^2 + b^2 = \frac{2}{b},$$

$$a^2 = \frac{2-b^3}{b}.$$

Будем учитывать только положительные значения a, b (аналогично будем поступать в остальных случаях). Это не приведет к потере общности, так как мы ищем максимум.

$$a = \sqrt{\frac{2-b^3}{b}},$$

$$h_3(b) = 2b^2\sqrt{\frac{2-b^3}{b}} \to \max.$$

Так как $h_3(b)$ не отрицательна, можно перейти к

$$h_3^2(b) = 4b^3\left(2-b^3\right) = 8b^3 - 4b^6 \to \max$$

$$\frac{dh_3^2(b)}{db} = 24b^2 - 24b^5 = 0,$$

$$b^2\left(1-b^3\right) = 0,$$

$$b = 0 \qquad \text{или} \qquad b = 1,$$

$$h_3(0) = 0 \qquad \text{или} \qquad h_3(1) = 2,$$

то есть

$$a = b = 1,$$

$$A_3^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\det A_3^* = 2ab^2 = 2.$$

2.3.2. Случай $n = 4$

Стоит отметить, что переход от набора M_1 к набору M_2 может быть достаточно трудоемок. Постараемся упростить эту процедуру. Так как у нас уже есть примерные значения искомой матрицы, мы можем вычислить значение $f_{n,s}$ в граничных точках и взять только те, где абсолютное значение $f_{n,s}$ близко к 1. Применим этот подход для $n = 4$. В этом случае в результате численных экспериментов была найдена матрица

$$A_4^N \approx \begin{pmatrix} 0.81649 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.81649 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.15469 & 1.15469 \\ 0 & 0 & -1.15469 & 1.15469 \end{pmatrix}$$

Рассмотрим матрицу вида (27)

$$A_4^* = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & b \\ 0 & 0 & -b & b \end{pmatrix}.$$

Во-первых, убеждаемся, что в качестве ограничений можно взять множество точек с координатами $0, 1$:

```
transform = {{a, 0, 0, 0}, {0, a, 0, 0}, {0, 0, b, b}, {0, 0, -b, b}};
f42 = Function[{x1, x2, x3, x4}, (x1^2 + x3^2)*(x2^2 + x4^2)/4];
m = {Det[transform]};
Do[AppendTo[m, Abs[Apply[f42, transform.point]] <= 1],
  {point, Tuples[{0, 1}, 4]}];
NMaximize[m, {a, b}, Method -> "DifferentialEvolution"]
```

Далее, с помощью процедуры

```
transform = {{a, 0, 0, 0}, {0, a, 0, 0}, {0, 0, b, b}, {0, 0, -b,
    b}};
f42 = Function[{x1, x2, x3, x4}, (x1^2 + x3^2)*(x2^2 + x4^2)/4];
w = {};
Do[AppendTo[w, Simplify[Apply[f42, transform.point]]], {point,
  Tuples[{0, 1}, 4]}]; Do[v = x /. a -> 0.81649 /. b -> 1.15469;
 If[Abs[v] > 0.999, Print[x]], {x, Union[w]}]
```

находим минимальный набор ограничений:

$$\frac{1}{4}\left(a^2+b^2\right)^2, \qquad \frac{a^4}{4}+a^2b^2.$$

Этим ограничениям соответствуют точки $(1,1,1,0)$ и $(1,1,1,1)$. Получаем задачу

$$\begin{gathered} 2a^2b^2 \to \max, \\ \frac{1}{4}\left(a^2+b^2\right)^2 = 1, \\ \frac{1}{4}a^2\left(a^2+4b^2\right) = 1. \end{gathered} \tag{30}$$

Решаем полученную задачу. Из первого ограничения

$$\frac{1}{4}\left(a^2+b^2\right)^2 = 1,$$

$$a^2 + b^2 = 2,$$

$$b = \sqrt{2 - a^2}.$$

Из второго ограничения

$$\frac{1}{4}\,a^2\left(a^2 + 4\left(2 - a^2\right)\right) = 1,$$

$$a^2\left(a^2 + 8 - 4a^2\right) = 4,$$

$$3a^4 - 8a^2 + 4 = 0,$$

$$a^2 = \frac{8 \pm 4}{6},$$

$$a = \sqrt{\frac{2}{3}},\, b = \sqrt{\frac{4}{3}} \qquad \text{или} \qquad a = \sqrt{2},\, b = 0,$$

$$h_4\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{4}{3}}\right) = 0 \qquad \text{или} \qquad h_4\left(\sqrt{2}, 0\right) = 0,$$

то есть

$$a = \sqrt{\frac{2}{3}}, \qquad b = \sqrt{\frac{4}{3}},$$

$$A_4^* = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{4}{3}} & \sqrt{\frac{4}{3}} \\ 0 & 0 & -\sqrt{\frac{4}{3}} & \sqrt{\frac{4}{3}} \end{pmatrix},$$

$$\det A_4^* = 2a^2b^2 = 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} = \frac{16}{9} \approx 1.77777...$$

2.3.3. Случай $n = 5$

Для $n = 5$ численные эксперименты дают следующую матрицу

$$A_5^N \approx \begin{pmatrix} 0.67958 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.13157 & 1.13157 & 0 & 0 \\ 0 & -1.13157 & 1.13157 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.84550 & 0.84550 \\ 0 & 0 & 0 & -0.84550 & 0.84550 \end{pmatrix},$$

$$\det A_5^N \approx 2.48831.$$

Рассмотрим матрицу

$$A_5^* = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & b & 0 & 0 \\ 0 & -c & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & b \\ 0 & 0 & 0 & -b & b \end{pmatrix}.$$

В этом случае исходный набор точек не ограничивается простыми значениями $-1, 0, 1$ и угадать его не получится. В самом деле:

```
transform = {
  {a, 0, 0, 0, 0},
  {0, b, b, 0, 0},
  {0, -b, b, 0, 0},
  {0, 0, 0, c, c},
  {0, 0, 0, -c, c}
};
f52 = Function[{x1, x2, x3, x4, x5}, (x1^2 + x3^2)*(x2^2 + x4^2)*x5/4];
m = {Det[transform]};
Do[AppendTo[m, Abs[Apply[f52, transform. point]] <= 1],
  {point, Tuples[{-1, 0, 1}, 5]}];
NMaximize[Union[m], {a, b, c}, Method -> "DifferentialEvolution"]
```

дает значительно большее значение 2.71746. Снова воспользуемся тем, что нам известны примерные значения a, b, c. Решим задачу нахождения максимума $f_{n,s}$, сделав отсечение некоторых граничных точек:

```
a = 0.67958; b = 1.13157; c = 0.84550;
NMaximize[{
  (a^2*y1^2 + b^2*(-y2 + y3)^2) * (b^2*(y2 + y3)^2 + c^2*(y4 + y5)^2) *
    c * (-y4 + y5) / 4,
  -1 <= y1 <= 1,
  -1 <= y2 <= 1,
  -0.9 <= y3 <= 0.9,
  -1 <= y4 <= 1,
  -1 <= y5 <= 1
}, {y1, y2, y3, y4, y5}, Method -> {"DifferentialEvolution", RandomSeed -> 10}]
```

и получим новую точку, где $f_{n,s} = 1$. Это $(1, 1, 2\varphi - 1, -1, 1)$, где $\varphi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ – число, обратное золотому сечению. Отметим, что

$$\begin{aligned} \varphi^2 &= 1 - \varphi, \\ \varphi^3 &= 2\varphi - 1, \\ \varphi^4 &= 2 - 3\varphi, \\ \varphi^5 &= 5\varphi - 3. \end{aligned} \tag{31}$$

Аналогичным образом получаем еще одну точку $\left(1, 1, -1, \frac{1}{3}, 1\right)$. Беря третью точку $(1, 1, 1, -1, 1)$, получим задачу

$$\begin{gathered} 4ab^2c^2 \to \max, \\ 2a^2b^2c = 1, \\ \frac{8}{27}(a^2 + 4b^2)c^3 = 1, \\ \left(3 - \sqrt{5}\right) b^2 \left(a^2 + \left(3 - \sqrt{5}\right)^2 b^2\right) c = 1. \end{gathered} \tag{32}$$

Решим эту задачу. Из первого ограничения

$$c = \frac{1}{2a^2b^2}.$$

Подставляя в третье ограничение

$$\begin{gathered} 2\varphi^2\, b^2 \left(a^2 + 4\varphi^4 b^2\right) \cdot \frac{1}{2a^2b^2} = 1, \\ \varphi^2 \left(a^2 + 4\varphi^4 b^2\right) = a^2, \\ 4\varphi^6 b^2 = \left(1 - \varphi^2\right) a^2, \\ 4\varphi^6 b^2 = \varphi a^2, \quad \text{в силу (31)} \\ b^2 = \frac{a^2}{4\varphi^5}. \end{gathered}$$

Решим теперь второе ограничение

$$\begin{gathered} \frac{8}{27}\left(a^2 + 4 \cdot \frac{a^2}{4\varphi^5}\right) \cdot \frac{64\varphi^{15}}{8a^6 \cdot a^6} = 1, \\ 64\left(1 + \varphi^5\right) a^2 \delta^{15} = 27 \cdot \delta^5 a^{12}, \\ a^{10} = \delta^{10} \cdot \frac{64\,(1 + \varphi^5)}{27}. \end{gathered}$$

В итоге

$$a = \sqrt[10]{\frac{64\varphi^{10}\,(1 + \varphi^5)}{27}} = \sqrt{7 - 3\sqrt{5}} \cdot \sqrt[10]{\frac{134 + 30\sqrt{5}}{27}},$$

$$b = \sqrt[10]{\frac{(1+\varphi^5)}{432\varphi^{15}}} = a \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{8(4\sqrt{5}-9)}},$$

$$c = \frac{1}{2a^2b^2} = \sqrt[5]{\frac{729\varphi^5}{128\,(1+\varphi^5)^2}},$$

$$\det A_5^* = 4ab^2c^2 = 4\sqrt[10]{\frac{2^6\varphi^{10}\,(1+\varphi^5)\cdot(1+\varphi^5)^2\cdot 3^{24}\varphi^{20}}{3^3\cdot 3^6 2^8\varphi^{30}\cdot 2^{28}\,(1+\varphi^5)^8}} =$$

$$= 4\sqrt[10]{\frac{3^{15}}{2^{30}\,(1+\varphi^5)^5}} = \sqrt{\frac{27}{4\,(1+\varphi^5)}} \approx 2.48831...$$

2.3.4. Случай $n = 6$

Для $n = 6$ в результате численных экмпериментов была выбрана матрица

$$A_6^N \approx \begin{pmatrix} 0.62510 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.62510 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.04085 & 1.04085 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1.04085 & 1.04085 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.04085 & 1.04085 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1.04085 & 1.04085 \end{pmatrix}$$

Заменим ее на

$$A_6^* = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -b & b \end{pmatrix}.$$

В этом случае, поступая аналогично случаю $n = 5$, получаем две граничные точки: $(1, 1, 1, 1, 1, 1)$ и $\left(1, 1, \sqrt{5}-2, 1, 1, 1\right)$. Соответствующая задача имеет вид:

$$\begin{gathered} 4a^2b^4 \to \max, \\ \frac{1}{2}a^2b^2\,(a^2+4b^2) = 1, \\ \frac{1}{4}\left(3-\sqrt{5}\right)b^2\,(a^2+4b^2)\left(a^2+\left(3-\sqrt{5}\right)^2 b^2\right) = 1. \end{gathered} \tag{33}$$

Решим полученную задачу. Из первого ограничения

$$\frac{1}{2}\,a^2b^2\left(a^2+4b^2\right)=1,$$

$$4a^2b^4+a^4b^2-2=0,$$

$$b^2=\frac{-a^4\pm\sqrt{a^8+32a^2}}{8a^2},$$

$$b=\sqrt{\frac{\sqrt{32+a^6}-a^3}{8a}},$$

так как мы рассматриваем только положительные корни.

Подставляем во второе ограничение

$$\frac{\sqrt{32+a^6}-a^3}{8a}\cdot\varphi^2\cdot\left(a^2+4\cdot\frac{\sqrt{32+a^6}-a^3}{8a}\right)\left(a^2+4\varphi^4\cdot\frac{\sqrt{32+a^6}-a^3}{8a}\right)=2,$$

$$\left(\sqrt{32+a^6}-a^3\right)\varphi^2\left(4a^3+4\sqrt{32+a^6}\right)\left(8a^3+4\varphi^4\left(\sqrt{32+a^6}-a^3\right)\right)=1024a^3,$$

$$\varphi^2\left(32+a^6-a^6\right)\left(2a^3+\varphi^4\sqrt{32+a^6}-\varphi^4a^3\right)=64a^3,$$

$$\varphi^2\left(\varphi^4\sqrt{32+a^6}+3\varphi a^3\right)=2a^3,\quad\text{в силу (31)}$$

$$\varphi^6\sqrt{32+a^6}=2a^3-3\varphi^3a^3,$$

$$\varphi^6\sqrt{32+a^6}=\left(2-3\varphi^3\right)a^3,$$

$$\varphi^{12}\left(32+a^6\right)=\left(4-12\varphi^3+9\varphi^6\right)a^6,$$

$$32\varphi^{12}=\left(-\varphi^{12}+9\varphi^6-12\varphi^3+4\right)a^6,$$

$$a^6=\frac{32\varphi^{12}}{-\varphi^{12}+9\varphi^6-12\varphi^3+4}=\frac{32\varphi^{12}}{-\varphi^{12}+9\varphi^6-12\varphi^3+4\varphi^2+4\varphi\left(\varphi^2+\varphi\right)}=$$

$$=\frac{32\varphi^{10}}{8-8\varphi+9\left(2-3\varphi\right)-\left(34-55\varphi\right)}=\frac{32\varphi^{10}}{20\varphi-8}=\frac{8\varphi^{10}}{5\varphi-3+1}=\frac{8\varphi^{10}}{1+\varphi^5},\quad\text{в силу (31)}$$

$$a=\sqrt[6]{\frac{8\varphi^{10}}{1+\varphi^5}}.$$

Откуда

$$\frac{b^2}{a^2}=\frac{\sqrt{32+a^6}-a^3}{8a^3}=\frac{\sqrt{32+\frac{8\varphi^{10}}{1+\varphi^5}}-\sqrt{\frac{8\varphi^{10}}{1+\varphi^5}}}{8\sqrt{\frac{8\varphi^{10}}{1+\varphi^5}}}=$$

$$= \frac{\sqrt{32+32\varphi^5+8\varphi^{10}}-\sqrt{8\varphi^{10}}}{8\sqrt{8\varphi^{10}}} = \frac{\varphi^5+2-\varphi^5}{8\varphi^5} = \frac{1}{4\varphi^5},$$

и

$$b^6 = a^6 \cdot \frac{1}{64\varphi^{15}} = \frac{8\varphi^{10}}{64\varphi^{15}\left(1+\varphi^5\right)} = \frac{1}{8\varphi^5\left(1+\varphi^5\right)}.$$

В итоге

$$a = \sqrt[6]{\frac{8\varphi^{10}}{1+\varphi^5}} = \sqrt[6]{\frac{8\left(30\sqrt{5}-67\right)}{11}}, \qquad b = \sqrt[6]{\frac{1}{8\varphi^5\left(1+\varphi^5\right)}} = \sqrt[6]{\frac{56+25\sqrt{5}}{88}}.$$

$$\det A_6^* = 4a^2b^4 = 4\sqrt[6]{\frac{2^6\varphi^{20}}{\left(1+\varphi^5\right)^2\cdot 2^{12}\varphi^{20}\left(1+\varphi^5\right)^4}} = \frac{2}{1+\varphi^5} \approx 1.83458...$$

3. Оценки некоторых функций

Введем следующие функции:

$$F_0 = \left(\frac{1}{2} + x^2\right)\left(\frac{1}{2} + y^2\right),$$

$$F_1 = (1 + x^2)|y|,$$

$$F_2 = (t_1 + y^2)(t_2 x^2 + z^2)|w|, \quad \text{где } t_1 = 10\sqrt{5} - 22, \text{ и } t_2 = \frac{26 + 10\sqrt{5}}{27}$$

$$F_3 = (t + x^2)(t + z^2)(y^2 + w^2), \quad \text{где } t = 10\sqrt{5} - 22.$$

Для доказательств полученных выше значений A_N^* нам потребуются некоторые оценки значений этих функций. Получение этих оценок носит в первую очередь техническую сложность, так как сопряжено со значительным объемом вычислений. Поэтому при промежуточных вычислениях мы будем использовать математический пакет `Wolfram Mathematica`.

В процессе доказательства оценок мы будем использовать следующее утверждение.

Теорема 17 (И. Ньютон, Дж. Сильвестр). *Пусть $f(x)$ - многочлен степени n без кратных корней.*

Рассмотрим последовательность $f_0(x), f_1(x), \dots, f_n(x)$, где

$$f_i(x) = \frac{(n-i)!}{n!} f^{(i)}(x),$$

и рассмотрим еще одну последовательность $F_0(x), F_1(x), \dots, F_n(x)$, где $F_0(x) = f(x)$, $F_n(x) = f_n^2(x)$ и

$$F_i(x) = f_i^2(x) - f_{i-1}(x) f_{i+1}(x), \qquad i = \overline{1, n-1}.$$

Будем учитывать только те пары $f_i(x), f_{i+1}(x)$, для которых $\operatorname{sign} F_i(x) = \operatorname{sign} F_{i+1}(x)$. *Пусть $N_+(x)$ – количество пар, для которых* $\operatorname{sign} f_i(x) = \operatorname{sign} f_{i+1}(x)$, *$N_-(x)$ – количество тех пар, для которых* $\operatorname{sign} f_i(x) = -\operatorname{sign} f_{i+1}(x)$.

Тогда число корней, заключенных между a и b, где $a < b$ и $f(a)f(b) \neq 0$, не превосходит как $N_+(b) - N_+(a)$, так и $N_-(b) - N_-(a)$.

Доказательство. См. [36].

3.1. Оценка для F_1

Теорема 18.

$$\max F_1(x, y) = (1 + x^2)|y| = 2,$$

при условии

$$-2 \le x + y \le 2, \quad -2 \le x - y \le 2.$$

Доказательство.

1. Заметим, что $F_1(x, y) = F_1(x, -y) = F_1(-x, y) = F_1(-x, -y)$. Поэтому достаточно рассматривать только значения $x \geq 0, y \geq 0$. Таким образом, наша задача примет вид:

$$F_1^* = (1 + x^2)y \to \max,$$

$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x + y \leq 2.$$

2. Найдем безусловные экстремумы:

$$\frac{\partial F_1^*}{\partial x} = 2xy = 0,$$

$$\frac{\partial F_1^*}{\partial y} = 1 + x^2 = 0.$$

Следовательно, безусловных экстремумов нет.

3. Проверяем значения на границах

$$F_1^*(0, 2) = 2, \quad F_1^*(2, 0) = 0.$$

4. Пусть $x + y = 2$. Тогда $y = 2 - x$. Следовательно,

$$F_1^* = (1 + x^2)(2 - x) = -x^3 + 2x^2 - x + 2,$$

$$\frac{\partial F_1^*}{\partial x} = -3x^2 + 4x - 1 = 0,$$

$$x = 1 \quad \text{или} \quad x = \frac{1}{3}.$$

$$F_1^*(1) = 2 \quad \text{или} \quad F_1^*\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{50}{27} < 2,$$

то есть $\max F_1^* = 2$. $\square$

3.2. Оценка для F_0

Теорема 19.

$$\max F_0(x, y) = \left(\frac{1}{2} + x^2\right)\left(\frac{1}{2} + y^2\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2,$$

при условии

$$-2 \leq x + y \leq 2, \quad -2 \leq x - y \leq 2.$$

Доказательство.

1. Пусть $k = \frac{1}{2}$. Тогда

$$F_0 = \left(\frac{1}{2} + x^2\right)\left(\frac{1}{2} + y^2\right) = \left(k + x^2\right)\left(k + y^2\right).$$

2. Аналогично теореме (18) замечаем, что $F_0(x, y) = F_0(x, -y) = F_0(-x, y) = F_0(-x, -y)$. Приходим к задаче

$$F_0 \to \max,$$

$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x + y \leq 2.$$

3. Найдем безусловные экстремумы:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_0}{\partial x} = 2x(k + y^2) = 0, \\ \dfrac{\partial F_0}{\partial y} = 2y(k + x^2) = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = 0.$$

Следовательно, получаем глобальный минимум $F_0(0, 0) = k^2$.

4. Проверяем значения на границах:

$$F_0(0, 2) = F_0(2, 0) = k(k + 4).$$

5. Пусть $x + y = 2$. Тогда $y = 2 - x$. Следовательно,

$$F_0 = (k + x^2)(k + (2 - x)^2)$$

$$\frac{\partial F_0}{\partial x} = (2x(k + (2 - x)^2) - 2(2 - x)(k + x^2)) = 0$$

$$xk + x(2 - x)^2 - (2 - x)k - (2 - x)x^2 = 0$$

$$xk + 4x - 4x^2 + x^3 - 2k + xk - 2x^2 + x^3 = 0$$

$$2x^3 - 6x^2 + (4 + 2k)x - 2k = 0$$

$$2(x - 1)(x^2 - 2x + k) = 0$$

$$x = 1, y = 1 \qquad \text{или} \qquad x = 1 \pm \sqrt{1 - k}, y = 1 \mp \sqrt{1 - k}.$$

Вычислим значения в этих точках:

$$F_0(1) = (k + 1)^2.$$

$$F_0(1 \pm \sqrt{1-k}) = (k + (1+\sqrt{1-k})^2)(k + (1+\sqrt{1-k})^2) =$$

$$= (k+1+1-k-2\sqrt{1-k})(k+1+1-k-2\sqrt{1+k}) =$$

$$= 4(1-\sqrt{1-k})(1+\sqrt{1-k}) = 4(1-(1-k)) = 4k.$$

6. Объединяя полученные результаты, получаем

$$\max F_0 = \max\{(k+1)^2, k(k+4), 4k\} =$$

$$= \max\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^2, \frac{1}{2}\left(4+\frac{1}{2}\right), 4\cdot\frac{1}{2}\right\} = \left(\frac{3}{2}\right)^2. \quad \square$$

3.3. Оценка для F_3

Теорема 20.

$$\max F_3(x,y,z,w) = (t+x^2)(t+z^2)(y^2+w^2) = 64(56-25\sqrt{5}),$$

где $t = 10\sqrt{5} - 22$, *при условии*

$$-2 \le x+y \le 2, \quad -2 \le x-y \le 2.$$

$$-2 \le z+w \le 2, \quad -2 \le z-w \le 2.$$

Доказательство.

Аналогично доказательству теоремы (18) замечаем, что

$$F_3(x,y,z,w) = F_3(x,-y,z,w) = F_3(-x,y,z,w) = F_3(-x,-y,z,w),$$

$$F_3(x,y,z,w) = F_3(x,y,z,-w) = F_3(x,y,-z,w) = F_3(x,y,-z,-w).$$

Приходим к задаче

$$F_3(x,y,z,w) \to \max,$$

$$x+y \le 2, \quad z+w \le 2$$

$$x \ge 0, \quad y \ge 0, \quad z \ge 0, \quad w \ge 0.$$

Последние условия не граничные и необходимы только для отсечения точек.

Найдем предварительно безусловные экстремумы:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_3}{\partial x} = 2x(t+z^2)(y^2+w^2) = 0, \\ \dfrac{\partial F_3}{\partial y} = 2y(t+x^2)(t+z^2) = 0, \\ \dfrac{\partial F_3}{\partial z} = 2z(t+z^2)(y^2+w^2) = 0, \\ \dfrac{\partial F_3}{\partial w} = 2w(t+x^2)(t+z^2) = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = z = w = 0.$$

Получаем глобальный минимум $F_3(0,0,0,0) = 0$.

3.3.1. Граница $x = 0, y = 2$

Проверяем значения на границе $x = 0, y = 2$. Тогда

$$F_3^* = t(t+z^2)(w^2+4) \to \max$$

при условии

$$z \geq 0, \quad w \geq 0, \quad z + w \leq 2.$$

1. Безусловный экстремум

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_3^*}{\partial z} = 2zt(4+w^2) = 0, \\ \dfrac{\partial F_3^*}{\partial w} = 2wt(t+z^2) = 0 \end{cases} \Rightarrow z = w = 0.$$

   Это глобальный минимум $F_3^*(0,0) = 4t^2$.

2. Проверяем значения на границах:

$$F_3^*(0,2) = 8t^2, \quad F_3^*(2,0) = 4t(t+4).$$

3. Пусть $z + w = 2$. Тогда $w = 2 - z$. Следовательно,

$$F_3^* = t(t+z^2)((2-z)^2+4) = t(t+z^2)(z^2-4z+8)$$

$$\frac{\partial F_3^*}{\partial z} = t(2z(z^2-4z+8) + (2z-4)(t+z^2)) = 0$$
$$2z^3 - 8z^2 + 16z + 2tz + 2z^3 - 4t - 4z^2 = 0$$

$$2z^3 - 6z^2 + (8+t)z - 2t = 0$$

Это уравнение имеет корень в интервале $(0, 2)$. Однако вторая производная

$$\frac{\partial^2 F_3^*}{\partial x^2} = t(6z^2 - 16z + 16 + 2t + 6z^2 - 8z) = 2t(6z^2 - 12z + 8 + t) = 2t(6(z-1)^2 + 2 + t)$$

строго положительна, поэтому это точка локального минимума.

В итоге

$$\max F_3(0, 2, z, w) = \max \begin{cases} 8t^2, \\ 4t(t+4) \end{cases} = \max \begin{cases} 8(10\sqrt{5} - 22)^2, \\ 4(10\sqrt{5} - 22)(10\sqrt{5} - 18) \end{cases} =$$

$$= 4\left(10\sqrt{5} - 22\right)\left(10\sqrt{5} - 18\right) = 64\left(56 - 25\sqrt{5}\right), \tag{34}$$

так как

$$2\left(10\sqrt{5} - 22\right) \leq \left(10\sqrt{5} - 18\right).$$

3.3.2. Граница $x = 2, y = 0$

Проверяем значения на границе $x = 2, y = 0$. Имеем

$$F_3^* = (t+4)(t+z^2)w^2 \to \max$$

при условии

$$z \geq 0, \quad w \geq 0, \quad z + w \leq 2.$$

1. Безусловный экстремум

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_3^*}{\partial z} = 2(t+4)zw^2 = 0, \\ \dfrac{\partial F_3^*}{\partial w} = 2(t+4)w(t+z^2) = 0 \end{cases} \Rightarrow w = 0.$$

Это глобальный минимум $F_3^*(z, 0) = 0$.

2. Проверяем значения на границах:

$$F_3^*(0, 2) = 4t(t+4), \quad F_3^*(2, 0) = 0.$$

3. Пусть $z + w = 2$. Тогда $z = 2 - w$. Следовательно,

$$F_3^* = (t+4)(t+(2-w)^2)w^2$$

$$\frac{\partial F_3^*}{\partial w} = (t+4)(2w(t+(2-w)^2) - 2(2-w)w^2) = (t+4)2w(t+(2-w)^2 - (2-w)w) = 0$$

$$w(t+(2-w)^2 - (2-w)w) = 0$$

Если $w = 0$, то $F_3^*(z, 0) = 0$. Иначе

$$t + (2-w)^2 - (2-w)w = 0$$

$$t + 4 - 4w + w^2 - 2w + w^2 = 0$$

$$2w^2 - 6w + (t+4) = 0$$

$$w = \frac{3 \pm \sqrt{1-2t}}{2}.$$

Тогда

$$F_3^*\left(\frac{3+\sqrt{1-2t}}{2}\right) = (t+4)\left(t + \left(\frac{1-\sqrt{1-2t}}{2}\right)^2\right)\left(\frac{3+\sqrt{1-2t}}{2}\right)^2 = \tag{35}$$

$$= \frac{(t+4)}{16} \cdot \left(4t + 1 + 1 - 2t - 2\sqrt{1-2t}\right)\left(3+\sqrt{1-2t}\right)^2 =$$

$$= \frac{(t+4)}{8} \cdot \left(t + 1 - \sqrt{1-2t}\right)\left(3+\sqrt{1-2t}\right)^2$$

и

$$F_3^*\left(\frac{3-\sqrt{1-2t}}{2}\right) = (t+4)\left(t + \left(\frac{1+\sqrt{1-2t}}{2}\right)^2\right)\left(\frac{3-\sqrt{1-2t}}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{(t+4)}{16} \cdot \left(4t + 1 + 1 - 2t + 2\sqrt{1-2t}\right)\left(3-\sqrt{1-2t}\right)^2 =$$

$$= \frac{(t+4)}{8} \cdot \left(t + 1 + \sqrt{1-2t}\right)\left(3-\sqrt{1-2t}\right)^2.$$

В итоге

$$\max F_3(2,0,z,w) = (t+4)\max\begin{cases} 4t, \\ \frac{1}{8}\left(t+1+\sqrt{1-2t}\right)\left(3-\sqrt{1-2t}\right)^2, \\ \frac{1}{8}\left(t+1-\sqrt{1-2t}\right)\left(3+\sqrt{1-2t}\right)^2 \end{cases} =$$

$$= \left(10\sqrt{5}-18\right)\max\begin{cases} 4\left(10\sqrt{5}-22\right), \\ \frac{1}{8}\left(10\sqrt{5}-21+\sqrt{45-20\sqrt{5}}\right)\left(3-\sqrt{45-20\sqrt{5}}\right)^2, \\ \frac{1}{8}\left(10\sqrt{5}-21-\sqrt{45-20\sqrt{5}}\right)\left(3+\sqrt{45-20\sqrt{5}}\right)^2 \end{cases} =$$

$$= \left(5\sqrt{5}-9\right)\max\begin{cases} 16\left(5\sqrt{5}-11\right), \\ \frac{1}{4}\left(10\sqrt{5}-21+5-2\sqrt{5}\right)\left(3-5+2\sqrt{5}\right)^2, \\ \frac{1}{4}\left(10\sqrt{5}-21-5+2\sqrt{5}\right)\left(3+5-2\sqrt{5}\right)^2 \end{cases} =$$

$$= \left(5\sqrt{5}-9\right)\max\begin{cases} 16\left(5\sqrt{5}-11\right), \\ 16\left(5\sqrt{5}-11\right), \\ 460\sqrt{5}-513 \end{cases} = 16\left(5\sqrt{5}-11\right)\left(5\sqrt{5}-9\right) = 64\left(56-25\sqrt{5}\right),$$

так как

$$460\sqrt{5}-513 < 16\left(5\sqrt{5}-11\right).$$

Полученный результат совпадает с (34). Отметим, что без явного раскрытия двойного радикала `Wolfram Mathematica` не может полностью упростить выражение.

3.3.3. Граница $x+y=2$

Пусть $x+y=2$. Тогда $x=2-y$. Следовательно,

$$F_3^* = (t+(2-y)^2)(t+z^2)(y^2+w^2) \to \max$$

при условии

$$0 \le y \le 2, \quad z \ge 0, \quad w \ge 0, \quad z+w \le 2.$$

1. Безусловный экстремум

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_3^*}{\partial y} = (t+z^2)\left[2y(t+(2-y)^2) - 2(2-y)(y^2+w^2)\right] = 0, \\ \dfrac{\partial F_3^*}{\partial z} = 2z(t+(2-y)^2)(y^2+w^2) = 0, \\ \dfrac{\partial F_3^*}{\partial w} = 2w(t+(2-y)^2)(t+z^2) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} w = 0, \\ 2y(t+(2-y)^2) - 2(2-y)y^2 = 0, \\ 2z(t+(2-y)^2)y^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} w = 0, \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 0, \\ z \in \mathbb{R}, \end{cases} \\ \begin{cases} 2(t + (2-y)^2) - 2(2-y)y = 0, \\ z = 0. \end{cases} \end{array} \right. \end{cases}$$

Если $y = 0$, то $F_3^*(0, z, 0) = (t+4)(t+z^2) \cdot 0 = 0$. В противном случае

$$2(t + (2-y)^2) - 2(2-y)y = 0,$$

$$2t + 8 - 8y + 2y^2 - 4y + 2y^2 = 0,$$

$$2y^2 - 6y + (t+4) = 0,$$

$$y = \frac{3 \pm \sqrt{1-2t}}{2}.$$

Тогда (см. 35)

$$F_3^*\left(\frac{3+\sqrt{1-2t}}{2}\right) = t\left(t + \left(\frac{1-\sqrt{1-2t}}{2}\right)^2\right)\left(\frac{3+\sqrt{1-2t}}{2}\right)^2 \le F_3(2, 0, z, w), \qquad (36)$$

и

$$F_3^*\left(\frac{3-\sqrt{1-2t}}{2}\right) = t\left(t + \left(\frac{1+\sqrt{1-2t}}{2}\right)^2\right)\left(\frac{3-\sqrt{1-2t}}{2}\right)^2 \le F_3(2, 0, z, w),$$

то есть новых возможных значений абсолютного максимума нет.

2. Проверяем значения на границе $z = 0, w = 2$. Тогда

$$F_3^* = (t + (2-y)^2)t(y^2+4) = t(y^2+4)(y^2 - 4y + t + 4) \to \max$$

при условии

$$0 \le y \le 2.$$

Имеем

$$\frac{\partial F_3^*}{\partial y} = t\left[2y(y^2 - 4y + t + 4) - 2(2-y)(y^2+4)\right] = 0,$$

$$y(t + (2-y)^2) - (2-y)(y^2+4) = 0,$$

$$ty + 4y - 4y^2 + y^3 - 2y^2 - 8 + y^3 + 4y = 0,$$

$$2y^3 - 6y^2 + (8+t)y - 8 = 0$$

Это уравнение имеет корень в интервале $(0, 2)$. Однако вторая производная

$$\frac{\partial^2 F_3^*}{\partial y^2} = t(6y^2 - 16y + 2t + 8 - 8y + 6y^2 + 8) = 2t(6y^2 - 12y + 8 + t) = 2t(6(y-1)^2 + 2 + t)$$

строго положительна. Поэтому это точка локального минимума.

3. Проверяем значения на границе $z = 2, w = 0$. Тогда

$$F_3^* = (t + (2-y)^2)(t+4)y^2 = (t+4)(y^4 - 4y^3 + (t+4)y^2) \to \max$$

при условии

$$0 \le y \le 2.$$

Имеем

$$\frac{\partial F_3^*}{\partial y} = (t+4)(4y^3 - 12y^2 + 2(t+4)y) = 0,$$

$$4y^3 - 12y^2 + 2(t+4)y,$$

$$2y^2 - 6y + (t+4) = 0,$$

что приводит нас к результату 36.

4. Пусть $z + w = 2$. Тогда $z = 2 - w$. Следовательно,

$$F_3^* = (t + (2-y)^2)(t + (2-w)^2)(y^2 + w^2) \to \max$$

при условии

$$0 \le y \le 2, 0 \le w \le 2.$$

Приравняем к нулю частные производные

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_3^*}{\partial y} = (t + (2-w)^2)\left[-2(2-y)(y^2+w^2) + 2y\left(t + (2-y)^2\right)\right] = 0, \\ \dfrac{\partial F_3^*}{\partial w} = (t + (2-y)^2)\left[-2(2-w)(y^2+w^2) + 2w\left(t + (2-w)^2\right)\right] = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} (2-y)(y^2+w^2) - y\left(t + (2-y)^2\right) = 0, \\ (2-w)(y^2+w^2) - w\left(t + (2-w)^2\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

Выражаем из второго уравнения

$$y^2 + w^2 = \frac{y\left(t + (2-y)^2\right)}{2-y} = \frac{w\left(t + (2-w)^2\right)}{2-w},$$

откуда

$$w^2 = \Delta = y\left(2 - 2y + \frac{t}{2-y}\right) = y\left(\frac{2(1-y)(2-y)+t}{2-y}\right).$$

Тогда

$$(2-w)\cdot\frac{y\left(t+(2-y)^2\right)}{2-y} - w\left(t+(2-w)^2\right) = 0,$$

$$w\cdot\left[-\frac{y\left(t^2+(2-y)^2\right)}{2-y} - (t+4) - y\left(2-2y+\frac{t}{2-y}\right)\right] =$$

$$= -\frac{2y\left(t+(2-y)^2\right)}{2-y} - 4y\left(2-2y+\frac{t}{2-y}\right),$$

откуда

$$w = \frac{2y\left(t+(2-y)^2\right)+4y\left(2(1-y)(2-y)+t\right)}{y\left(t+(2-y)^2\right)+(2-y)(t+4)+y\left(2(1-y)(2-y)+t\right)} =$$

$$= 2y\cdot\frac{t+(2-y)^2+4(1-y)(2-y)+2t}{(2-y)\left(y(2-y)+t+4+2y(1-y)\right)+2yt} =$$

$$= 2y\cdot\frac{5y^2-16y+12+3t}{3y^3-10y^2+4y+8+(y+2)t}.$$

Пусть $T = t+4$, тогда

$$\sqrt{\Delta} = 2y\cdot\frac{y(5y-16)+3T}{y^2(3y-10)+(y+2)T},$$

то есть

$$\frac{y\left(2y^2-6y+T\right)}{2-y} = \frac{4y^2\left(y(5y-16)+3T\right)^2}{\left(y^2(3y-10)+(y+2)T\right)^2},$$

$$\left(2y^2-6y+T\right)\left(y^2(3y-10)+(y+2)T\right)^2 = 4y(2-y)\left(y(5y-16)+3T\right)^2,$$

что можно привести к виду

$$(3y^2-8y+T)(6y^6-42y^5+(5T+108)y^4-(10T+192)y^3+(T^2+256)y^2+(4T^2-64T)y+4T^2) = 0.$$

То есть, или

$$6y^6-42y^5+(5T+108)y^4-(10T+192)y^3+(T^2+256)y^2+(4T^2-64T)y+4T^2 = 0,$$

или

$$3y^2-8y+T=0 \quad\Rightarrow\quad y = \frac{8\pm\sqrt{64-12T}}{6} = \frac{4\pm\sqrt{16-3T}}{3} = \frac{4\pm\sqrt{4-3t}}{3}.$$

Рассмотрим оба случая отдельно.

3.3.4. Случай 1

Пусть

$$6y^6 - 42y^5 + (5T + 108)y^4 - (10T + 192)y^3 + (T^2 + 256)y^2 + (4T^2 - 64T)y + 4T^2 = 0 \qquad (37)$$

Докажем, что это уравнение не имеет решений на интервале $(0, 2)$ (На рисунке 2 изображен график функции в левой части уравнения на интересующем нас интервале).

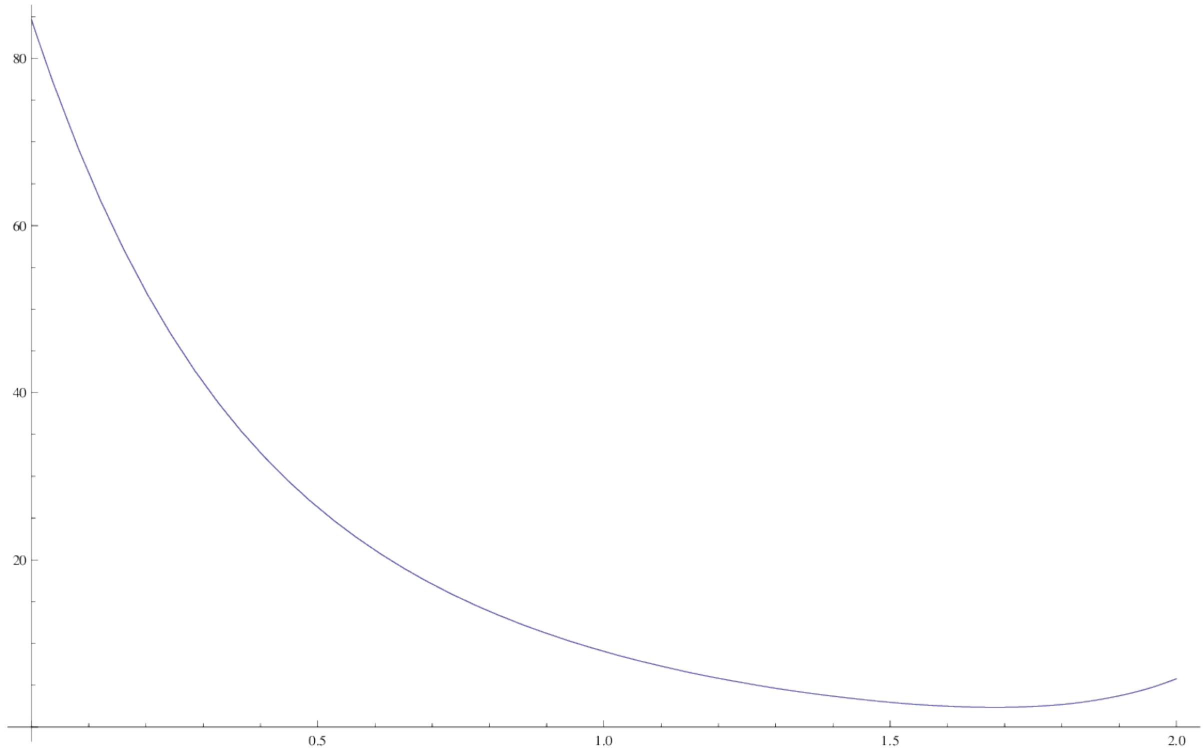

Рис. 2. График функции в левой части уравнения (37)

Для доказательства этого утверждения воспользуемся теоремой 17. Все промежуточные вычисления будем производить с помощью математического пакета `Wolfram Mathematica`.

Учтем, что $T = t + 4 = 10\sqrt{5} - 18$.

Выпишем коэффициенты многочлена:

$$a_0 = 6,$$

$$a_1 = -42,$$

$$a_2 = 5T + 108 = 50\sqrt{5} + 18 = 2\left(25\sqrt{5} + 9\right),$$

$$a_3 = -(10T + 192) = -\left(100\sqrt{5} + 12\right) = -4\left(25\sqrt{5} + 3\right),$$

$$a_4 = T^2 + 256 = \left(10\sqrt{5} - 18\right)^2 + 256 = 360\left(3 - \sqrt{5}\right),$$

$$a_5 = 4T^2 - 64T = 4\left(10\sqrt{5} - 18\right)^2 - 64\left(10\sqrt{5} - 18\right) = 32\left(139 - 65\sqrt{5}\right),$$

$$a_6 = 4T^2 = 4\left(10\sqrt{5} - 18\right)^2 = 32\left(103 - 45\sqrt{5}\right),$$

то есть, можно перейти к исследованию нулей функции

$$f(x) = 6x^6 - 42x^5 + 2\left(25\sqrt{5} + 9\right)x^4 - 4\left(25\sqrt{5} + 3\right)x^3 +$$

$$+360\left(3 - \sqrt{5}\right)x^2 + 32\left(139 - 65\sqrt{5}\right)x + 32(103 - 45\sqrt{5}).$$

Вычисляем вспомогательные функции $f_i(x)$. Имеем:

$$f_0(x) = f(x),$$

$$f_1(x) = 6x^5 - 35x^4 + \frac{4}{3}\left(25\sqrt{5} + 9\right)x^3 - 2\left(25\sqrt{5} + 3\right)x^2 + 120\left(3 - \sqrt{5}\right)x + \frac{16}{3}\left(139 - 65\sqrt{5}\right),$$

$$f_2(x) = 6x^4 - 28x^3 + \frac{4}{5}\left(25\sqrt{5} + 9\right)x^2 - \frac{4}{5}\left(25\sqrt{5} + 3\right)x + 24\left(3 - \sqrt{5}\right),$$

$$f_3(x) = 6x^3 - 21x^2 + \frac{2}{5}\left(25\sqrt{5} + 9\right)x - \frac{1}{5}\left(25\sqrt{5} + 3\right),$$

$$f_4(x) = 6x^2 - 14x + \frac{2}{15}\left(25\sqrt{5} + 9\right),$$

$$f_5(x) = 6x - 7,$$

$$f_6(x) = 6.$$

Вычисляем следующую серию вспомогательных функций:

$$F_0(x) = f(x),$$

$$F_1(x) = f_1^2(x) - f_0(x)f_2(x) =$$

$$= \frac{209 - 100\sqrt{5}}{5}x^8 + \frac{16\left(25\sqrt{5} - 18\right)}{15}x^7 + \frac{4\left(9045\sqrt{5} - 22937\right)}{45}x^6 + \frac{32\left(2565\sqrt{5} - 5348\right)}{15}x^5 +$$

$$+\frac{8\left(106781 - 49255\sqrt{5}\right)}{15}x^4 + \frac{128\left(63856 - 28165\sqrt{5}\right)}{45}x^3 + \frac{256\left(1969 - 892\sqrt{5}\right)}{3}x^2 +$$

$$+\frac{512\left(2381 - 1060\sqrt{5}\right)}{5}x + \frac{1024\left(6507 - 2911\sqrt{5}\right)}{9},$$

$$F_2(x) = f_2^2(x) - f_1(x)f_3(x) =$$
$$= \frac{209-100\sqrt{5}}{5}x^6 + \frac{4\left(25\sqrt{5}-18\right)}{5}x^5 + \frac{28125\sqrt{5}-72497}{75}x^4 + \frac{8\left(7875\sqrt{5}-14929\right)}{75}x^3 +$$
$$+\frac{4\left(107881-49235\sqrt{5}\right)}{25}x^2 + \frac{32\left(7657-3376\sqrt{5}\right)}{15}x + \frac{64\left(10\sqrt{5}-37\right)}{15},$$

$$F_3(x) = f_3^2(x) - f_2(x)f_4(x) =$$
$$= \frac{209-100\sqrt{5}}{5}x^4 + \frac{8\left(25\sqrt{5}-18\right)}{15}x^3 + \frac{2\left(3675\sqrt{5}-10103\right)}{75}x^2 +$$
$$+\frac{16\left(3937-1650\sqrt{5}\right)}{75}x + \frac{6\left(1829-855\sqrt{5}\right)}{25},$$

$$F_4(x) = f_4^2(x) - f_3(x)f_5(x) =$$
$$= \frac{209-100\sqrt{5}}{5}x^2 + \frac{4\left(25\sqrt{5}-18\right)}{15}x + \frac{11879-6075\sqrt{5}}{225},$$

$$F_5(x) = f_5^2(x) - f_4(x)f_6(x) =$$
$$= 36x^2 - 84x + 49 - 36x^2 + 84x - 20\sqrt{5} - \frac{36}{5} = \frac{209-100\sqrt{5}}{5},$$

$$F_6(x) = f_6^2(x) = 36.$$

Определяем знаки функций $F_i(x)$ в точке 0:

$$F_0(0) = 32(103 - 45\sqrt{5}) > 0,$$
$$F_1(0) = \frac{1024}{9}\left(2911\sqrt{5} - 6507\right) < 0,$$
$$F_2(0) = \frac{64}{15}\left(10\sqrt{5} - 37\right) < 0,$$
$$F_3(0) = \frac{6}{25}\left(1829 - 855\sqrt{5}\right) < 0,$$
$$F_4(0) = \frac{11879 - 6075\sqrt{5}}{225} < 0,$$
$$F_5(0) = \frac{209 - 100\sqrt{5}}{5} < 0,$$

$$F_6(0) = 36 > 0.$$

Теперь вычисляем необходимые знаки функций $f_i(x)$:

$$f_1(0) = \frac{16}{3}\left(139 - 65\sqrt{5}\right) < 0,$$

$$f_2(0) = 24\left(3 - \sqrt{5}\right) > 0,$$

$$f_3(0) = -\frac{1}{5}\left(25\sqrt{5} + 3\right) < 0,$$

$$f_4(0) = \frac{2}{15}\left(25\sqrt{5} + 9\right) > 0,$$

$$f_5(0) = -7 < 0,$$

то есть $N_+(0) = 0$, $N_-(0) = 4$.

Аналогично определяем знаки функций $F_i(x)$ в точке 2:

$$F_0(2) = 384 - 1344 + 32\left(25\sqrt{5} + 9\right) - 32\left(25\sqrt{5} + 3\right) + 1440\left(3 - \sqrt{5}\right) + 64\left(139 - 65\sqrt{5}\right) +$$

$$+32(103 - 45\sqrt{5}) = 128(123 - 55x^2\sqrt{5}) > 0,$$

$$F_1(2) = \frac{256\left(209 - 100\sqrt{5}\right)}{5} + \frac{2048\left(25\sqrt{5} - 18\right)}{15} + \frac{256\left(9045\sqrt{5} - 22937\right)}{45} + \frac{1024\left(2565\sqrt{5} - 5348\right)}{15} +$$

$$+\frac{128\left(106781 - 49255\sqrt{5}\right)}{15} + \frac{1024\left(63856 - 28165\sqrt{5}\right)}{45} + \frac{1024\left(1969 - 892\sqrt{5}\right)}{3} +$$

$$+\frac{1024\left(2381 - 1060\sqrt{5}\right)}{5} + \frac{1024\left(6507 - 2911\sqrt{5}\right)}{9} =$$

$$= \frac{128}{9}\left(265571 - 118767\sqrt{5}\right) < 0,$$

$$F_2(2) = \frac{64\left(209 - 100\sqrt{5}\right)}{5} + \frac{128\left(25\sqrt{5} - 18\right)}{5} + \frac{16\left(28125\sqrt{5} - 72497\right)}{75} +$$

$$+\frac{64\left(7875\sqrt{5} - 14929\right)}{75} + \frac{16\left(107881 - 49235\sqrt{5}\right)}{25} + \frac{64\left(7657 - 3376\sqrt{5}\right)}{15} + \frac{64\left(10\sqrt{5} - 37\right)}{15} =$$

$$= \frac{32}{5}\left(11807 - 5280\sqrt{5}\right) > 0,$$

$$F_3(2) = \frac{16\left(209 - 100\sqrt{5}\right)}{5} + \frac{64\left(25\sqrt{5} - 18\right)}{15} + \frac{8\left(3675\sqrt{5} - 10103\right)}{75} +$$

$$+\frac{32\left(3937 - 1650\sqrt{5}\right)}{75} + \frac{6\left(1829 - 855\sqrt{5}\right)}{25} =$$

$$= \frac{2}{75}\left(61241 - 27395\sqrt{5}\right) < 0,$$

$$F_4(2) = \frac{4\left(209 - 100\sqrt{5}\right)}{5} + \frac{8\left(25\sqrt{5} - 18\right)}{15} + \frac{11879 - 6075\sqrt{5}}{225} =$$
$$= \frac{47339 - 21075\sqrt{5}}{225} > 0,$$

$$F_5(0) = \frac{209 - 100\sqrt{5}}{5} < 0,$$
$$F_6(0) = 36 > 0,$$

то есть $N_+(2) = N_-(2) = 0$.

Значит по теореме 17 уравнение (37) не имеет корней на интервале $(0, 2)$, что и требовалось доказать.

3.3.5. Случай 2

Исследуем точки $y = \dfrac{4 \pm \sqrt{4 - 3t}}{3}$.

1. Рассмотрим точку

$$y = \frac{4 + \sqrt{4 - 3t}}{3} = \frac{4 + \sqrt{70 - 30\sqrt{5}}}{3} = \frac{4 + 3\sqrt{5} - 5}{3} = \frac{3\sqrt{5} - 1}{3}.$$

Это точка локального минимума (см. рис. 3).

Вместо того, чтобы исследовать эту точку на максимум-минимум, вычислим значение фунции в этой точке и покажем, что оно не превосходит (34).

$$w = \sqrt{y\left(\frac{2(1-y)(2-y)+t}{2-y}\right)} =$$

$$= \sqrt{\frac{3\sqrt{5} - 1}{3} \cdot \frac{3 \cdot \left(2 \cdot \frac{4 - 3\sqrt{5}}{3} \cdot \frac{7 - 3\sqrt{5}}{3} + 10\sqrt{5} - 22\right)}{7 - 3\sqrt{5}}} = \frac{3\sqrt{5} - 1}{3},$$

то есть $y = w$.

Заметим, что $6\sqrt{5} - 13 < 1$. Тогда

$$F_3^* = (t + (2 - y)^2)(t + (2 - y)^2)(y^2 + y^2) = 2y^2(t + (2 - y)^2)^2 =$$

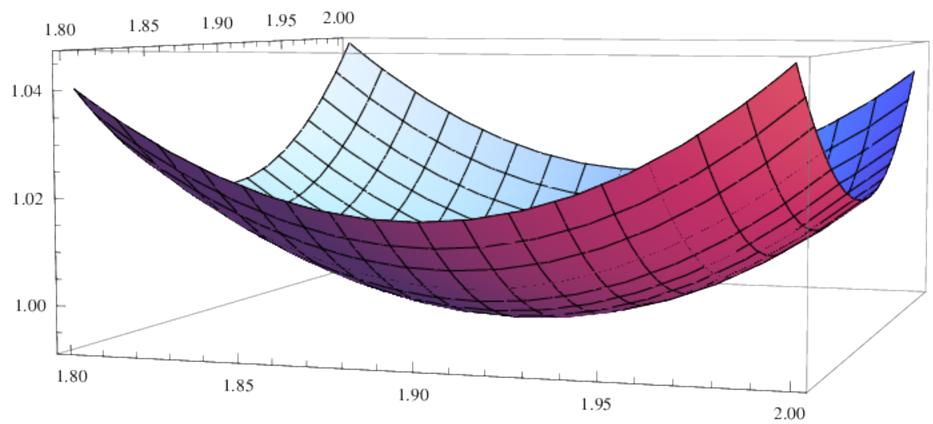

Рис. 3. Точка локального минимума

$$= 2\left(\frac{3\sqrt{5}-1}{3}\right)^2\left(10\sqrt{5}-22+\left(\frac{7-3\sqrt{5}}{3}\right)^2\right)^2 =$$

$$= \frac{256}{729}\left(23-3\sqrt{5}\right)\left(6\sqrt{5}-13\right)^2 < \frac{256}{729}\left(23-3\sqrt{5}\right) < 64\left(56-25\sqrt{5}\right).$$

2. Аналогично рассматриваем точку

$$y = \frac{4-\sqrt{4-3t}}{3} = \frac{4-\sqrt{70-30\sqrt{5}}}{3} = \frac{4-3\sqrt{5}+5}{3} = 3-\sqrt{5}.$$

Это седловая точка (см. рис. 4).

Снова вычисляем

$$w = \sqrt{y\left(\frac{2(1-y)(2-y)+t}{2-y}\right)} =$$

$$= \sqrt{\left(3-\sqrt{5}\right)\cdot\frac{\left(2\left(\sqrt{5}-2\right)\left(\sqrt{5}-1\right)+10\sqrt{5}-22\right)}{\sqrt{5}-1}} =$$

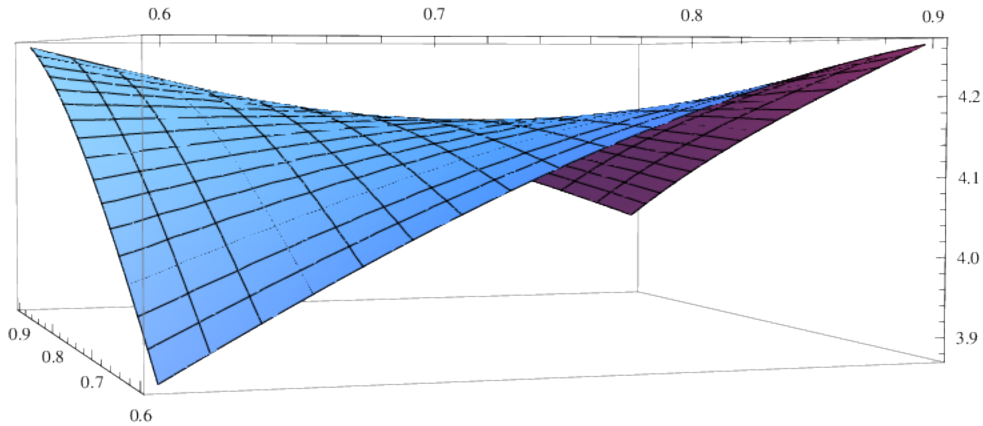

Рис. 4. Седловая точка

$$= \sqrt{\frac{\left(3-\sqrt{5}\right)\left(10-4\sqrt{5}-2\sqrt{5}+4+10\sqrt{5}-22\right)}{\sqrt{5}-1}} = 3-\sqrt{5},$$

то есть $y = w$.

Так как $4\left(123-55\sqrt{5}\right) < 56-25\sqrt{5}$, имеем

$$F_3^* = (t+(2-y)^2)(t+(2-y)^2)(y^2+y^2) = 2y^2(t+(2-y)^2)^2 =$$

$$= 2\left(3-\sqrt{5}\right)^2\left(10\sqrt{5}-22+\left(\sqrt{5}-1\right)^2\right)^2 = 256\left(123-55\sqrt{5}\right) < 64\left(56-25\sqrt{5}\right).$$

В итоге получаем, что в случае 3.3.3. локальных максимумов нет.

3.3.6. Итоговая оценка

Объединяя полученные выше результаты, получаем, что

$$\max F_3 = 64\left(56-25\sqrt{5}\right). \quad \square$$

3.4. Оценка для F_2

Теорема 21.

$$\max F_2(x,y,z,w) = (t_1+y^2)(t_2x^2+z^2)|w| = \frac{64\left(5\sqrt{5}-9\right)}{27},$$

где $t_1 = 10\sqrt{5}-22$ *и* $t_2 = \frac{26+10\sqrt{5}}{27}$, *при условии*

$$-2 \le x+y \le 2, \quad -2 \le x-y \le 2.$$

$$-2 \le z+w \le 2, \quad -2 \le z-w \le 2.$$

Доказательство.

Аналогично доказательству теоремы (18) замечаем, что

$$F_2(x,y,z,w) = F_2(x,-y,z,w) = F_2(-x,y,z,w) = F_2(-x,-y,z,w),$$

$$F_2(x,y,z,w) = F_2(x,y,z,-w) = F_2(x,y,-z,w) = F_2(x,y,-z,-w)$$

Приходим к задаче

$$F_2^*(x,y,z,w) = (t_1+y^2)(t_2x^2+z^2)w \to \max,$$

$$x+y \le 2, \quad z+w \le 2$$

$$x \ge 0, \quad y \ge 0, \quad z \ge 0, \quad w \ge 0.$$

Последние условия не граничные и необходимы только для отсечения точек.

Находим безусловные экстремумы:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_2^*}{\partial x} = 2xw(t_1+y^2) = 0, \\ \dfrac{\partial F_2^*}{\partial y} = 2yw(t_2x^2+z^2) = 0, \\ \dfrac{\partial F_2^*}{\partial z} = 2zw(t_1+y^2) = 0, \\ \dfrac{\partial F_2^*}{\partial w} = (t_1+y^2)(t_2x^2+z^2) = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow x = z = 0.$$

Получаем глобальный минимум $F_3(0,y,0,w) = 0$.

3.4.1. Граница $x = 0, y = 2$

Проверяем значения на границе $x = 0, y = 2$. Тогда

$$F_2^* = (t_1 + 4)z^2 w \to \max$$

при условии

$$z \geq 0, \quad w \geq 0, \quad z + w \leq 2.$$

1. Безусловный экстремум

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_2^*}{\partial z} = 2zw(t_1 + 4) = 0, \\ \dfrac{\partial F_2^*}{\partial w} = z^2(t_1 + 4) = 0 \end{cases} \Rightarrow z = 0.$$

   Это глобальный минимум $F_3^*(0, w) = 0$.

2. Проверяем значения на границах:

$$F_3^*(0, 2) = 0, \quad F_3^*(2, 0) = 0.$$

3. Пусть $z + w = 2$. Тогда $w = 2 - z$. Следовательно,

$$F_2^* = (t_1 + 4)z^2(2 - z) = (t_1 + 4)(2z^2 - z^3)$$

$$\frac{\partial F_3^*}{\partial z} = (t_1 + 4)(4z - 3z^2) = 0,$$

$$4z - 3z^2 = 0,$$

$$z = 0 \quad \text{или} \quad z = \frac{4}{3}.$$

$$F_2^*(0) = 0 \quad \text{или} \quad F_2^*\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{32(t_1 + 4)}{27}.$$

В итоге

$$\max F_2(0, 2, z, w) = \frac{32(t_1 + 4)}{27} = \frac{32\left(10\sqrt{5} - 18\right)}{27} = \frac{64\left(5\sqrt{5} - 9\right)}{27}. \tag{38}$$

3.4.2. Граница $x = 2, y = 0$

Проверяем значения на границе $x = 2, y = 0$. Тогда

$$F_2^* = t_1(4t_2 + z^2)w \to \max$$

при условии

$$z \geq 0, \quad w \geq 0, \quad z + w \leq 2.$$

1. Безусловный экстремум
$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_2^*}{\partial z} = 2t_1 z w = 0, \\ \dfrac{\partial F_2^*}{\partial w} = t_1(4t_2 + z^2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \varnothing.$$
Следовательно, получаем, что локальных экстремумов нет.

2. Проверяем значения на границах.
$$F_2^*(0, 2) = 8t_1t_2, \quad F_3^*(2, 0) = 0.$$

3. Пусть $z + w = 2$. Тогда $w = 2 - z$. Следовательно,
$$F_2^* = t_1(4t_2 + z^2)(2 - z)$$
$$\frac{\partial F_2^*}{\partial x} = t_1\left[-(4t_2 + z^2) + 2z(2 - z)\right] = 0,$$
$$-(4t_2 + z^2) + 2z(2 - z) = 0,$$
$$z^2 + 4t_2 - 4z + 2z^2 = 0$$
$$3z^2 - 4z + 4t_2 = 0$$
$$D = 1 - 3t_2 = 1 - \frac{26 + 10\sqrt{5}}{9} = -\frac{17 + 10\sqrt{5}}{9} < 0,$$
то есть корней в этом случае нет.

В итоге

$$\max F_3(2, 0, z, w) = 8t_1t_2 = 827\left(10\sqrt{5} - 22\right)\left(26 + 10\sqrt{5}\right) = \frac{64}{27}\left(5\sqrt{5} - 9\right).$$

Полученный результат совпадает с (38).

3.4.3. Граница $x + y = 2$

Пусть $x + y = 2$. Тогда $y = 2 - x$. Следовательно,

$$F_2^* = (t_1 + (2-x)^2)(t_2 x^2 + z^2)w \to \max$$

при условии

$$0 \le x \le 2, \quad z \ge 0, \quad w \ge 0, \quad z + w \le 2.$$

1. Безусловный экстремум

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_2^*}{\partial x} = w\left[2x(t_1 + (2-x)^2) - 2(2-x)(t_2 x^2 + z^2)\right] = 0, \\ \dfrac{\partial F_2^*}{\partial z} = 2z(t_1 + (2-x)^2)w = 0, \\ \dfrac{\partial F_2^*}{\partial w} = (t_1 + (2-x)^2)(t_2 x^2 + z^2) = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow x = z = 0,$$

откуда $F_2^* = 0$.

2. Проверяем значения на границе $z = 0, w = 2$. Тогда

$$F_2^* = 2(t_1 + (2-x)^2)t_2 x^2 \to \max$$

при условии

$$0 \le x \le 2.$$

Имеем

$$\frac{\partial F_2^*}{\partial x} = 2t_2\left[2x(t_1 + (2-x)^2) - 2(2-x)x^2\right] = 0,$$
$$x(t_1 + (2-x)^2) - (2-x)x^2 = 0.$$

Если $x = 0$, то $F_2^* = 0$. Иначе

$$t_1 + (2-x)^2 - (2-x)x = 0,$$

$$t_1 + 4 - 4x + x^2 - 2x + x^2 = 0,$$

$$2x^2 - 6x + (t_1 + 4) = 0,$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{1 - 2t_1}}{2}.$$

Тогда

$$F_2^*\left(\frac{3+\sqrt{1-2t_1}}{2}\right) = 2t_2\left(\frac{3+\sqrt{1-2t_1}}{2}\right)^2\cdot\left(t_1+\left(\frac{1-\sqrt{1-2t_1}}{2}\right)^2\right) =$$

$$= \frac{t_2}{8}\left(9+1-2t_1+6\sqrt{1-2t_1}\right)\left(4t_1+\left(1+1-2t_1-2\sqrt{1-2t_1}\right)\right) =$$

$$= \frac{t_2}{2}\left(5-t_1+3\sqrt{1-2t_1}\right)\left(1+t_1-\sqrt{1-2t_1}\right)$$

и

$$F_2^*\left(\frac{3-\sqrt{1-2t_1}}{2}\right) = 2t_2\left(\frac{3-\sqrt{1-2t_1}}{2}\right)^2\cdot\left(t_1+\left(\frac{1+\sqrt{1-2t_1}}{2}\right)^2\right) =$$

$$= \frac{t_2}{8}\left(9+1-2t_1-6\sqrt{1-2t_1}\right)\left(4t_1+\left(1+1-2t_1+2\sqrt{1-2t_1}\right)\right) =$$

$$= \frac{t_2}{2}\left(5-t_1-3\sqrt{1-2t_1}\right)\left(1+t_1+\sqrt{1-2t_1}\right).$$

Получаем

$$\max\left\{F_2^*\left(\frac{3+\sqrt{1-2t_1}}{2}\right), F_2^*\left(\frac{3-\sqrt{1-2t_1}}{2}\right)\right\} =$$

$$= \max\left\{\begin{array}{l} \frac{t_2}{2}\left(5-t_1+3\sqrt{1-2t_1}\right)\left(1+t_1-\sqrt{1-3t_1}\right), \\ \frac{t_2}{2}\left(5-t_1-3\sqrt{1-2t_1}\right)\left(1+t_1+\sqrt{1-3t_1}\right) \end{array}\right. =$$

$$= \max\left\{\begin{array}{l} \frac{13+5\sqrt{5}}{27}\left(5-10\sqrt{5}+22+3\sqrt{45-20\sqrt{5}}\right)\left(1+10\sqrt{5}-22-\sqrt{45-20\sqrt{5}}\right), \\ \frac{13+5\sqrt{5}}{27}\left(5-10\sqrt{5}+22-3\sqrt{45-20\sqrt{5}}\right)\left(1+10\sqrt{5}-22+\sqrt{45-20\sqrt{5}}\right) \end{array}\right. =$$

$$= \max\left\{\begin{array}{l} \frac{64}{27}\left(5\sqrt{5}-9\right), \\ \frac{4}{27}\left(425\sqrt{5}-919\right) \end{array}\right. = \frac{64}{27}\left(5\sqrt{5}-9\right),$$

так как $16\left(5\sqrt{5}-9\right) > 425\sqrt{5}-919$. Этот результат совпадает с (38).

3. Проверяем значения на границе $z=2, w=0$. Здесь $F_2^*=0$.

4. Пусть $z+w=2$. Тогда $w=2-z$. Следовательно,

$$F_2^* = (t_1+(2-x)^2)(t_2x^2+z^2)(2-z) \to \max$$

при условии

$$0 \le x \le 2, 0 \le z \le 2.$$

Приравняем к нулю частные производные:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_2^*}{\partial x} = (2-z)\left[-2(2-x)(t_2x^2+z^2)+2t_2x(t_1+(2-x)^2)\right] = 0, \\ \dfrac{\partial F_2^*}{\partial z} = (t_1+(2-x)^2)\left[-(t_2x^2+z^2)+2z(2-z)\right] = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} t_2x(t_1+(2-x)^2)-(2-x)(t_2x^2+z^2) = 0, \\ 2z(2-z)-(t_2x^2+z^2) = 0 \end{cases}$$

Выражаем из второго уравнения

$$t_2x^2 = 2z(2-z)-z^2,$$
$$x^2 = \frac{4z-3z^2}{t_2} = \frac{z(4-3z)}{t_2}. \tag{39}$$

Упрощаем первое уравнение

$$xt_1t_2+4xt_2-4x^2t_2+x^3t_2-2x^2t_2+x^3t_2-2z^2+xz^2 = 0,$$
$$x(t_1t_2+4t_2+2x^2t_2+z^2) = 6x^2t_2+2z^2,$$

откуда

$$x = \frac{6z(4-3z)+2z^2}{t_1t_2+4t_2+2z(4-3z)+z^2} = \frac{24z-18z^2+2z^2}{t_1t_2+4t_2+8z-5z^2} = \frac{8z(3-2z)}{t_2(t_1+4)+z(8-5z)}.$$

Объединяя это с (39), получаем

$$\frac{z(4-3z)}{t_2} = \frac{64z^2(3-2z)^2}{\left(t_2(t_1+4)+z(8-5z)\right)^2},$$
$$z(4-3z)\left(t_2(t_1+4)+z(8-5z)\right)^2 = 64z^2t_2(3-2z)^2.$$

Пусть $T_1 = t_1+4$, тогда

$$(4-3z)\left(t_2^2T_1^2+2t_2T_1z(8-5z)+z^2(8-5z)^2\right) = 64zt_2\left(9-12z+4z^2\right),$$

или же

$$75z^5-340z^4+(512-30t_2T_1+256t_2)z^3-(256+768t_2-88t_2T_1)z^2+$$
$$(3t_2^2T_1^2-64t_2T_1+576t_2)z-4t_2^2T_1^2 = 0. \tag{40}$$

Займемся исследованием этого уравнения.

3.4.4. Исследование уравнения (40)

Уравнение (40) имеет единственный корень на интервале $(0, 2)$ (см. рис. 5). Так же как и в пункте при промежуточных вычислениях мы будем пользоваться математическим пакетом `Wolfram Mathematica`.

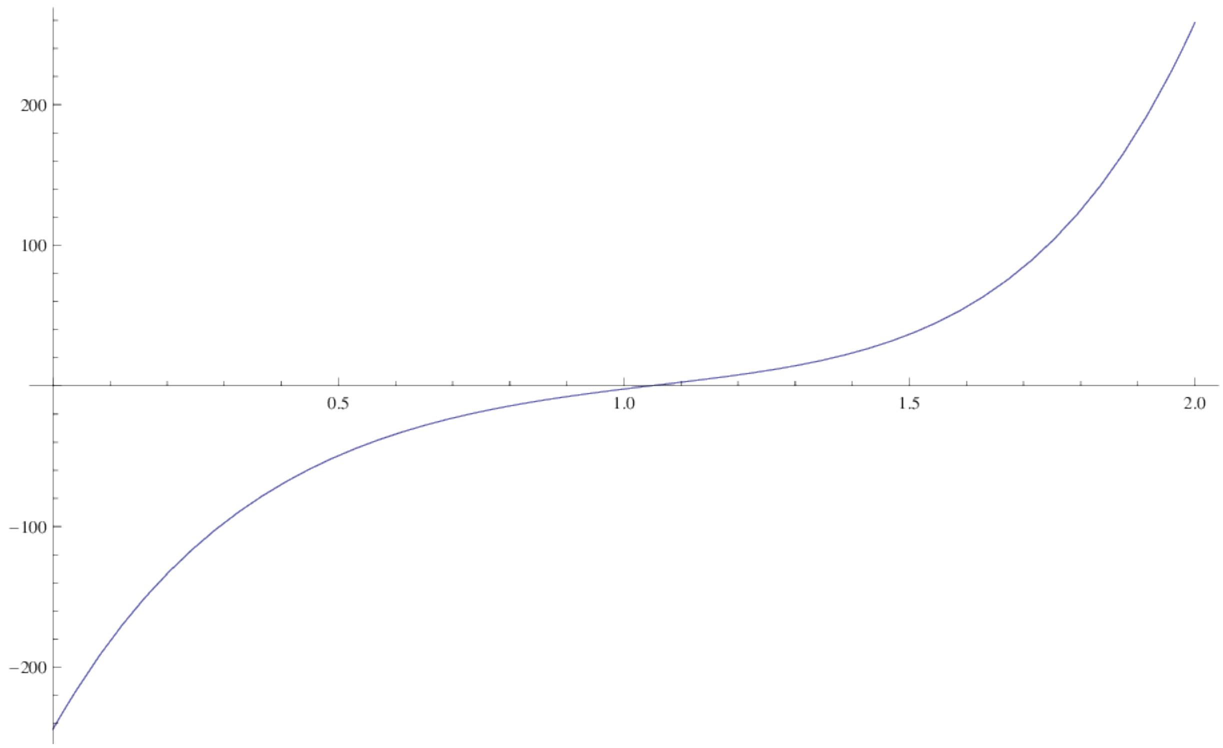

Рис. 5. График функции $g(z)$

Для того, чтобы в этом убедиться, исследуем функцию

$$g(z) = 75z^5 - 340z^4 + (512 - 30t_2T_1 + 256t_2)z^3 - (256 + 768t_2 - 88t_2T_1)z^2 +$$

$$+(3t_2^2T_1^2 - 64t_2T_1 + 576t_2)z - 4t_2^2T_1^2.$$

Выпишем коэффициенты многочлена, учтя, что $T_1 = t_1 + 4 = 10\sqrt{5} - 18$ и $t_2 = \frac{26+10\sqrt{5}}{27}$

$$a_0 = 75,$$

$$a_1 = -340,$$

$$a_2 = 512 - 30t_2T_1 + 256t_2 =$$
$$= \frac{512 \cdot 27 + \left(26 + 10\sqrt{5}\right)\left(256 - 30\left(10\sqrt{5} - 18\right)\right)}{27} = \frac{160\left(122 + \sqrt{5}\right)}{27},$$

$$a_3 = -(256 + 768t_2 - 88t_2T_1) =$$
$$= -\frac{6912 + \left(26 + 10\sqrt{5}\right)\left(768 - 88\left(10\sqrt{5} - 18\right)\right)}{27} = -\frac{128\left(188 + 5\sqrt{5}\right)}{27},$$

$$a_4 = 3t_2^2T_1^2 - 64t_2T_1 + 576t_2 =$$
$$= \frac{\left(26 + 10\sqrt{5}\right)\left(27\left(576 - 64\left(10\sqrt{5} - 18\right)\right) + 3\left(26 + 10\sqrt{5}\right)\left(10\sqrt{5} - 18\right)^2\right)}{729} =$$
$$= \frac{128\left(1167 + 85\sqrt{5}\right)}{243},$$

$$a_5 = -4t_2^2T_1^2 = -\frac{4\left(26 + 10\sqrt{5}\right)^2\left(10\sqrt{5} - 18\right)^2}{729} = -\frac{1024\left(129 + 20\sqrt{5}\right)}{729}.$$

То есть
$$g(z) = 75z^5 - 340z^4 + \frac{160\left(122 + \sqrt{5}\right)}{27}z^3 -$$
$$-\frac{128\left(188 + 5\sqrt{5}\right)}{27}z^2 + \frac{128\left(1167 + 85\sqrt{5}\right)}{243}z - \frac{1024\left(129 + 20\sqrt{5}\right)}{729},$$

Докажем, что производная $g(z)$ сохраняет знак на интервале $(0, 2)$.

$$f(z) = g'(z) = 375z^4 - 1360z^3 + \frac{160\left(122 + \sqrt{5}\right)}{9}z^2 - \frac{256\left(188 + 5\sqrt{5}\right)}{27}z + \frac{128\left(1167 + 85\sqrt{5}\right)}{243}.$$

$$g'(0) = \frac{128\left(1167 + 85\sqrt{5}\right)}{243} > 0.$$

Для этого покажем, что уравнение
$$f(z) = 0 \tag{41}$$
не имеет корней. Снова воспользуемся теоремой 17.

Вычисляем вспомогательные функции $f_i(z)$:

$$f_0(z) = f(z),$$
$$f_1(z) = 375z^3 - 1020z^2 + \frac{80}{9}\left(122 + \sqrt{5}\right)z - \frac{64}{27}\left(188 + 5\sqrt{5}\right),$$
$$f_2(z) = 375z^2 - 680z + \frac{80}{27}\left(122 + \sqrt{5}\right),$$
$$f_3(z) = 375z - 340,$$
$$f_4(z) = 375.$$

Теперь вычисляем $F_i(z)$:

$$F_0(z) = f(z),$$

$$F_1(z) = f_1^2(z) - f_0(z)f_2(z) =$$
$$= \frac{400\left(449+25\sqrt{5}\right)}{9}z^4 + \frac{6400\left(373+29\sqrt{5}\right)}{27}z^3 - \frac{640\left(53691+6995\sqrt{5}\right)}{243}z^2 +$$
$$+\frac{5120\left(13595+2739\sqrt{5}\right)}{729}z - \frac{1024\left(75553+23845\sqrt{5}\right)}{6561},$$

$$F_2(z) = f_2^2(z) - f_1(z)f_3(z)$$
$$= -\frac{400\left(449+25\sqrt{5}\right)}{9}z^2 + +\frac{3200\left(373+29\sqrt{5}\right)}{27}z - \frac{1280\left(11847+1075\sqrt{5}\right)}{729},$$

$$F_3(z) = f_3^2(z) - f_2(z)f_4(z) = -\frac{400\left(449+25\sqrt{5}\right)}{9},$$

$$F_4(z) = f_4^2(z) = 140625.$$

В отличие от пункта 3.3.4., будем применять теорему 17 не к интервалу $(0,2)$, а к двум интервалам $(0,1)$ и $(1,2)$.

Определяем знаки функций $F_i(z)$ в точке 0:

$$F_0(0) = \frac{128\left(1167+85\sqrt{5}\right)}{243} > 0,$$
$$F_1(0) = -\frac{1024\left(75553+23845\sqrt{5}\right)}{6561} < 0,$$
$$F_2(0) = -\frac{1280\left(11847+1075\sqrt{5}\right)}{729} < 0,$$
$$F_3(0) = -\frac{400\left(449+25\sqrt{5}\right)}{9} < 0,$$
$$F_4(0) = 140625 > 0.$$

Затем вычисляем необходимые знаки функций $f_i(z)$:

$$f_1(0) = -\frac{64}{27}\left(188+5\sqrt{5}\right) < 0,$$

$$f_2(0) = \frac{80}{27}\left(122+\sqrt{5}\right) > 0,$$

$$f_3(0) = -340 < 0,$$

то есть $N_+(0) = 0$, $N_-(0) = 2$.

Аналогично определяем знаки функций $F_i(z)$ в точке 1.

$$F_0(1) = \frac{3909 + 3680\sqrt{5}}{243} > 0,$$

$$F_1(1) = -\frac{16\left(430889 + 355265\sqrt{5}\right)}{6561} < 0,$$

$$F_2(1) = \frac{3760\left(669 + 85\sqrt{5}\right)}{729} > 0,$$

$$F_3(1) = -\frac{400\left(449 + 25\sqrt{5}\right)}{9} < 0,$$

$$F_4(1) = 140625 > 0,$$

то есть $N_+(1) = N_-(1) = 0$.

Теперь определяем знаки функций $F_i(z)$ в точке 2:

$$F_0(2) = \frac{16\left(12837 + 320\sqrt{5}\right)}{243} > 0,$$

$$F_1(2) = -\frac{16\left(262019 + 139595\sqrt{5}\right)}{6561} < 0,$$

$$F_2(2) = -\frac{320\left(27813 - 1235\sqrt{5}\right)}{729} < 0,$$

$$F_3(2) = -\frac{400\left(449 + 25\sqrt{5}\right)}{9} < 0,$$

$$F_4(2) = 140625 > 0.$$

Затем вычисляем необходимые знаки функций $f_i(z)$:

$$f_1(0) = \frac{8}{27}\left(2171 + 20\sqrt{5}\right) > 0,$$

$$f_2(0) = \frac{20}{27}\left(677 + 4\sqrt{5}\right) > 0,$$

$$f_3(0) = 750 - 340 = 410 > 0,$$

то есть $N_+(2) = 2$, $N_-(2) = 0$.

Это значит, что уравнение (41) не имеет корней, как на интервале $(0, 1)$, так и на интервале $(1, 2)$. А так как

$$f(1) = F_0(1) > 0$$

то оно не имеет корней на интервале $(0, 2)$, что нам и требовалось доказать.

Так как

$$g(0) = -\frac{1024}{729}\left(129 + 20\sqrt{5}\right) < 0,$$

$$g(2) = \frac{32}{729}\left(5169 + 320\sqrt{5}\right) > 0,$$

это означает, что уравнение $g(z) = 0$ имеет ровно 1 корень. Назовем его z_0. Для нас будет важно, что

$$1 = z_1 < z_0 < z_2 = \frac{10}{9}. \tag{42}$$

Действительно

$$g(1) = \frac{1}{729}\left(159 - 800\sqrt{5}\right) < 0,$$

$$g\left(\frac{10}{9}\right) = \frac{32}{19683}\left(1239 + 320\sqrt{5}\right) > 0.$$

3.4.5. Исследование F_2^* в точке z_0

Займемся исследованием функции $F_2^*(x_0, z_0)$ в точке z_0. Предварительно оценим значение переменной x в исследуемой точке (назовем это значение x_0). Из (39)

$$x = \sqrt{\frac{4z - 3z^2}{t_2}} = \sqrt{\frac{\frac{4}{3} - 3\left(1 - \frac{2}{3}\right)^2}{t_2}} = 3\sqrt{\frac{4 - (3z-2)^2}{26 + 10\sqrt{5}}},$$

тогда

$$3\sqrt{\frac{4 - \left(\frac{10}{3} - 2\right)^2}{26 + 10\sqrt{5}}} \le x_0 \le 3\sqrt{\frac{4 - (3-2)^2}{26 + 10\sqrt{5}}},$$

$$\sqrt{\frac{20}{26 + 10\sqrt{5}}} \le x_0 \le \sqrt{\frac{27}{26 + 10\sqrt{5}}}.$$

Для левой части справедлива оценка

$$\sqrt{\frac{20}{26 + 10\sqrt{5}}} > \sqrt{\frac{25}{64}} = \frac{5}{8},$$

,

так как

$$13 + 5\sqrt{5} < \frac{128}{5} \quad \text{и} \quad \frac{20}{26 + 10\sqrt{5}} > \frac{25}{64}.$$

Правую часть можно оценить как

$$\sqrt{\frac{20}{26 + 10\sqrt{5}}} < \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4},$$

так как

$$24 < 13 + 5\sqrt{5} \quad \text{и} \quad \frac{27}{26 + 10\sqrt{5}} < \frac{9}{16}.$$

В итоге

$$\frac{5}{8} = x_1 < x_0 < x_2 = \frac{3}{4}. \tag{43}$$

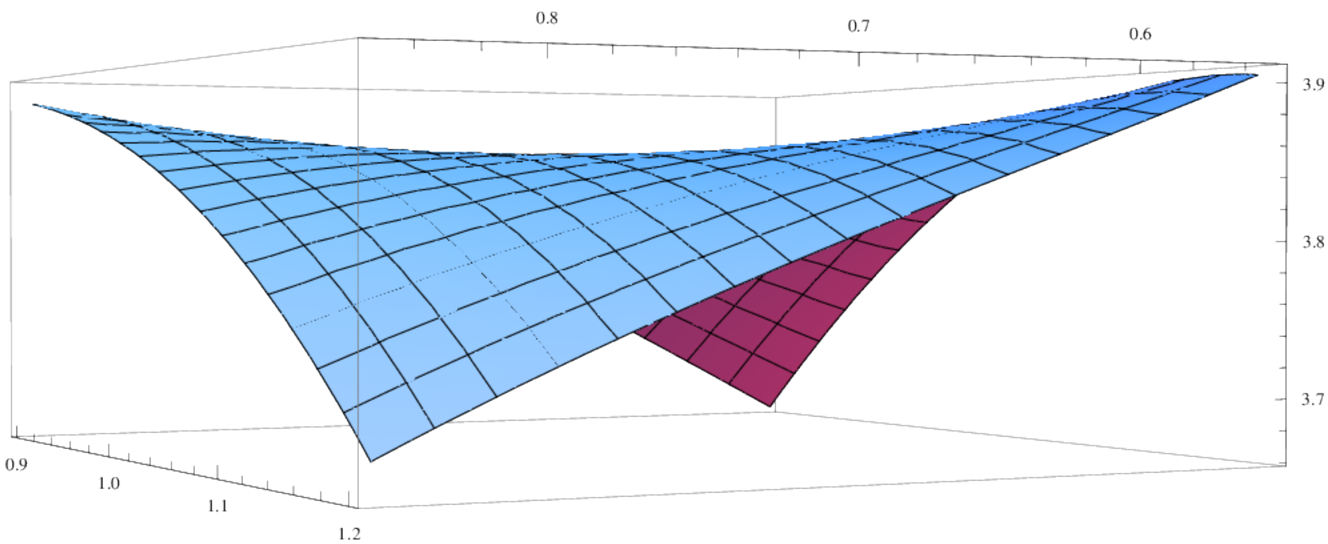

Рис. 6. Седловая точка

Заметим, что (x_0, z_0) – седловая точка (см. рис. 6). Для нас важно, что в этой точке нет глобального максимума. Чтобы доказать это, произведем оценку значения $F_2^*(x_0, z_0)$. Для этого воспользуемся следующей оценкой

$$F_2^*(x_0, z_0) \leq F_2^*(x_1, z_1) + \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \cdot \max_{\substack{x_1 \leq x \leq x_2 \\ z_1 \leq z \leq z_2}} \operatorname{grad} F_2 \leq$$

$$\leq F_2^*(x_1, z_1) + \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \cdot \max_{\substack{x_1 \leq x \leq x_2 \\ z_1 \leq z \leq z_2}} \sqrt{\left(\frac{\partial F_2^*}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F_2^*}{\partial z}\right)^2}.$$

Оценки частных производных. Займемся оценкой частных производных F_2^* в прямоугольнике $(x_1, x_2) \times (z_1, z_2)$. Выписываем производные:

$$\frac{\partial F_2^*}{\partial x} = (2 - z) \left[-2(2 - x)(t_2 x^2 + z^2) + 2t_2 x(t_1 + (2 - x)^2)\right],$$

$$\frac{\partial F_2^*}{\partial z} = (t_1 + (2 - x)^2) \left[-(t_2 x^2 + z^2) + 2z(2 - z)\right].$$

Оценим отдельные сомножители, входящие в производную. Для сомножителя $(2 - z)$ имеем

$$\frac{8}{9} = 2 - \frac{10}{9} = 2 - z_2 \leq 2 - z \leq 2 - z_1 = 2 - 1 = 1.$$

Для сомножителя $(2 -)$ получаем

$$\frac{5}{4} = 2 - \frac{3}{4} = 2 - x_2 \leq 2 - x \leq 2 - x_1 = 2 - \frac{5}{8} = \frac{11}{8}.$$

Для сомножителя $t_1 + (2 - x)^2$ имеем

$$\frac{3}{2} < t_1 + (2 - x)^2 < \frac{5}{2},$$

так как

$$t_1 + (2 - x)^2 \leq t_1 + (2 - x_1)^2 = t_1 + \left(2 - \frac{5}{8}\right)^2 = t_1 + \frac{121}{64} < 10\sqrt{5} - 22 + 2 < \frac{5}{2},$$

$$t_1 + (2 - x)^2 \geq t_1 + (2 - x_2)^2 = t_1 + \left(2 - \frac{3}{4}\right)^2 = t_1 + \frac{25}{16} > 10\sqrt{5} - 22 + \frac{3}{2} > \frac{3}{2}.$$

Для сомножителя $t_2 x^2 + z^2$ получаем

$$\frac{5}{3} < t_2 x^2 + z^2 < \frac{7}{3},$$

так как

$$t_2 x^2 + z^2 \geq t_2 x_1^2 + z_1^2 = \frac{26 + 10\sqrt{5}}{27} \cdot \frac{25}{64} + 1 > \frac{13 + 5\sqrt{5}}{27} \cdot \frac{24}{32} + 1 = \frac{49 + 5\sqrt{5}}{36} > \frac{49 + 11}{36} > \frac{5}{3},$$

$$t_2 x^2 + z^2 \leq t_2 x_2^2 + z_2^2 = \frac{26 + 10\sqrt{5}}{27} \cdot \frac{9}{16} + \frac{100}{81} < \frac{13 + 5\sqrt{5}}{24} + \frac{30}{24} = \frac{43 + 5\sqrt{5}}{24} < \frac{43 + 12}{24} < \frac{56}{24} = \frac{7}{3}.$$

Вначале оценим $\frac{\partial F_2^*}{\partial x}$:

$$\frac{\partial F_2^*}{\partial x} = 2(2 - z) \left[-(2 - x)(t_2 x^2 + z^2) + t_2 x(t_1 + (2 - x)^2)\right].$$

Оцениваем последний сомножитель

$$-(2-x)(t_2x^2+z^2)+2t_2x(t_1+(2-x)^2) \geq -\frac{11}{8}\cdot\frac{7}{3}+\frac{26+10\sqrt{5}}{27}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{2}=$$

$$=-\frac{77}{24}+\frac{65+25\sqrt{5}}{72}=\frac{-231+65+25\sqrt{5}}{72}>\frac{-166+55}{72}=-\frac{111}{72}=-\frac{37}{24}>-\frac{25}{16},$$

$$-(2-x)(t_2x^2+z^2)+2t_2x(t_1+(2-x)^2) \leq -1\cdot\frac{5}{3}+\frac{26+10\sqrt{5}}{27}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{2}=$$

$$=-\frac{5}{3}+\frac{65+25\sqrt{5}}{36}=\frac{-60+65+25\sqrt{5}}{36}<\frac{5+60}{72}<1,$$

то есть

$$\left|-(2-x)(t_2x^2+z^2)+2t_2x(t_1+(2-x)^2)\right|<\frac{25}{16}.$$

В итоге

$$\left|\frac{\partial F_2^*}{\partial x}\right| \leq 2\cdot|2-z|\cdot\left|-2(2-x)(t_2x^2+z^2)+2t_2x(t_1+(2-x)^2)\right| \leq 2\cdot 1\cdot\frac{25}{16}=\frac{25}{8}<\frac{10}{3}.$$

Теперь оцениваем $\frac{\partial F_2^*}{\partial z}$:

$$\frac{\partial F_2^*}{\partial z}=(t_1+(2-x)^2)\left[-(t_2x^2+z^2)+2z(2-z)\right].$$

Оценим последний сомножитель

$$-(t_2x^2+z^2)+2z(2-z) \geq -\frac{7}{3}+2\cdot 1\cdot\frac{8}{9}=\frac{-21+16}{9}$$

$$=-\frac{5}{9},$$

$$-(t_2x^2+z^2)+2z(2-z) \leq -\frac{5}{3}+2\cdot\frac{10}{9}\cdot 1=\frac{-15+20}{9}=\frac{5}{9},$$

то есть

$$\left|-(t_2x^2+z^2)+2z(2-z)\right|<\frac{5}{9}.$$

Значит

$$\left|\frac{\partial F_2^*}{\partial z}\right| \leq \left|t_1+(2-x)^2\right|\cdot\left|-(t_2x^2+z^2)+2z(2-z)\right|=\frac{7}{3}\cdot\frac{5}{9}=\frac{35}{27}<\frac{4}{3}.$$

Оценка F_2^* в точке (x_0, z_0). Оценим вначале

$$F_2^*(x_1, z_1) = (t_1 + (2 - x_1)^2)(t_2 x_1^2 + z_1^2)(2 - z_1) =$$

$$= \left(10\sqrt{5} - 22 + \frac{121}{64}\right) \cdot \left(\frac{26 + 10\sqrt{5}}{27} \cdot \frac{25}{64} + 1\right) \cdot 1 <$$

$$< \left(\frac{179}{8} - 22 + \frac{61}{32}\right) \cdot \left(\frac{13 + 5\sqrt{5}}{32} + 1\right) < \frac{12 + 61}{32} \cdot \frac{45 + 5\sqrt{5}}{32} <$$

$$< \frac{73}{32} \cdot \frac{45 + 12}{32} = \frac{4161}{1024} < \frac{4224}{1024} = \frac{33}{8}.$$

Затем

$$(x_2 - x_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = \frac{1}{64} + \frac{1}{81} = \frac{64 + 81}{64 \cdot 81} = \frac{145}{64 \cdot 81} < \frac{196}{64 \cdot 81} = \left(\frac{14}{72}\right)^2 = \left(\frac{7}{36}\right)^2.$$

Теперь

$$\left(\frac{\partial F_2^*}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F_2^*}{\partial z}\right)^2 < \frac{100}{9} + \frac{16}{9} < \frac{121}{9} = \left(\frac{11}{3}\right)^2.$$

Объединяя полученные результаты

$$F_2^*(x_0, z_0) \leq F_2^*(x_1, z_1) + \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \cdot \max_{\substack{x_1 \leq x \leq x_2 \\ z_1 \leq z \leq z_2}} \sqrt{\left(\frac{\partial F_2^*}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F_2^*}{\partial z}\right)^2} \leq$$

$$\leq \frac{33}{8} + \frac{7}{36} \cdot \frac{11}{3} = \frac{33}{8} + \frac{77}{108} < \frac{33}{8} + \frac{81}{108} = \frac{33}{8} + \frac{3}{4} < 5.$$

С другой стороны, можно оценить (38)

$$\frac{64}{27}\left(5\sqrt{5} - 9\right) = \frac{1}{27}\left(320\sqrt{5} - 576\right) > \frac{715 - 576}{27} = \frac{139}{27} > \frac{138}{27} > 5.$$

То есть, значение F_2^* в точке (x_0, z_0) не превосходит (38), что и требовалось доказать.

3.4.6. Итоговая оценка

Объединяя полученные выше результаты, получаем, что

$$\max F_2 = \frac{64\left(5\sqrt{5} - 9\right)}{27}. \quad \square$$

4. Доказательство оценок объема критического параллелепипеда и константы наилучших совместных диофантовых приближений

4.1. Идея доказательства

Вернемся к доказательству оценок, полученных в 2.3..

Будем рассматривать матрицы следующего вида

$$A_* = \begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \multicolumn{9}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \cdots & a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 & a_1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 & a_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \multicolumn{9}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_k & a_k \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_k & a_k \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$A_*^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \multicolumn{9}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{2a_1} & \frac{1}{2a_1} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{1}{2a_1} & \frac{1}{2a_1} & \cdots & 0 & 0 \\ \multicolumn{9}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{2a_k} & \frac{1}{2a_k} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\frac{1}{2a_k} & \frac{1}{2a_k} \end{pmatrix}.$$

Задача (25) принимает вид

$$
\begin{gathered}
f_{n,[n/2]} = \tfrac{1}{2^{[n/2]}} \prod_{i=1}^{[n/2]} |x_i^2 + x_{[n/2]+i}^2| \prod_{i=2[n/2]}^{n} |x_i| \to \max, \\
\left|\frac{x_1}{a}\right| \le 1, \quad \cdots \quad \left|\frac{x_{n-2k}}{a}\right| \le 1, \\
\left|\frac{x_{n-2k+1}}{2a_1} + \frac{x_{n-2k+2}}{2a_1}\right| \le 1, \quad \left|\frac{x_{n-2k+1}}{2a_1} - \frac{x_{n-2k+2}}{2a_1}\right| \le 1, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\left|\frac{x_{n-1}}{2a_k} + \frac{x_n}{2a_k}\right| \le 1, \quad \left|\frac{x_{n-1}}{2a_k} - \frac{x_n}{2a_k}\right| \le 1.
\end{gathered}
$$

Сделав замену,

$$
\begin{gathered}
x_i = a y_i, \qquad i = \overline{1, n-2k} \\
x_{n-2(k-i)-1} = a_i y_{n-2(k-i)-1}, \quad x_{n-2(k-i)} = a_i y_{n-2(k-i)}, \qquad i = \overline{1,k}
\end{gathered} \tag{44}
$$

задача примет вид

$$
\begin{gathered}
f_{n,[n/2]} = \tfrac{1}{2^{[n/2]}} \prod_{i=1}^{[n/2]} |x_i^2 + x_{[n/2]+i}^2| \prod_{i=2[n/2]}^{n} |x_i| \to \max, \\
|y_1| \le 1, \quad \cdots \quad |y_{n-2k}| \le 1, \\
|y_{n-2k+1} + y_{n-2k+2}| \le 2, \quad |y_{n-2k+1} - y_{n-2k+2}| \le 2, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
|y_{n-1} + y_n| \le 2, \quad |y_{n-1} - y_n| \le 2.
\end{gathered} \tag{45}
$$

В этой задаче ограничения не зависят от исходной матрицы A. Это свойство мы будем в дальнейшем использовать.

4.2. Оценка для $V_{3,1}$

Теорема 22.

$$
V_{3,1} \ge 2. \tag{46}
$$

Доказательство.

Для доказательства этого утверждения вернемся к задаче (45). В качестве матрицы A_n рассмотрим

$$
A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.
$$

откуда

$$V_{3,1} \geq \det A_3 = 2.$$

Тогда задача (45) примет вид (в силу (44)

$$f_{3,1} = \frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2\right)|x_3| = \frac{1}{2}\left(y_1^2 + y_2^2\right)|y_3| \to \max,$$

$$|y_1| \leq 1, \qquad |y_2 + y_3| \leq 2, \qquad |y_2 - y_3| \leq 2.$$

Докажем, что $\max f_{3,1} \leq 1$.

Отметим, что наибольшее значение достигается при $|y_1| = 1$. Действительно, пусть существует максимум такой, что $\max f_{3,1} = f_{3,1}(\delta, y_2, y_3)$, где $|\delta| < 1$. Тогда

$$f_{3,1}(\delta, y_2, y_3) = \frac{1}{2}\left(\delta^2 + y_2^2\right)|y_3| \leq \frac{1}{2}\left(1 + y_2^2\right)|y_3| = f_{3,1}(1, y_2, y_3).$$

Противоречие, т.е. $|y_1| = 1$.

Таким образом достаточно доказать, что $\max f_{3,1}^* \leq 1$ при условии

$$|y_2 + y_3| \leq 2, \qquad |y_2 - y_3| \leq 2, \tag{47}$$

где

$$f_{3,1}^* = \frac{1}{2}\left(1 + y_2^2\right)|y_3|,$$

то есть

$$f_{3,1}^* = \frac{1}{2}\left(1 + y_2^2\right)|y_3| = \frac{1}{2}F_0(y_2, y_3),$$

где

$$F_0(a, b) = \left(1 + a^2\right)|b|.$$

В силу теоремы (19)

$$\max F_0(a, b) = 2$$

при ограничениях (47). Тогда $f_{3,1}^* \leq 1$. Теорема доказана. $\square$

4.3. Оценка для $V_{4,2}$

Теорема 23.

$$V_{4,2} \geq \frac{16}{9}. \tag{48}$$

Доказательство.

Доказательство будем проводить аналогично теореме 22. В качестве матрицы A_n рассмотрим

$$A_4 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}\alpha & \sqrt{2}\alpha \\ 0 & 0 & -\sqrt{2}\alpha & \sqrt{2}\alpha \end{pmatrix},$$

где

$$\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}},$$

откуда

$$V_{4,2} \geq \det A_2 = \alpha^2 \cdot 4\alpha^2 = 4 \cdot \alpha^4 = 4 \cdot \frac{4}{9} = \frac{16}{9}.$$

Тогда задача (45) примет вид

$$f_{4,2} = \frac{1}{4}\left(x_1^2 + x_3^2\right)\left(x_2^2 + x_4^2\right) = \frac{1}{4}\left(\alpha^2 y_1^2 + 2\alpha^2 y_3^2\right)\left(\alpha^2 y_2^2 + 2\alpha^2 y_4^2\right) \to \max,$$

$$|y_1| \leq 1, \qquad |y_2| \leq 1,,$$

$$|y_3 + y_4| \leq 2, \qquad |y_3 - y_4| \leq 2.$$

Заметим, что

$$f_{4,2} = \frac{1}{4}\left(\alpha^2 y_1^2 + 2\alpha^2 y_3^2\right)\left(\alpha^2 y_2^2 + 2\alpha^2 y_4^2\right) = \alpha^4 \cdot \left(\frac{y_1^2}{2} + y_3^2\right)\left(\frac{y_2^2}{2} + y_4^2\right).$$

Докажем, что $\max f_{4,2} \leq 1$.

Аналогично доказательству теоремы 22 отмечаем, что $|y_1| = |y_2| = 1$ и приходим к ограничениям

$$|y_3 + y_4| \leq 2, \qquad |y_3 - y_4| \leq 2, \tag{49}$$

то есть

$$f_{4,2}^* = \alpha^4 \cdot \left(\frac{1}{2} + y_3^2\right)\left(\frac{1}{2} + y_4^2\right) = \alpha^4 \cdot F_1(y_3, y_4),$$

где

$$F_1(a,b) = \left(\frac{1}{2} + a^2\right)\left(\frac{1}{2} + b^2\right).$$

В силу теоремы (18)

$$\max F_1(a,b) = \left(\frac{3}{2}\right)^2,$$

при ограничениях (49). Тогда

$$f_{4,2}^{*} \le \alpha^4 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 1.$$

Теорема доказана. □

4.4. Оценка для $V_{5,2}$

Теорема 24.

$$V_{5,2} \ge \sqrt{\frac{27\left(9+5\sqrt{5}\right)}{88}} \approx 2.48831... \tag{50}$$

Доказательство.

Доказательство будем проводить аналогично теореме 22. В качестве матрицы A_n рассмотрим

$$A_5 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha\beta & \alpha\beta & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha\beta & \alpha\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha\beta\gamma & \alpha\beta\gamma \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha\beta\gamma & \alpha\beta\gamma \end{pmatrix},$$

где

$$\alpha = \sqrt{7-3\sqrt{5}} \cdot \sqrt[10]{\frac{134+60\sqrt{5}}{27}}, \qquad \beta = \sqrt{\frac{1}{10\sqrt{5}-22}}, \qquad \gamma = \sqrt{\frac{27}{26+10\sqrt{5}}},$$

откуда

$$V_{5,2} \ge \det A_5 = \alpha \cdot 2\alpha^2\beta^2 \cdot 2\alpha^2\beta^2\gamma^2 = 4 \cdot \alpha^5 \cdot \beta^4 \cdot \gamma^2 =$$

$$= 4 \cdot \left(7-3\sqrt{5}\right)^2 \sqrt{\frac{\left(7-3\sqrt{5}\right)\left(134+60\sqrt{5}\right)}{27}} \cdot \frac{1}{\left(10\sqrt{5}-22\right)^2} \cdot \frac{27}{26+10\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{4\left(49-42\sqrt{5}+45\right)}{\left(500-440\sqrt{5}+484\right)\left(26+10\sqrt{5}\right)} \cdot \sqrt{27\left(938+420\sqrt{5}-402\sqrt{5}-900\right)} =$$

$$= \frac{94-42\sqrt{5}}{4\left(123-55\sqrt{5}\right)\left(13+5\sqrt{5}\right)} \cdot \sqrt{54\left(19+9\sqrt{5}\right)} =$$

$$= \frac{47-21\sqrt{5}}{2\left(1599-715\sqrt{5}+615\sqrt{5}-1375\right)} \cdot \sqrt{54\left(19+9\sqrt{5}\right)} =$$

$$= \frac{47-21\sqrt{5}}{2\left(224-100\sqrt{5}\right)} \cdot \sqrt{54\left(19+9\sqrt{5}\right)} = \sqrt{\frac{54\left(19+9\sqrt{5}\right)\left(47-21\sqrt{5}\right)^2}{64\left(56-25\sqrt{5}\right)^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{27\left(19+9\sqrt{5}\right)\left(2209-1974\sqrt{5}+2205\right)}{32\left(3136-2800\sqrt{5}+3125\right)}} =$$

$$= \sqrt{\frac{27\left(19+9\sqrt{5}\right)\left(2207-987\sqrt{5}\right)\left(6261+2800\sqrt{5}\right)}{16\left(6261-2800\sqrt{5}\right)\left(6261+2800\sqrt{5}\right)}} =$$

$$= \sqrt{\frac{27\left(19+9\sqrt{5}\right)\left((2207\cdot 6261-987\cdot 2800\cdot 5)+(-987\cdot 6261+2207\cdot 2800)\sqrt{5}\right)}{16\cdot(39200121-39200000)}} =$$

$$= \sqrt{\frac{27\left(19+9\sqrt{5}\right)\left(27-7\sqrt{5}\right)}{16\cdot 121}} = \sqrt{\frac{27\left(513-133\sqrt{5}+243\sqrt{5}-315\right)}{16\cdot 121}} =$$

$$= \sqrt{\frac{27\left(198+110\sqrt{5}\right)}{16\cdot 121}} = \sqrt{\frac{27\left(9+5\sqrt{5}\right)}{88}}.$$

Тогда задача (45) примет вид

$$f_{5,2} = \frac{1}{4}\left(x_1^2+x_3^2\right)\left(x_2^2+x_4^2\right)|x_5| =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\alpha^2 y_1^2+\alpha^2\beta^2 y_3^2\right)\cdot\left(\alpha^2\beta^2 y_2^2+\alpha^2\beta^2\gamma^2 y_4^2\right)\cdot|\alpha\beta\gamma y_5| \to \max,$$

$$|y_1| \le 1,$$

$$|y_2+y_3| \le 2, \qquad |y_2-y_3| \le 2,$$

$$|y_4+y_5| \le 2, \qquad |y_4-y_5| \le 2.$$

Заметим, что

$$f_{5,2} = \frac{1}{4}\left(\alpha^2 y_1^2+\alpha^2\beta^2 y_3^2\right)\cdot\left(\alpha^2\beta^2 y_2^2+\alpha^2\beta^2\gamma^2 y_4^2\right)\cdot|\alpha\beta\gamma y_5| =$$

$$= \frac{\alpha^5\beta^3\gamma}{4}\cdot\left(y_1^2+\beta^2 y_4^2\right)\left(y_2^2+\gamma^2 y_4^2\right)|y_5| =$$

$$= \frac{\alpha^5\beta^5\gamma^3}{4}\cdot\left(\frac{y_1^2}{\beta^2}+y_6^2\right)\left(\frac{y_2^2}{\gamma^2}+y_4^2\right)|y_5|.$$

Докажем, что $\max f_{5,2} \le 1$.

Аналогично доказательству теоремы 22 отмечаем, что $|y_1| = 1$ и приходим к ограничениям

$$|y_2+y_3| \le 2, \qquad |y_2-y_3| \le 2, \qquad |y_4+y_5| \le 2, \qquad |y_4-y_5| \le 2, \tag{51}$$

то есть

$$f^*_{5,2} = \frac{\alpha^5\beta^5\gamma^3}{4}\cdot\left(\frac{1}{\beta^2}+y_3^2\right)\left(\frac{y_2}{\gamma^2}+y_4^2\right)|y_5| = \frac{\alpha^5\beta^5\gamma^3}{4}\cdot F_2(y_2,y_3,y_4,y_5),$$

где

$$F_2(a,b,c,d) = \left(\frac{1}{\beta^2} + b^2\right)\left(\frac{a^2}{\gamma^2} + c^2\right)|d|.$$

В силу теоремы (21)

$$\max F_2(a,b,c,d) = \frac{64\left(5\sqrt{5}-9\right)}{27},$$

при ограничениях (51). Тогда

$$f^*_{5,2} \leq \frac{\alpha^5\beta^5\gamma^3}{4}\cdot\frac{64\left(5\sqrt{5}-9\right)}{27} = \frac{\left(7-3\sqrt{5}\right)^2}{4}\sqrt{\frac{\left(7-3\sqrt{5}\right)\left(134+60\sqrt{5}\right)}{27}}\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{\left(10\sqrt{5}-22\right)^2\sqrt{10\sqrt{5}-22}}\cdot\frac{27}{26+10\sqrt{5}}\sqrt{\frac{27}{26+10\sqrt{5}}}\cdot\frac{64\left(5\sqrt{5}-9\right)}{27} =$$

$$= \frac{16\left(49-42\sqrt{5}+45\right)\left(5\sqrt{5}-9\right)}{\left(500-440\sqrt{5}+484\right)\left(26+10\sqrt{5}\right)}\cdot\sqrt{\frac{\left(7-3\sqrt{5}\right)\left(134+60\sqrt{5}\right)}{\left(10\sqrt{5}-22\right)\left(26+10\sqrt{5}\right)}} =$$

$$= \frac{32\left(47-21\sqrt{5}\right)\left(5\sqrt{5}-9\right)}{16\left(123-55\sqrt{5}\right)\left(13+5\sqrt{5}\right)}\cdot\sqrt{\frac{938+420\sqrt{5}-402\sqrt{5}-900}{4\left(5\sqrt{5}-11\right)\left(13+5\sqrt{5}\right)}} =$$

$$= \frac{2\left(235\sqrt{5}-525-423+189\sqrt{5}\right)}{1599-715\sqrt{5}+615\sqrt{5}-1375}\cdot\sqrt{\frac{2\left(19+9\sqrt{5}\right)}{4\left(65\sqrt{5}+125-143+55\sqrt{5}\right)}} =$$

$$= \frac{2\left(424\sqrt{5}-948\right)}{224-100\sqrt{5}}\cdot\sqrt{\frac{2\left(19+9\sqrt{5}\right)}{4\left(10\sqrt{5}-18\right)}} = \frac{2\left(106\sqrt{5}-237\right)}{56-25\sqrt{5}}\cdot\sqrt{\frac{19+9\sqrt{5}}{4\left(5\sqrt{5}-9\right)}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\left(106\sqrt{5}-237\right)^2\left(19+9\sqrt{5}\right)\left(5\sqrt{5}+9\right)}{\left(56-25\sqrt{5}\right)^2\left(5\sqrt{5}-9\right)\left(5\sqrt{5}+9\right)}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\left(56180-50244\sqrt{5}+56169\right)\left(95\sqrt{5}+171+225+81\sqrt{5}\right)}{\left(3136-2800\sqrt{5}+3125\right)\cdot 44}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\left(112349-50244\sqrt{5}\right)\left(396+176\sqrt{5}\right)}{44\left(6261-2800\sqrt{5}\right)}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\left(112349-50244\sqrt{5}\right)\left(9+4\sqrt{5}\right)\left(6261+2800\sqrt{5}\right)}{\left(6261-2800\sqrt{5}\right)\left(6261+2800\sqrt{5}\right)}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\left(112349 - 50244\sqrt{5}\right)\left(56349 + 25044\sqrt{5} + 25200\sqrt{5} + 56000\right)}{39200121 - 39200000}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\left(112349 - 50244\sqrt{5}\right)\left(112349 + 50244\sqrt{5}\right)}{121}} =$$

$$= \sqrt{\frac{12622297801 - 12622297680}{121}} = \sqrt{\frac{121}{121}} = 1.$$

Теорема доказана. □

4.5. Оценка для $V_{6,3}$

Теорема 25.

$$V_{6,3} \geq \frac{9 + 5\sqrt{5}}{11} \approx 1.83458.... \tag{52}$$

Доказательство.

Доказательство будем проводить аналогично теореме 22. В качестве матрицы A_n рассмотрим

$$A_6 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha\beta & \alpha\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha\beta & \alpha\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha\beta & \alpha\beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha\beta & \alpha\beta \end{pmatrix},$$

где

$$\alpha = \sqrt[6]{\frac{8\left(30\sqrt{5} - 67\right)}{11}}, \qquad \beta = \sqrt{\frac{1}{10\sqrt{5} - 22}},$$

откуда

$$V_{6,3} \geq \det A_6 = \alpha^2 \cdot 2\alpha^2\beta^2 \cdot 2\alpha^2\beta^2 = 4 \cdot \alpha^6 \cdot \beta^4 =$$

$$= 4 \cdot \frac{8\left(30\sqrt{5} - 67\right)}{11} \cdot \frac{1}{\left(10\sqrt{5} - 22\right)^2} = \frac{32\left(30\sqrt{5} - 67\right)}{11\left(500 - 440\sqrt{5} + 484\right)} = \frac{4\left(30\sqrt{5} - 67\right)}{11\left(123 - 55\sqrt{5}\right)} =$$

$$= \frac{4\left(30\sqrt{5} - 67\right)\left(123 + 55\sqrt{5}\right)}{11\left(123^2 - 55^2 \cdot 5\right)} = \frac{4\left(3690\sqrt{5} + 8250 - 8241 - 3684\sqrt{5}\right)}{11\left(15129 - 15125\right)} = \frac{9 + 5\sqrt{5}}{11}.$$

Тогда задача (45) примет вид

$$f_{6,3} = \frac{1}{8}(x_1^2 + x_4^2)(x_2^2 + x_5^2)(x_3^2 + x_6^2) =$$

$$= \frac{1}{8}(\alpha^2 y_1^2 + \alpha^2\beta^2 y_4^2) \cdot (\alpha^2 y_2^2 + \alpha^2\beta^2 y_5^2) \cdot (\alpha^2\beta^2 y_3^2 + \alpha^2\beta^2 y_6^2) \to \max,$$

$$|y_1| \le 1, \qquad |y_2| \le 1,$$

$$|y_3 + y_4| \le 2, \qquad |y_3 - y_4| \le 2,$$

$$|y_5 + y_6| \le 2, \qquad |y_5 - y_6| \le 2.$$

Заметим, что

$$f_{6,3} = \frac{1}{8}(\alpha^2 y_1^2 + \alpha^2\beta^2 y_4^2) \cdot (\alpha^2 y_2^2 + \alpha^2\beta^2 y_5^2) \cdot (\alpha^2\beta^2 y_3^2 + \alpha^2\beta^2 y_6^2) =$$

$$= \frac{\alpha^6}{8} \cdot (y_1^2 + \beta^2 y_4^2)(y_2^2 + \beta^2 y_5^2)(\beta^2 y_3^2 + \beta^2 y_6^2) =$$

$$= \frac{\alpha^6\beta^6}{8} \cdot \left(\frac{y_1^2}{\beta^2} + y_6^2\right)\left(\frac{y_2^2}{\beta^2} + y_5^2\right)\left(y_3^2 + y_6^2\right).$$

Докажем, что $\max f_{6,3} \le 1$.

Аналогично доказательству теоремы 22 отмечаем, что $|y_1| = |y_2| = 1$ и приходим к ограничениям

$$|y_3 + y_4| \le 2, \qquad |y_3 - y_4| \le 2, \qquad |y_5 + y_6| \le 2, \qquad |y_5 - y_6| \le 2, \tag{53}$$

то есть

$$f^*_{6,3} = \frac{\alpha^6\beta^6}{8} \cdot \left(\frac{1}{\beta^2} + y_4^2\right)\left(\frac{1}{\beta^2} + y_5^2\right)\left(y_3^2 + y_6^2\right) = \frac{\alpha^6\beta^6}{8} \cdot F_3(y_3, y_4, y_5, y_6),$$

где

$$F_3(a, b, c, d) = \left(\frac{1}{\beta^2} + a^2\right)\left(\frac{1}{\beta^2} + c^2\right)(b^2 + d^2).$$

В силу теоремы (20)

$$\max F_3(a, b, c, d) = 64(56 - 25\sqrt{5}).$$

при ограничениях (53). Тогда

$$f^*_{6,3} \le \frac{\alpha^6\beta^6}{8} \cdot 64(56 - 25\sqrt{5}) = \frac{8\left(30\sqrt{5} - 67\right)}{11 \cdot 8 \cdot \left(10\sqrt{5} - 22\right)^3} \cdot 64(56 - 25\sqrt{5}) =$$

$$= \frac{64\left(30\sqrt{5} - 67\right)\left(56 - 25\sqrt{5}\right)}{11\left(10\sqrt{5} - 22\right)^3} = \frac{64\left(1680\sqrt{5} - 3750 - 3752 + 1675\sqrt{5}\right)}{11\left(5000\sqrt{5} - 33000 + 14520\sqrt{5} - 10648\right)} =$$

$$= \frac{214720\sqrt{5} - 480128}{214720\sqrt{5} - 480128} = 1.$$

Теорема доказана. □

4.6. Оценка для наибольших параллелепипедов произвольной размерности

Рассмотрим следующую общую оценку для $V_{n,[n/2]}$.

Теорема 26. *Имеет место оценка*

$$V_{n,[n/2]} \geq T_n \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{2[(n-3)/4]}, \qquad n > 2,$$

где

$$T_n = \max \begin{cases} 2, & \text{если } n \equiv 3(\mod 4), \\ \frac{16}{9} \approx 1.77777..., & \text{если } n \equiv 0(\mod 4), \\ \sqrt{\frac{27\left(9+5\sqrt{5}\right)}{88}} \approx 2.48831..., & \text{если } n \equiv 1(\mod 4), \\ \frac{9+5\sqrt{5}}{11} \approx 1.83458..., & \text{если } n \equiv 2(\mod 4). \end{cases}$$

Доказательство.

- Будем доказывать каждую оценку отдельно.
- При $n \equiv 0(\mod 4)$ из неравенства (21) следует, что

$$V_{4k,2k} \geq (V_{4,2})^k = \left(\frac{16}{9}\right)^k = \left(\frac{4}{3}\right)^{2k}.$$

- При $n \equiv 3(\mod 4)$ аналогично имеем

$$V_{4k-1,2k-1} \geq V_{3,1} \cdot (V_{4,2})^{k-1} = 2\left(\frac{16}{9}\right)^{k-1} = 2\left(\frac{4}{3}\right)^{2(k-1)}.$$

- При $n \equiv 1(\mod 4)$ аналогично имеем

$$V_{4k+1,2k} \geq V_{5,2} \cdot (V_{4,2})^{k-1} = \sqrt{\frac{27\left(9+5\sqrt{5}\right)}{88}}\left(\frac{16}{9}\right)^{k-1} = \sqrt{\frac{27\left(9+5\sqrt{5}\right)}{88}}\left(\frac{4}{3}\right)^{2(k-1)}.$$

- При $n \equiv 2(\mod 4)$ аналогично имеем

$$V_{4k+2,2k+1} \geq V_{6,3} \cdot (V_{4,2})^{k-1} = \frac{9+5\sqrt{5}}{11}\left(\frac{16}{9}\right)^{k-1} = \frac{9+5\sqrt{5}}{11}\left(\frac{4}{3}\right)^{2(k-1)}.$$

Теорема доказана. □

Замечание 1. *В случае* $n \equiv 0(\mod 4)$ *оценка совпадает с оценкой Красса (22).*

В случае $n \equiv 3(\mod 4)$ *оценка Красса имеет вид*

$$V_{4k-1,2k-1} > (16/9)^{[(4k-1)/4]} = (16/9)^{k-1},$$

то есть полученная нами оценка вдвое улучшает оценку Красса.

В случае $n \equiv 1(\mod 4)$ *оценка Красса имеет вид*

$$V_{4k+1,2k} > (16/9)^{[(4k+1)/4]} = (16/9)^{k}.$$

Полученная оценка несколько улучшает оценку Красса, так как

$$\sqrt{\frac{27\left(9+5\sqrt{5}\right)}{88}} \approx 2.48831... > 1.77777... \approx \frac{16}{9}.$$

В случае $n \equiv 2(\mod 4)$ *оценка Красса имеет вид*

$$V_{4k+2,2k+2} > (16/9)^{[(4k+2)/4]} = (16/9)^{k}.$$

Полученная оценка несколько улучшает оценку Красса, так как

$$\frac{9+5\sqrt{5}}{11} \approx 1.83458... > 1.77777... \approx \frac{16}{9}.$$

5. О решетках наилучших совместных диофантовых приближений

Из теоремы 14 следует, что каждой оценке константы наилучших совместных диофантовых приближений можно сопоставить допустимую решетку, не имеющую внутри звездного тела $\mathbb{F}_n$ ни одной точки, отличной от нуля. Рассмотрим эти решетки и их свойства.

5.1. Случай $n = 1$

В одномерном случае звездное тело Дэвенпорта имеет вид

$$\mathbb{F}_1 : |x_0 x_1| < 1. \tag{54}$$

В [69] показано, что допустимой для (54) является решетка, порожденная чисто-вещественным квадратичным полем. Значение определителя такой решетки равно корню квадратному из дискриминанта соответствующего поля. Критической решеткой будет решетка с минимальным дискриминантом. В одномерном случае она (назовем ее Λ_1) соответствует полю, порожденному многочленом $x^2 - x + 1$. Базис Λ_1

$$\overrightarrow{a_1} = (1,\, 1), \quad \overrightarrow{a_2} = (\varphi_1,\, \varphi_2),$$

где $\varphi_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \varphi_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ корни уравнения $x^2 - x + 1 = 0$.

Дискриминант этого поля равен 5, а $d(\Lambda_1) = \sqrt{5}$, что в силу (12) дает известную оценку $C_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Остановимся подробнее на свойствах полученной решетки. Введем ряд понятий [45].

Определение 9. *Точка $\overrightarrow{x} \neq \overrightarrow{0}$ называется делителем нуля, если у неё есть координаты равные 0.*

Определение 10. *Решётка, не содержащая делителей нуля, называется неприводимой.*

Лемма 2. *Любая допустимая для звездного тела $\mathbb{F}_n$ решетка является неприводимой.*

Доказательство. Предположим обратное. Пусть существует точка $\overrightarrow{x^*}$ допустимой решетки Λ такая, что хотя бы одна ее координата равна 0. Тогда

$$F^{n+1}(\overrightarrow{x^*}) = |x_0^*| \max_{1 \le i \le n} |x_i^*|^n = 0$$

и точка $\overrightarrow{x^*}$ находится внутри тела $\mathbb{F}_n$, что противоречит тому, что решетка Λ – допустимая. Значит такой точки $\overrightarrow{x^*}$ не существует и решетка Λ – неприводимая. $\square$

5.2. Минимальные дискриминанты некоторых алгебраических полей

Как отмечалось выше, для вопроса построения критических решеток вызывает интерес задача поиска алгебраического поля данной размерности n с s парами комплексно сопряженных чисел с минимальным дискриминантом. Известно достаточно много таких значений $\Delta_{n,s}$ [97], однако решение такого рода задач достаточно трудоемко. Основы методов вычисления $\Delta_{n,s}$ заложили Й. Майер [82], Дж. Гюнтер [71]. Обширные результаты есть у А. М. Одлызко [91]. В настоящее время большую работу в этом направлении проводят Ю. Клюнерс и Г. Малле [74, 97]. Они построили большую базу данных алгебраических полей степени вплоть до 19.

Приведем некоторые значения $\Delta_{n,[n/2]}$ (со знаком) [82, 71, 91, 97], которые будут нас интересовать для дальнейших оценок C_n.

Степень поля $(n+1)$	$\Delta_{n,[n/2]}$	Разложение $\Delta_{n,[n/2]}$	Многочлен, порождающий поле с дискриминантом $\Delta_{n,[n/2]}$
4	-275	$-5^2 \cdot 11$	x^4-2x^3+x-1
5	$1\,609$	1609	$x^5-x^4-x^3+x^2-1$
6	$28\,037$	$23^2 \cdot 53$	$x^6+3x^5+x^4-2x^3-x-1$
7	$-184\,607$	$-184\,607$	$x^7-x^6-x^5+x^3+x^2-x-1$
8	$-4\,286\,875$	$-5^4 \cdot 19^3$	$x^8-x^7+x^5-2x^4-x^3+2x^2+2x-1$
9	$29\,510\,281$	$101 \cdot 292\,181$	$x^9-3x^8+6x^7-8x^6+7x^5-$ $-3x^4+2x^2-2x+1$
10	$-209\,352\,647$	$-7^2 \cdot 23 \cdot 431^2$	$x^{10}-2x^9+3x^8-5x^7+9x^6-12x^5+$ $+13x^4-11x^3+7x^2-3x+1$
11	$-5\,939\,843\,699$	$-12\,917 \cdot 459\,847$	$x^{11}+x^9-2x^8-2x^7-x^6+$ $+3x^4+x^3+x^2-1$

5.3. Случай n от 2 до 4

Для размерности $n=2$ ситуация усложняется. Звездное тело Дэвенпорта принимает вид

$$\mathbb{F}_2 : |x_0| \max_{i=1,2} |x_i|^2 < 1,$$

что, как уже отмечалось ранее, делает вычисление критического определителя проблематичным. Для построения хорошей допустимой решетки следует воспользоваться описанным ранее подходом Дж. В. С. Кассела (см. теорему 16).

Возьмем решетку $\Lambda_2^{(0)}$, соответствующую алгебраическому полю, порожденному многочленом

$$x^3 - x^2 - 2x + 1. \qquad (55)$$

Дискриминант этого поля равен 49, а базис решетки

$$\overrightarrow{a_1} = (1,\, 1,\, 1), \quad \overrightarrow{a_2} = (\omega_1,\, \omega_2,\, \omega_2), \quad \overrightarrow{a_3} = (\omega_1^2,\, \omega_3^2,\, \omega_3^2),$$

где $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ – корни уравнения (55).

Как отмечалось ранее (см. 1.4.), $V_{2,0} = 2$. Этому значению соответствует, например, параллелепипед с вершинами в точках $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(0, -1)$, $(-1, 0)$. Он получается из единичного квадрата с помощью преобразования

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, нам надо применить к решетке $\Lambda_2^{(0)}$ следующее преобразование

$$M_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Мы получим решетку Λ_2 с базисом

$$\overrightarrow{a_1} = (1,\, 0,\, 1), \quad \overrightarrow{a_2} = \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2},\, \frac{\omega_2 - \omega_1}{2},\, \omega_3\right), \quad \overrightarrow{a_3} = \left(\frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2},\, \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{2},\, \omega_3^2\right)$$

и определителем $d(\Lambda_2) = \det M_2 \cdot \sqrt{49} = \frac{7}{2}$. Это дает оценку константы наилучших совместных диофантовых приближений $C_2 \geq \frac{2}{7}$.

Для размерности $n = 3$ звездное тело Дэвенпорта имеет вид

$$\mathbb{F}_3 : |x_0| \max_{i=1,3} |x_i|^3 < 1.$$

Допустимая неприводимая решетка Λ_3 получается из решетки алгебраического поля (дискриминант равен 275), порожденного многочленом

$$x^4 - 2x^3 + x - 1 \qquad (56)$$

применением преобразования

$$M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

.

Базис решетки Λ_3

$$\overrightarrow{a_{i+1}} = \left(\omega_1^i,\ \frac{\omega_2^i+\omega_3^i}{2},\ \frac{\omega_3^i-\omega_2^i}{2},\ \omega_4^i\right), \quad i=\overline{0,3}$$

где $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ – корни уравнения (56). Определитель этой решетки равен

$$d(\Lambda_3) = \det M_3 \cdot \sqrt{275} = \frac{\sqrt{275}}{2}.$$

Соответствующая оценка константы наилучших совместных диофантовых приближений имеет вид $C_3 \geq \frac{2}{\sqrt{275}}$.

Для размерности $n=4$ возьмем решетку $\Lambda_4^{(0)}$, соответствующую алгебраическому полю, порожденному многочленом

$$x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - 1. \tag{57}$$

Применив преобразование

$$M_4 = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

получим решетку Λ_4 с базисом

$$\overrightarrow{a_{i+1}} = \left(\sqrt{\frac{3}{2}}\omega_1^i,\ \sqrt{\frac{3}{2}}\omega_2^i,\ \frac{\sqrt{3}}{4}(\omega_3^i+\omega_4^i),\ \frac{\sqrt{3}}{4}(\omega_4^i-\omega_3^i),\ \omega_5^i\right), \quad i=\overline{0,4}$$

где $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5$ – корни многочлена (57). Определитель решетки Λ_4 равен

$$d(\Lambda_4) = \det M_4 \cdot \sqrt{1609} = \frac{9\sqrt{1609}}{16}.$$

Соответствующая оценка константы наилучших совместных диофантовых приближений имеет вид $C_4 \geq \frac{16}{9\sqrt{1609}}$.

5.4. Случай $n = 5$ и 6

Рассмотрим полученные ранее в теоремах 24 и 25 результаты в терминах решеток.

Для $n = 5$ возьмем решетку $\Lambda_5^{(0)}$, соответствующую алгебраическому полю, порожденному многочленом

$$x^6 + 3x^5 + x^4 - 2x^3 - x - 1. \tag{58}$$

Применив преобразования

$$M_5 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha\beta/\sqrt{2} & \alpha\beta/\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha\beta/\sqrt{2} & \alpha\beta/\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha\beta\gamma & \alpha\beta\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha\beta\gamma & \alpha\beta\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где

$$\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{7+3\sqrt{5}} \cdot \sqrt[10]{\frac{27}{134+60\sqrt{5}}}, \quad \beta = \sqrt{5\sqrt{5}-11}, \quad \gamma = \sqrt{\frac{13+5\sqrt{5}}{27}},$$

получим решетку Λ_5 с базисом

$$\overrightarrow{a_{i+1}} = \left(\alpha\omega_1^i,\, \frac{\alpha\beta}{\sqrt{2}}(\omega_2^i + \omega_2^i),\, \frac{\alpha\beta}{\sqrt{2}}(\omega_3^i - \omega_2^i),\, \alpha\beta\gamma(\omega_4^i + \omega_5^i),\, \alpha\beta\gamma(\omega_5^i - \omega_4^i),\, \omega_6^i\right),$$

где $i = \overline{0,5}$, ω_{i+1} – корни многочлена (58).

Определитель этой решетки равен

$$d(\Lambda_5) = \det M_5 \cdot \sqrt{28\,037} = \frac{46}{3}\sqrt{\frac{1166}{3\left(9+5\sqrt{5}\right)}}.$$

Соответствующая оценка константы наилучших совместных диофантовых приближений имеет вид $C_5 \geq \frac{3}{46}\sqrt{\frac{3\left(9+5\sqrt{5}\right)}{1166}}$.

Для $n = 6$ возьмем решетку $\Lambda_6^{(0)}$, соответствующую алгебраическому полю, порожденному многочленом

$$x^7 - x^6 - x^5 + x^3 + x^2 - x - 1. \tag{59}$$

Применив преобразование

$$M_6 = \begin{pmatrix} \sqrt[6]{2}\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt[6]{2}\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha\beta & \alpha\beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha\beta & \alpha\beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha\beta & \alpha\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha\beta & \alpha\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где

$$\alpha = \sqrt[6]{\frac{11}{16\left(30\sqrt{5} - 67\right)}}, \quad \beta = \sqrt{5\sqrt{5} - 11},$$

получим решетку Λ_6 с базисом

$$\overrightarrow{a_{i+1}} = \left(\sqrt[6]{2}\alpha\omega_1^i,\ \sqrt[6]{2}\alpha\omega_2^i,\ \alpha\beta(\omega_3^i + \omega_4^i),\ \alpha\beta(\omega_4^i - \omega_3^i),\ \alpha\beta(\omega_5^i + \omega_6^i),\ \alpha\beta(\omega_6^i - \omega_5^i),\ \omega_7^i\right),$$

где $i = \overline{0, 6}$, ω_{i+1} – корни многочлена (59).

Определитель полученной решетки равен

$$d(\Lambda_6) = \det M_6 \cdot \sqrt{184\,607} = \frac{11\sqrt{184\,607}}{9 + 5\sqrt{5}}.$$

Соответствующая оценка константы наилучших совместных диофантовых приближений имеет вид $C_6 \geq \frac{9+5\sqrt{5}}{11\sqrt{184\,607}}$.

6. Заключение

Данная работа посвящена разработке нового подхода для оценки снизу константы наилучших диофантовых приближений.

В первой части был дан исторический обзор по проблеме оценки константы наилучших диофантовых приближений. С течением времени подходы, применяемые для решения этой задачи, претерпели серьезные изменения. Из алгебры (П. Г. Дирихле [62], А. Гурвиц [72], Ф. Фуртвенглер [67, 68]) эта задача перешла в область геометрии чисел (Г. Дэвенпорт [61], Дж. В. С. Касселс [58]).

Стоит отметить такую интересную составляющую данной проблематики, как тесная взаимосвязь диофантовых приближений с геометрией чисел вообще и алгебраическими решетками в частности (Дж. В. С. Касселс [58], А. Д. Брюно [4, 5, 6]). Это уже дало новые возможности как для применения уже известных результатов, так и для применения новых подходов в проблеме наилучших диофантовых приближений (А. Д. Брюно[4, 5, 6], Н. Г. Мощевитин [34]). По всей видимости, в будущем взаимосвязь между этими направлениями будет только усиливаться.

Во второй части мы развили подходы к оценке константы наилучших диофантовых приближений, заложенные Г. Дэвенпортом [61], Дж. В. С. Касселсом [58], Т. Кьюзиком (см. [59]. Эти подходы основаны на оценке наибольшего значения $V_{n,s}$ – объема параллелепипеда с центром в начале координат, обладающего определенными свойствами (16). Применение новых идей в сочетании с эффективным использованием численных экспериментов позволило улучшить существующие оценки константы наилучших диофантовых приближений для $n = 5$ и $n = 6$.

В третьей части нами был решен ряд многомерных оптимизационных задач. При их решении мы достаточно активно использовали математический пакет `Wolfram Mathematica`. Эти результаты являются промежуточным шагом для доказательства в четвертой части данной работы оценок $V_{n,s}$. В пятой части мы конструируем на основе полученных значений $V_{n,s}$ решетки, являющиеся допустимыми для звездных тел Дэвенпорта. Это непосредственно дает оценки константы наилучших диофантовых приближений C_n для $n \geq 3$.

Отметим, что для получения более сильных оценок, скорее всего, потребуются принципиально новые подходы. Косвенным признаком этого может быть полученная нами в разделе 2.2. информация о том, что A_n^* можно представить в виде композиции A_{n-4}^* и A_4^*. В качестве возможного подхода по усилению оценок C_n снизу можно предложить непосредственную оценку значения критического определителя звездного тела $\mathbb{F}_n$. Это нетривиальная задача, но необходимо отметить, что в случае оценки сверху были получены достаточно обширные результаты [81, 87, 88, 89, 90, 34].

Другим направлением возможных исследований может стать применение предложенного в данной работе подхода для оценки критических определителей. Задача оценки критического определителя ограниченного тела достаточно схожа с задачей оценки $V_{n,s}$. Нам кажется, что сочетание численных и аналитических методов в описанном случае может дать определенные результаты в этом вопросе.

Список литературы

[1] Авдеева М. О., Быковский В. А., Аналог теоремы Валена для совместных приближений пары чисел // Матем. сб. 2003. Том 194. Вып. 7. С. 3–14.

[2] Брюно А. Д. , Парусников В. И. Многогранники Клейна для двух кубических форм Давенпорта // Матем. заметки. 1994. Том 56. С. 9–27.

[3] Брюно А. Д. , Парусников В. И. Сравнение разных обобщений цепных дробей // Матем. заметки. 1997. Том 61. С. 339–348.

[4] Брюно А. Д. Алгоритм обобщенной цепной дроби // Препринт N45. М.: ИПМ им. М.В.Келдыша. 2004.

[5] Брюно А. Д. Структура наилучших диофантовых приближений // ДАН. 2005. Том 402. Номер 4.

[6] Брюно А. Д. Алгоритм обобщенной цепной дроби // ДАН. 2005. Том 402. Номер 6.

[7] Брюно А. Д. Универсальное обобщение алгоритма цепной дроби // Чебышевский сборник. 2015. Том 16. С. 35–65.

[8] Брюно А. Д. Вычисление основных единиц числовых колец с помощью обобщенной цепной дроби / Программирование. 2019. Номер 2. С. 17–31.

[9] Быковский В. А., Фроленков Д. А., О средней длине конечных цепных дробей с фиксированным знаменателем // Матем. сб. 2017. Том 208. Вып. 5. С. 63–102.

[10] Венков Б. А. Об экстремальной проблеме Маркова для неопределенных тройничных квадратичных форм // Изв. АН СССР. 1945. Сер. матем., Том 9, вып. 6. С. 429–494

[11] Вороной Г. Ф. Об одном обобщении алгоритма непрерывных дробей // Вороной Г. Ф. Собрание сочинений. Т. 1. – Киев.: Изд-во АН Укр. ССР. 1952. С. 200–394.

[12] Вороной Г. Ф. О некоторых свойствах положительных совершенных квадратичных форм // Вороной Г. Ф. Собрание сочинений. Т. 2. – Киев.: Изд-во АН Укр. ССР. 1952. С. 174–241.

[13] Герман О. Н. Диофантовы экспоненты решеток // Совр. пробл. матем. 2016. Вып. 23. С. 35–42.

[14] Глазунов Н. М, Голованов А. С., Малышев А. В. Доказательство гипотезы Минковского о критическом определителе области $|x|^p + |y|^p < 1$ // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1986. вып. 151. С. 40–53.

[15] Горкуша О. А., Аппроксимация чисел Ω-дробями // Чебышевский сб. 2013. Том 14. Вып. 4. С. 95–100.

[16] Гришмановская К. И., Малышев А. В., Пачев У. М., Фидарова А. М. Доказательство гипотезы минковского о критическом определителе области $|x|^p+|y|^p < 1$ в случае $5 < p < 6$ // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1977. вып. 67. С. 95–107.

[17] Давлетярова Е. П., Жукова А. А., Шутов А. В., Геометризация обобщенных систем счисления Фибоначчи и ее приложения к теории чисел // Чебышевский сб. 2016. Том 17. Вып. 2. С. 88–112.

[18] Делоне Б. Н. О работе А. А. Маркова "О бинарных квадратичных формах положительного определители"// УМН. 1948. Том 3. Вып. 5. С. 3–5.

[19] Добровольский Н. М., Добровольский Н. Н. О минимальных многочленах остаточных дробей для алгебраических иррациональностей // Чебышевский сб. 2015. Том 16. Вып. 3. С. 147–182.

[20] Добровольский Н. М., Добровольский Н. Н., Соболев Д. К., Соболева В. Н. Классификация чисто-вещественных алгебраических иррациональностей // Чебышевский сб. 2017. Том 18. Вып. 2. С. 98–128.

[21] Журавлев В. Г., Периодические ядерные разложения единиц алгебраических полей в многомерные цепные дроби // Аналитическая теория чисел и теория функций, Зап. научн. сем. ПОМИ. 2016. Том 449. С. 84–129.

[22] Журавлев В. Г., Локализованные матрицы Пизо и совместные приближения алгебраических чисел // Аналитическая теория чисел и теория функций, Зап. научн. сем. ПОМИ. 2017. Том 458. С. 104–134.

[23] Журавлев В. Г., Наилучшие приближения алгебраических чисел многомерными цепными дробями // Алгебра и теория чисел, Зап. научн. сем. ПОМИ. 2019. Том 479. С. 52–84.

[24] Журавлев В. Г., Диофантовы приближения линейных форм // Алгебра и теория чисел, Зап. научн. сем. ПОМИ. 2020. Том 490. С. 5–24.

[25] Касселс Дж. В. С. Введение в теорию диофантовых приближений: Пер. с англ. – М.: Мир, 1961.

[26] Касселс Дж. В. С. Введение в геометрию чисел: Пер. с англ. – М.: Мир, 1965.

[27] Коркина Е. И., Двумерные цепные дроби. Самые простые примеры // Особенности гладких отображений с дополнительными структурами, Сборник статей, Тр. МИАН. 1995. Том 209, с. 143–166.

[28] Малышев А. В. Метод Морделла взаимных решеток в геометрии чисел // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1973. вып. 33. С. 97 – 115.

[29] Марков А. А. О бинарных квадратичных формах положительного определителя // Марков А. А. Избранные труды. – М.: Изд. АН СССР, 1951. С. 9–85.

[30] Марков А. А. О неопределенных тройничных квадратичных формах // Известия Императорской Академии Наук. 1901. Т. 14. вып. 5. С. 509–523.

[31] Марков А. А. О неопределенных квадратичных формах с четырьмя переменными // Известия Императорской Академии Наук. 1902. Т. 16. вып. 3. С. 97–108.

[32] Мощевитин. Н. Г. О совместных приближениях алгебраических чисел // Матем. заметки. 1992. Том 51. С. 72–80.

[33] Мощевитин. Н. Г. О совместных диофантовых приближениях. Векторы заданного диофантова типа // Матем. заметки. 1997. Том 61. С. 706–716.

[34] Мощевитин. Н. Г. К теореме Блихфельдта-Мюллендера-Спона о совместных приближениях // Тр. МИАН. 2002. Том 239. С. 268–274.

[35] Мощевитин. Н. Г. О наилучших двумерных совместных диофантовых приближениях в sup-норме // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех. 2005. Том 6. С. 50–53.

[36] Прасолов В. В. Многочлены. – М.: МЦНМО, 2001.

[37] Подсыпанин Е. В. Об одном обобщении алгоритма цепных дробей, связанном с алгоритмом Вигго Бруна // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1977. Том 67. С. 184–194.

[38] Подсыпанин Е. В. Количество целых точек в эллиптической области (замечание к одной теореме А. В. Малышева) // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1979. Том 82. С. 100–102.

[39] Скубенко Б. Ф. К гипотезе Минковского для $n = 5$ // Докл. АН СССР. 1972. Том 205. С. 1304–1305.

[40] Скубенко Б. Ф. Доказательство гипотезы Минковского о произведении n линейных неоднородных форм от n переменных для $n \leq 5$ // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1973. Том 33. С. 6–36.

[41] Скубенко Б. Ф. Новый вариант доказательства неоднородной гипотезы Минковского для $n = 5$ // Тр. МИАН СССР. 1976. Том 142. С. 240–253.

[42] Скубенко Б. Ф. К гипотезе Минковского при больших n // Тр. МИАН СССР. 1978. Том 148. С. 218–224.

[43] Скубенко Б. Ф. К совместным приближениям алгебраических иррациональностей // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1982. Том 116. С. 142–154.

[44] Скубенко Б. Ф. К обобщенной теореме Рота–Шмидта // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1984. Том 134. С. 226–231.

[45] Смирнова Е. Н., Пихтилькова О. А., Добровольский Н. Н., Добровольский Н. М.. Алгебраические решётки в метрическом пространстве решёток // , Чебышевский сборник, 2017, т. 18, вып. 4, с. 326–338.

[46] Хинчин А. Я. Метрические задачи теории иррациональных чисел // УМН. 1936. вып. 1. С. 7–32.

[47] Хинчин А. Я. Принцип Дирихле в теории диофантовых приближений // УМН. 1948. Т. 3. вып. 3. С. 3–28.

[48] Хинчин А. Я. Цепные дроби. – М.: Физматгиз, 1961.

[49] Чебышев П. Л. Об одном арифметическом вопросе.– СПб., 1866 // Чебышев П. Л. Избранные труды. – М.: Изд. АН СССР, 1955. С. 55–105.

[50] Чеботарев Н. Г. Заметки по алгебре и теории чисел. – Уч. зап. КГУ, 1934, // Чеботарев Н. Г. Собрание сочинений. Том 1. – М.-Л.: Изд. АН СССР, 1949. С. 208–221.

[51] Шмидт В. М. Диофантовы приближения: Пер. с англ. – М.: Мир, 1983.

[52] Шутов А. В., Локальные отклонения в проблеме распределения дробных долей линейной функции // Изв. вузов. Матем. 2017. № 2. С. 88–97.

[53] Adams W. W. Simultaneous Diophantine approximations and cubic irrationals // Pacific journal of mathematics. 1969. Vol. 30. No. 1. P. 1–14.

[54] Adams W. W. The best two-dimensional diophanite approximation constant for cubic irrtionals // Pacific journal of mathematics. 1980. Vol. 91. No. 1. P. 29–30.

[55] Barber C. B., Dobkin D. P., Huhdanpaa H. T., The Quickhull algorithm for convex hulls // ACM Trans. on Mathematical Software. 1996. Vol. 22. No. 4. P. 469–483.

[56] Bernstein L. A 3-Dimensional Periodic Jacobi-Perron Algorithm of Period Length 8 // Journal of Number Theory, 1972, Vol. 4, Issue 1. P. 48–69.

[57] Blichfeldt H. A new principle in the geometry of numbers, with some applications // Trans. Amer. Math. Soc. 1914. Vol. 15. P. 227–235.

[58] Cassels J. W. S. Simultaneous Diophantine approximation // J. London Math. Soc. 1955. Vol. 30. P. 119–121.

[59] Cusick T. W. Estimates for Diophantine approximation constants // Journal of Number Theory. 1980. Vol. 12 (4). P. 543–556

[60] Cusick J. W. The two dimensional diophanite approximation constant // Pacific journal of mathematics. 1983. Vol. 105 (1). P. 53–67.

[61] Davenport. H. On a theorem of Furtwängler // J. London Math. Soc. 1955. Vol. 30. P. 186–195.

[62] Dirichlet L. G. P. Verallgemeinerung eines Satzes aus der Lehre von den Kettenbruchen nebst einigen Anwendungen auf die Theorie der Zahlen // S. B. Preuss. Akad. Wiss. 1842, P. 93–95.

[63] Dobrovol'skii N. M., Balaba I. N., Rebrova I. Yu., Dobrovol'skii N. N., On Lagrange algorithm for reduced algebraic irrationalities // Bul. Acad. Stiinte Repub. Mold. Mat. 2016. No. 2. pp. 27–39.

[64] Euler L. De relatione inter ternas pluresve quantitates instituenda // Petersburger Akademie Notiz. Exhib. August 14, 1775 // Commentationes arithmeticae collectae. V. II. St. Petersburg. 1849. P. 99–104.

[65] Finch S .R. Mathematical Constants. Cambridge University Press, 2003 (Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Book 94).

[66] Fujita H. The minimum discriminant of totally real algebraic fields of degree 9 with cubic subfields // Mathematics of Computation. 1993. Vol. 60, No. 202. P. 801–810.

[67] Furtwängler H. Über die simulatene Approximation von Irrationalzahlen. I // Math. Ann. 1927. Vol. 96. P. 169–175.

[68] Furtwängler H. Über die simulatene Approximation von Irrationalzahlen. II // Math. Ann. 1928. Vol. 99. P. 71–83.

[69] Gruber. P. M., Lekkerkerker. C. G. Geometry of numbers. – Amsterdam: Elsevier Science Publishers, 1987.

[70] Hermite C. Sur une extension donnee a la theorie des fractions continues par M. Tchebychev // J. reine angew. Math. 1879. Vol. 88 P. 10-15.

[71] Hunter J. The minimum discriminant of quintic fields // Proc. Glasgow Math. Assoc. 1957. Vol. 3. P. 57–67.

[72] Hurwitz A. Über die angenaherte Darstellung der Irrationalzahlen durch rationaleBriiche // Math. Ann. 1891. Vol. 39. P. 279–284.

[73] Jacobi C. G. J. Allgemeine Theorie der Kettenbruchanlichen Algorithmen, in welchenjede Zahl aus drei vorhergehenden gebildet wird // J. Reine Angew. Math. 1868. Vol. 69. P. 29–64. // Gesammelte Werke, Bd. IV. Berlin: Reimer. 1891. P. 385–426.

[74] Klüners J., Malle G. A Database for Field Extensions of the Rationals. LMS Journal of Computation and Mathematics. 2001. Vol. 4. P. 182–196.

[75] Koksma J., Meulenbeld B. Sur le theoreme de Minkowski, concernant un systeme de formes lineaires reelles. I, II, III, IV // Kon. Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Sect. Sci. 1942. Vol. 45. P. 256–262, 354–359, 471–478, 578–584.

[76] Korkine A., Zolotareff G. Sur les formes quadratiques // Mathematische Annalen. 1873. Vol. 6. P. 366–389.

[77] Krass S. Estimates for n-dimensional Diophantine approximation constants for $n \geq 4$ // J. Number Theory. 1985. Vol. 20 (2). P. 172-176.

[78] Krass S. The N-dimensional diophantine approximation constants // Australian Mathematical Society. 1985. Vol 32 (2). P. 313–316.

[79] Lagarias J. S. Best simultaneous Diophantine approximation I. Growth rates of best approximation denominators // Trans. Amer. Math. Soc. 1982. Vol. 272. P. 545–554.

[80] Lanker M., Petek P., Rugeji M. S. The continued fractions ladder of specific pairs of irrationals // arXiv.org. 2011. Дата обновления: 30.06.2011. URL: https://arxiv.org/abs/1108.0087 (дата обращения: 10.04.2019).

[81] Mack J. M. Simultaneous Diophantine approximation // J. Austral. Math. Soc. A. 1977. Vol. 24. P. 266–285.

[82] Mayer J. Die absolut-kleinsten Diskriminanten der biquadratischen Zahlkorper // S.-B. Akad. Wiss. Wien Abt. Ila. 1929. Vol. 138. P. 733–742.

[83] Minkovski H. Geometrie der Zahlen. Berlin: Teubner, 1896.

[84] Mordell L. Lattice points in some n-dimensional non-convex regions. I, II // Kon. Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Sect. Sci. 1946. Vol. 49. P. 773–781, 782–792.

[85] Mullender P. Lattice points in non-convex regions. I // Kon. Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Sect. Sci. 1948. Vol. 51. P. 874–884.

[86] Murru N. On the Hermite problem for cubic irrationaliti // arXiv.org. 2013. Дата обновления: 16.01.2014. URL: https://arxiv.org/abs/1305.3285v3 (дата обращения: 10.04.2019).

[87] Nowak W. G. A note on simultaneous Diophantine approximation // Manuscr. Math. 1981. Vol. 36. P. 33–46.

[88] Nowak W. G. A remark concerning the s-dimensional simultaneous Diophantine approximation constants // Graz. Math. Ber. 1993. Vol. 318. P. 105–110.

[89] Nowak W. G. Lower bounds for simultaneous Diophantine approximation constants. // Comm. Math. 2014. Vol. 22, Is. 1, P. 71–76.

[90] Nowak W. G. Simultaneous Diophantine approximation: Searching for analogues of Hurwitz's theorem // In: T.M. Rassias and P.M. Pardalos (eds.), Essays in mathematics and its applications. Springer/ Switzerland. 2016. P. 181–197.

[91] Odlyzko A. M. Bounds for discriminants and related estimates for class numbers, regulators and zeros of zeta functions : a survey of recent results // Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux. 1990. Tome 2. No. 1. P. 119–141.

[92] Perron O. Grundlagen fur eine Theorie des Jacobischen Ketten-bruchalgorithmus // Math. Ann. 1907. Vol. 64. P. 1-76.

[93] Schmidt W. M. Simultaneous approximation to algebraic numbers by rationals // Acta Math. 1970. Vol. 125. P. 189–201.

[94] Spohn W. G. Blichfeldt's theorem and simultaneous Diophantine approximation // Amer. J. Math. 1968. Vol. 90. P. 885–894.

[95] Szekers G. The n-dimensional approximation constant // Bull. Austral. Math. Soc. 1984. Vol. 29. P. 119–125.

[96] Woods A. C. The asymetric product of three homogenous linear forms // Pacific J. Math. 1981. Vol. 93. P. 237–250.

[97] A Database for Number Fields // A Database for Number Fields. URL: http://galoisdb.math.upb.de/ (дата обращения: 05.05.2018).

Работы автора по теме диссертации

[98] Басалов Ю. А. Геометрическая интерпретация проблемы наилучших диофантовых приближений // V всероссийская научно-практическая конференция ППС, аспирантов, магистрантов, соискателей ТГПУ им. Л. Н. Толстого «Университет XXI века: исследования в рамках научных школ». 2015.

[99] Басалов Ю. А. О наилучших приближениях кубических иррациональностей // Всероссийская научно-практическая конференция «Университет XXI века: научное измерение». 2016.

[100] Реброва И.Ю., Добровольский Н.М., Добровольский Н.Н., Балаба И.Н., Есаян А.Р., Басалов Ю.А., Басалова А.Н., Лямин М.И., Родионов А.В. Теоретико-числовой метод в приближенном анализе и его реализация в ПОИВС «ТМК» - II // Тула: Изд-во Тул. гос.пед.ун-та им. Л.Н.Толстого, 2017.

[101] Басалов Ю.А. Компьютерное моделирование и неполные частные кубических иррациональностей // IV международная конференция «Многомасштабное моделирование структур, строение вещества, наноматериалы и нанотехнологии». ТГПУ им. Л. Н. Толстого. 2017. С. 97-100.

[102] Basalov Yu. A. On estimating the constant of simultaneous Diophantine approximation // arXiv.org. 2019. Дата обновления: 09.04.2019. URL: https://arxiv.org/abs/1804.05385 (дата обращения: 10.04.2019).

[103] Басалов Ю. А. Об оценке константы наилучших диофантовых приближений для n > 4 // XV Международная конференция Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения, посвященной столетию со дня рождения профессора Коробова Николая Михайловича. 2018. С. 245-248.

[104] Басалов. Ю. А. Об истории оценок константы наилучших совместных диофантовых приближений // Чебышевский сборник. 2018. Т. 19. Вып. 2. С. 388-405. https://doi.org/10.22405/2226-8383-2018-19-2-394-411

[105] Басалов Ю. А. О методах оценки снизу константы совместных диофантовых приближений // Материалы Международного молодежного научного форума "ЛОМОНОСОВ-2019"/ Отв. ред. И. А. Алешковский, А. В. Андриянов, Е. А. Антипов. [Электронный ресурс]. – М: МАКС Пресс, 2019. – 1 электрон. опт. диск (DVD-ROM); 12 см. – Систем. требования: ПК с процессором 486+; Windows 95; дисковод DVD-ROM; Adobe Acrobat Reader. – 1600 Мб. – 11000 экз.

[106] Басалов Ю. А. О методах оценок критических определителей // Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории: Материалы XVI Междунар. Конф., посвященной 80-летию со дня рождения профессора Мишеля Деза.– Тула: Тул. гос. пед. ун-т им. Л. Н. Толстого, 2019. С. 227-228.

[107] Басалов. Ю. А. Оценка константы наилучших диофантовых приближений для n=5 и n=6 // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, Вып. 1. С. 66–81. https://doi.org/10.22405/2226-8383-2018-20-1-66-81

[108] Басалов Ю. А. О методике оценки критических определителей в рамках вопроса оценки константы совместных диофантовых приближений. Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, Вып. 1. С. 22–38. https://doi.org/10.22405/2226-8383-2019-20-2-22-38

[109] Басалов Ю. А. Оценки константы совместных диофантовых приближений // Чебышевский сборник. Т. 20, Вып. 3, 2019, С. 405-429. https://doi.org/10.22405/2226-8383-2019-20-3-405-429

[110] Басалов Ю. А. О русской научной школе диофантовых приближений // Чебышевский сборник. Т. 21, Вып. 1, 2020, С. 388-403. https://doi.org/10.22405/2226-8383-2020-21-1-388-403

[111] Басалов Ю. А. О решетках наилучших совместных диофантовых приближений // Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории: Материалы XVIII Международной конференции, посвящённой столетию со дня рождения профессоров Б. М. Бредихина, В. И. Нечаева и С. Б. Стечкина. — Тула: Тул. гос. пед. ун-т им. Л. Н. Толстого, 2020. – с. 237-241.

Приложение 1

Программа для численного нахождения наибольших значений $V_{n,s}$ на математическом пакете `Wolfram Mathematica`.

```
logMessage = Function[{logFile, params, console},
     s = StringJoin[Map[Function[s, If[StringQ[s], s, ToString[s, InputForm]]],
          Prepend[params, DateString[] <> " - "]]];
     w = OpenAppend[logFile, PageWidth -> 1000];
     Write[w, s];
     Close[w];
     If[console, Print[s]];
 ];

isCubeVerticesInsidedF = Function[{vertices2, f},
     inside = True;

     Do[
          inside = If[inside,
               w = Apply[f, x];
               Abs[w] <= 1,
               False];
     , {x, vertices2}];

     inside
];

isCubeDiagonalsInsidedF = Function[{vertices2, f},
     stepT = 0.3;
     verticesCount = Length[vertices2];

     inside = True;
     m = 0;
     Do[
          Do[
               v1 = vertices2[[i]];
               v2 = vertices2[[j]];
               d = v2 - v1;
               Do[
                    x = v1 + d*t;
                    inside = If[inside,
                         w = Apply[f, x];
                         Abs[w] <= 1,
                         False];
               , {t, 0, 1, stepT}];
          , {j, i + 1, verticesCount}];
     , {i, 1, verticesCount}];

     inside
];

getMaxF = Function[{transform2, f, xParameter},
     n = Length[xParameter];
```

```
    m = transform2.xParameter;
    a = {Apply[f, xParameter]};
    Do[AppendTo[a, -1 <= m[[i]] <= 1], {i, Range[1, n]}];
    res1 = Check[
        NMaximize[a, xParameter, Method -> Automatic, AccuracyGoal -> 5, PrecisionGoal -> 5],
        NMaximize[a, xParameter, Method -> "DifferentialEvolution",
            AccuracyGoal -> 5, PrecisionGoal -> 5]];
    res2 = Check[
        NMinimize[a, xParameter, Method -> Automatic, AccuracyGoal -> 5, PrecisionGoal -> 5],
        NMinimize[a, xParameter, Method -> "DifferentialEvolution",
            AccuracyGoal -> 5, PrecisionGoal -> 5]];
    res = Max[res1[[1]], -res2[[1]]];
    res
];

isCubeInsideF = Function[{transform, f, compiledF, xParameter, cubeVertices},
    transform2 = Inverse[transform];
    vertices2 = Map[Function[x, transform.x], cubeVertices];
    inside = isCubeVerticesInsidedF[vertices2, compiledF];
    inside = If[inside, isCubeDiagonalsInsidedF[vertices2, compiledF], False];
    inside = If[inside,
        fMax = getMaxF[transform2, f, xParameter];
        fMax <= 1,
        False];
    inside
];

iteration = Function[{f, compiledF, minVolume, xParameter, getTransformMatrix,
        a, b, intervals, vars, logFile},
    n = Length[xParameter];
    h = Map[Function[i, (b[[i]] - a[[i]]) / (intervals - 1.0)], Range[1, vars]];
    range = intervals^vars;
    degreeOfParallelizm = If[range > 100000, $ProcessorCount - 1, 1];
    cubeVertices = Tuples[{-1,1}, n];

    coordsTransform = Function[point,
        Map[Function[i, a[[i]] + h[[i]]*point[[i]]], Range[1, vars]]
    ];

    getPoint = Function[i,
        t = i;
        point = {};
        Do[
            AppendTo[point, Mod[t, intervals]];
            t = Quotient[t, intervals];
        , {j, vars}];
        point
    ];

    partialRes = ParallelTable[
        maxVolume = minVolume;
        mPoint = {};
        prevPercent = 0;
        j = 0;
```

```
        prevJ = 0;
        tt1 = AbsoluteTime[];

        Do[
            point = getPoint[i];
            coords = coordsTransform[point];
            transform = getTransformMatrix[coords];
            det = Det[transform];
            If[det > maxVolume,
                inside = isCubeInsideF[transform, f, compiledF, xParameter, cubeVertices];
                volume = If[inside, det, 0];
                If[volume > 0,
                    maxVolume = volume;
                    mPoint = volume, point, coords;
                    logMessage[logFile,{"Thread ", thread, " cube volume=", volume,
                        " point=", point, " transform= ", transform}, False];];
            ];
            If[range > 1000000,
                curPercent = Floor[j++ * 100 / range];
                If[curPercent > prevPercent,
                    prevPercent = curPercent;
                    tt2 = AbsoluteTime[];
                    logMessage[logFile,{"Thread ", thread, " Progress ", curPercent,
                        "% Performance ", Round[(j - prevJ) / (tt2 - tt1)], " FLOPS"}, False];
                    prevJ = j;
                    tt1 = tt2;];];
    , {i, thread - 1, range, degreeOfParallelizm}];

        coords = mPoint[[3]];

        {maxVolume, coords - h, coords + h}
    , {thread, degreeOfParallelizm}];

    res = partialRes[[1]];
    Do[
        If[partialRes[[i]][[1]] > res[[1]], res = partialRes[[i]]];
    , {i, 2, degreeOfParallelizm}];

    res
];

solve = Function[{f, compiledF, xParameter, getTransformMatrix, a, b,
        intervals, vars, iterations, logFile},
    n = Length[xParameter];
    intervals2 = intervals + 1;

    a2 = ConstantArray[a, vars];
    b2 = ConstantArray[b, vars];
    prevVolume = 1;
    curVolume = 1;

    Do[
        t1 = AbsoluteTime[];
        res = iteration[f, compiledF, Min[prevVolume, curVolume] - 0.1, xParameter,
```

```
            getTransformMatrix, a2, b2, intervals2, vars, logFile];
        t2 = AbsoluteTime[];

        logMessage[logFile, {"iteration ", it + 1, " t=", N[t2 - t1], " volume= ",
            res[[1]], " a=", res[[2]], " b=", res[[3]]}, True];

        a2 = res[[2]];
        b2 = res[[3]];
        prevVolume = curVolume;
        curVolume = res[[1]];
        intervals2 = 4
    , {it, 0, iterations}];

    c = (a2 + b2) / 2;
    cubeVertices = Tuples[-1,1, n];
    transform = getTransformMatrix[c];
    inside = isCubeInsideF[transform, f, compiledF, xParameter, cubeVertices];
    volume = Det[transform];
    transform2 = Inverse[transform];
    logMessage[logFile, {"solve volume=", volume, " coords=", c, " inside=", inside,
        " transform=", transform, " restrict=", transform2}, True];

    volume
];


SetDirectory[NotebookDirectory[]];
Import["core.m"];

vars = 3;
xParameter = {x1, x2, x3, x4, x5};

getTransformMatrix = Compile[{{coords, _Real, 1}},
    {{coords[[1]], 0, 0, 0, 0},
    {0, coords[[2]], coords[[2]], 0, 0},
    {0, -coords[[2]], coords[[2]], 0, 0},
    {0, 0, 0, coords[[3]], coords[[3]]},
    {0, 0, 0, -coords[[3]], coords[[3]]}}
];

f52 = Function[{x1, x2, x3, x4, x5}, (x1^2 + x3^2)*(x2^2 + x4^2)*x5/4.0];

compiledF52 = Compile[{x1, x2, x3, x4, x5}, (x1^2 + x3^2)*(x2^2 + x4^2)*x5/4.0];

solve[f52, compiledF52, xParameter, getTransformMatrix, 0.0, 2.0, 10, vars, 20, "logV5s.txt"];
```

Приложение 2

Численные значения наибольших матриц.

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det A_3 = 2$$

$$A_4 \approx \begin{pmatrix} 0.81649 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.81649 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.15469 & 1.15469 \\ 0 & 0 & -1.15469 & 1.15469 \end{pmatrix}$$

$$\det A_4 \approx 1.77777$$

$$A_5 \approx \begin{pmatrix} 0.67958 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.13157 & 1.13157 & 0 & 0 \\ 0 & -1.13157 & 1.13157 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.84550 & 0.84550 \\ 0 & 0 & 0 & -0.84550 & 0.84550 \end{pmatrix}$$

$$\det A_5 \approx 2.48831$$

$$A_6 \approx \begin{pmatrix} 0.62510 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.62510 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.04085 & 1.04085 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1.04085 & 1.04085 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.04085 & 1.04085 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1.04085 & 1.04085 \end{pmatrix}$$

$$\det A_6 \approx 1.83456$$

$$A_7 \approx \begin{pmatrix} 0.89061 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.89061 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.89061 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.25951 & 1.25951 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1.25951 & 1.25951 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.89061 & 0.89061 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.89061 & 0.89061 \end{pmatrix}$$

$$\det A_7 \approx 3.55554$$

$$A_8 \approx \begin{pmatrix} 0.81649 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.81649 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.81649 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.81649 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.15469 & 1.15469 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1.15469 & 1.15469 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.15469 & 1.15469 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.15469 & 1.15469 \end{pmatrix}$$

$$\det A_8 \approx 3.16046$$

$$A_9 \approx \begin{pmatrix} 0.73892 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.73892 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.73892 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.21828 & 1.21828 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1.21828 & 1.21828 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.04521 & 1.04521 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.04521 & 1.04521 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.91942 & 0.91942 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.91942 & 0.91942 \end{pmatrix}$$

$$\det A_9 \approx 4.42428$$

$$A_{10} \approx \begin{pmatrix} 0.69666 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.69666 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.69666 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.69666 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.15766 & 1.15766 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1.15766 & 1.15766 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.15766 & 1.15766 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.15766 & 1.15766 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.98097 & 0.98097 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.98097 & 0.98097 \end{pmatrix}$$

$$\det A_{10} \approx 3.25705$$