

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
Санкт-Петербургское отделение Математического института  
им. В. А. Стеклова Российской академии наук

На правах рукописи

Каплун Александр Владимирович

## Алгебра эйконолов метрического графа

Специальность 01.01.03 —  
«математическая физика»

Диссертация на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
доктор физико-математических наук  
Белишев Михаил Игоревич

Санкт-Петербург — 2022

## Оглавление

	Стр.
<b>Введение</b> . . . . .	<b>5</b>
<b>Глава 1. Волны на графе</b> . . . . .	<b>10</b>
1.1 Метрический граф . . . . .	10
1.2 Операторы и пространства на графе . . . . .	11
1.3 Динамическая система с граничным управлением . . . . .	12
1.4 Фундаментальное решение . . . . .	13
1.4.1 Первое ребро . . . . .	14
1.4.2 Прохождение через внутреннюю вершину . . . . .	14
1.4.3 Отражение от граничной вершины . . . . .	15
1.4.4 Формальное описание фундаментального решения . . . . .	17
1.5 Гидра . . . . .	18
1.6 Разбиение $\Pi$ . . . . .	21
1.6.1 Транзитивное замыкание . . . . .	21
1.6.2 Отношения на гидре и графе . . . . .	22
1.6.3 Критические точки . . . . .	23
1.6.4 Семейства . . . . .	23
1.7 Амплитудные векторы . . . . .	26
1.7.1 $\alpha$ -представление волн . . . . .	26
1.7.2 $\beta$ -представление волн . . . . .	27
1.8 Гидра $H_{\Sigma}^T$ . . . . .	28
<b>Глава 2. Алгебра эйконолов</b> . . . . .	<b>31</b>
2.1 Достижимые множества и проекторы . . . . .	31
2.2 Эйконал . . . . .	32
2.3 Параметризация . . . . .	34
2.3.1 Параметризация семейства $\Phi$ . . . . .	34
2.3.2 Параметризация разбиения $\Pi_{\Sigma}$ . . . . .	36
2.4 Смещенные эйконылы . . . . .	37
2.5 Общие факты об алгебрах . . . . .	38
2.5.1 Определения . . . . .	38
2.5.2 Стандартные алгебры и их спектр . . . . .	38
2.5.3 Алгебра эйконолов и парциальные алгебры . . . . .	40

<b>Глава 3. Алгебры, образованные одномерными проекторами</b> . . .	<b>42</b>
3.1 Приводимость . . . . .	42
3.2 Связи между блоками . . . . .	43
3.3 Результаты о связи двух блоков . . . . .	45
3.3.1 Теорема о возможности связи двух блоков . . . . .	45
3.3.2 Изометричность двух блоков . . . . .	51
3.4 Связи в наборе блоков . . . . .	52
<b>Глава 4. Приведение <math>\mathfrak{E}_\Sigma^T</math> к канонической форме</b> . . . . .	<b>56</b>
4.1 Параметрическое представление . . . . .	56
4.1.1 Исходное представление . . . . .	56
4.1.2 Об элементах алгебры $U\mathfrak{E}_\Sigma^T U^{-1}$ . . . . .	57
4.1.3 Приводимость . . . . .	59
4.2 Граничная алгебра . . . . .	61
4.2.1 Определение и связи наборов . . . . .	61
4.2.2 Лемма о граничной алгебре . . . . .	63
4.3 Соединение блоков . . . . .	64
4.4 Построение канонического представления . . . . .	66
<b>Глава 5. Спектр алгебры эйконалов</b> . . . . .	<b>70</b>
5.1 Структура спектра . . . . .	70
5.2 Характеристики точек спектра . . . . .	72
5.2.1 Определения . . . . .	72
5.2.2 Внутренние точки . . . . .	73
5.2.3 Точки кластеров . . . . .	74
5.3 Функциональная модель алгебры эйконалов . . . . .	75
5.3.1 Значения $\hat{a}$ во внутренних точках . . . . .	76
5.3.2 Значения $\hat{a}$ в точках кластеров . . . . .	76
5.4 Координаты на спектре . . . . .	77
5.5 Восстановление канонического представления . . . . .	78
5.6 Факторизация спектра . . . . .	79
5.6.1 Отношение эквивалентности . . . . .	79
5.6.2 Координаты на факторе . . . . .	81

	Стр.
<b>Глава 6. Геометрическая интерпретация спектра</b> . . . . .	<b>82</b>
6.1 Минимальные множества . . . . .	82
6.2 Отношение на $\beta$ -наборе . . . . .	82
6.3 Оптимальное разбиение графа . . . . .	84
6.4 Параметрическое представление . . . . .	85
6.5 Остов . . . . .	86
6.6 Координаты на остове . . . . .	86
6.7 Связь остова и спектра . . . . .	87
<b>Заключение</b> . . . . .	<b>90</b>
<b>Список литературы</b> . . . . .	<b>91</b>

## Введение

Данную работу можно позиционировать следующим образом. Существует подход к обратным задачам математической физики – метод граничного управления (ВС-метод) [1]. Подход имеет выражено междисциплинарный характер: он основан на связях обратных задач с теорией систем и теорией управления, использует асимптотические методы, функциональный анализ, теорию операторов и др. Разработана алгебраическая версия ВС-метода, основанная на связях с банаховыми алгебрами, давшая новое решение задачи реконструкции риманова многообразия по граничным данным [1–3]. Планируется применение этой версии к обратным задачам на графах. Диссертация – шаг в этом направлении.

Алгебраическая версия основана на фундаментальном факте: топологическое пространство характеризуется адекватной алгеброй. Как пример, компактное хаусдорфово пространство  $\Omega$  с точностью до гомеоморфизма определяется алгеброй непрерывных функций  $\mathfrak{A} = C(\Omega)$  [4]. При этом, спектр алгебры, – множество  $\widehat{\mathfrak{A}}$  ее неприводимых представлений, снабженное адекватной топологией, – гомеоморфен пространству:  $\widehat{\mathfrak{A}} \cong \Omega$ . Как следствие, располагая любым представлением  $\mathfrak{A}'$  алгебры  $\mathfrak{A}$ , и находя его спектр  $\widehat{\mathfrak{A}}' \cong \widehat{\mathfrak{A}} \cong \Omega$ , мы получаем гомеоморфную копию пространства  $\Omega$ . По этой схеме решается задача реконструкции: из данных обратной задачи извлекается представление  $\mathfrak{A}'$  и находится его спектр  $\widehat{\mathfrak{A}}'$ , который и доставляет решение задачи – гомеоморфную копию подлежащего восстановлению многообразия  $\Omega$ . Содержательная часть подхода заключается в нахождении алгебры  $\mathfrak{A}'$  по известным данным. В качестве последней используется алгебра эйконалов  $\mathfrak{E}$ , определяемая динамической системой, которая описывает распространение волн в  $\Omega$ .

Варианты ВС-метода для обратных задач на графах предложены в [5–7]. Версия, использующая алгебру эйконалов, инициирована в [8] и дополнена в [9–11]. Общее направление данного подхода – изучение связей между свойствами алгебры  $\mathfrak{E}$  (блочной структурой, алгебраическими инвариантами, представлениями) и геометрией графа. Перспективная цель – реконструкция графа по его граничным данным. Обратные задачи на графах – вполне актуальная тема. Различные постановки и подходы содержатся в работах С.А. Авдониной, П.Б. Курасова, А.С. и В.С. Михайловых, П.Кучмента, В.А. Юрко. В [12–16] ВС-метод используется для решения динамических и спектральных об-

ратных задач для различных классов графов. Работы В.А. Юрко и его учеников используют спектральный подход к обратным задачам для дифференциальных операторов на графах [17–19]. Имеется содержательный обзор П.А. Кучмента и Г.М. Берколайко по всей тематике квантовых графов, в том числе и обратным задачам для них [20].

Без потери общности метрический граф  $\Omega$  можно представлять как связный компактный граф в  $\mathbb{R}^3$ , состоящий из гладких кривых (ребер)  $\{e_1, \dots, e_l\} = E$ , скрепленных во внутренних вершинах  $\{v_1, \dots, v_m\} = V$ . Имеются граничные вершины  $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\} = \Gamma$ , из которых выходит по одному ребру. Метрика (внутреннее расстояние) в  $\Omega$  индуцирована евклидовой метрикой из  $\mathbb{R}^3$ . Тем не менее, в самой работе дается строгое определение графа и всех связанных с ним понятий на основе локальной гомеоморфности малых окрестностей каждой точки графа некоторым стандартным структурам (интервалам и звездам).

Ребра графа "материальны": вдоль них распространяются колебания (волны), инициированные точечными источниками (управлениями), которые помещены в граничных вершинах. Волны движутся от границы с единичной скоростью, постепенно заполняя граф. Процесс описывается динамической системой

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta u &= 0 && \text{в } \mathcal{H}, \quad 0 < t < T, \\ u|_{t=0} = u_t|_{t=0} &= 0 && \text{в } \Omega, \\ u &= f && \text{в } \Gamma \times [0, T], \end{aligned}$$

где  $\mathcal{H} = L_2(\Omega)$ ,  $\Delta$  – Лапласиан, определенный на гладких функциях, удовлетворяющих условиям сшивания (Кирхгофа) во внутренних вершинах;  $f = f(\gamma, t)$  – граничное управление класса  $L_2(\Gamma \times [0, T]) =: \mathcal{F}^T$ ;  $u = u^f(x, t)$  – решение (волна),  $u^f(\cdot, t) \in \mathcal{H}$  при  $0 \leq t \leq T$ .

Имеется возможность управлять волнами не со всей границы, а с ее части  $\Sigma \subset \Gamma$ : в этом случае используются управления класса  $\mathcal{F}_\Sigma^T := \{f \in \mathcal{F}^T \mid \text{supp } f \subset \Sigma \times [0, T]\} = \bigoplus_{\gamma \in \Sigma} \mathcal{F}_\gamma^T$ .

Каждой граничной вершине сопоставлено семейство достижимых множеств  $\mathcal{U}_\gamma^t := \{u^f(\cdot, t) \mid f \in \mathcal{F}_\gamma^T\}$ ,  $0 \leq t \leq T$  и соответствующих проекторов  $P_\gamma^t$  в  $\mathcal{H}$  на  $\mathcal{U}_\gamma^t$ . Оператор  $E_\gamma^T := \int_0^T t dP_\gamma^t$  называется эйконалом, отвечающим вершине  $\gamma$ . Эйконалы суть самосопряженные операторы – элементы алгебры ограниченных операторов  $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ .

Для  $C^*$ -алгебры  $\mathfrak{A}$  и множества  $S \subset \mathfrak{A}$ , через  $\vee S$  обозначим  $C^*$ -алгебру, порожденную этим множеством, т.е. минимальную  $C^*$ -подалгебру в  $\mathfrak{A}$ , содержащую  $S$ . Алгебра эйконалов, отвечающая выделенному семейству граничных вершин  $\Sigma \subset \Gamma$ , есть операторная  $C^*$ -алгебра

$$\mathfrak{E}_\Sigma^T := \vee \{E_\gamma^T \mid \gamma \in \Sigma\} \subset \mathfrak{B}(\mathcal{H}). \quad (1)$$

Алгебра эйконалов относится к классу  $C^*$ -алгебр с конечномерными представлениями разных размерностей (субоднородные  $C^*$ -алгебры). Однородные алгебры (алгебры с представлениями одной конечной размерности) изучались, начиная с 1960-х годов, в работах Фелла [21], Томиямы и Такесаки [22]. В них для однородных алгебр построены функциональные модели в виде операторных полей над топологическими пространствами. Позже такие алгебры исследовались в работах Капланского [23], Фелла [21;24;25], Эффроса [26], Бунса и Дедденса [27].

В диссертации строится функциональная модель алгебры эйконалов, близкая по характеру к моделям Васильева [28] и Немеца [29].

**Целью** данной работы является исследование алгебры эйконалов: получение канонического представления, описание ее спектра, связи спектра с геометрией графа.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Найти каноническое представление алгебры эйконалов, позволяющее дать эффективное описание ее спектра.
2. Построить функциональную модель, основанную на каноническом представлении.
3. Изучить связь функциональной модели с геометрией графа.

### **Краткое содержание работы.**

В первой главе описывается динамика волн на метрическом графе и строится разбиение графа на семейства интервалов, которые позволят описывать набор эйконалов одновременно в простой параметрической форме.

Во второй главе вводятся эйконалы и описывается их параметрическое представление. Определяется алгебра эйконалов и приводятся ее свойства общего характера.

В третьей главе рассматривается абстрактная алгебра, образованная набором одномерных проекторов, ее блочная структура и описываются связи между блоками.

В четвертой главе вводится каноническое представление алгебры эйконалов. Описывается процедура, которая приводит ее к каноническому представлению, отправляясь от параметрического.

В пятой главе описывается спектр алгебры эйконалов. Строится функциональная модель, носителем которой является спектр. Описывается переход к каноническому представлению от произвольной изометрической копии алгебры эйконалов. На спектре вводятся адекватные координаты. С их использованием проводится факторизация спектра, превращающая его в граф.

В шестой главе описывается разбиение исходного графа, связанное с каноническим представлением. Вводится понятие остова: это топологическое пространство, получаемое из исходного графа факторизацией по отошению, определяемому каноническим разбиением. Приводятся условия, при которых остов гомеоморфен факторизованному спектру.

**Научная новизна:** Все результаты диссертации являются новыми.

**Практическая значимость** Работа имеет теоретический характер.

**Методология и методы исследования.** Используются методы теории управления, результаты теории уравнений в частных производных на графах, теория самосопряженных операторов, теория  $C^*$ -алгебр.

**Основные положения, выносимые на защиту:**

1. Каноническое представление алгебры эйконалов метрического графа.
2. Описание спектра алгебры эйконалов и его координатизация.
3. Реализация алгебры в виде функциональной модели на ее спектре.
4. Установление связи между структурой спектра алгебры эйконалов и геометрией графа.

**Достоверность** полученных результатов обеспечивается строгостью математических методов, используемых при исследовании.

**Апробация работы.** Основные результаты работы докладывались на научных семинарах и конференциях. В их числе:

- Международная конференция "Days on Diffraction 2019", 3 – 7 июня, 2019, Санкт-Петербург



- Международная конференция "Mathematical challenge of quantum transport in nanosystems – Pierre Duclos workshop", 19 – 20 сентября, 2019, Санкт-Петербург
- Analytical Modeling and Approximation Methods Workshop, March 4 – 8, 2020, Berlin
- Международная конференция "Mathematical challenge of quantum transport in nanosystems – Pierre Duclos workshop", 14 – 16 сентября, 2020, Санкт-Петербург
- Международная конференция "Days on Diffraction 2021", 31 мая – 4 июня, 2021, Санкт-Петербург
- Международная конференция "Days on Diffraction 2022", 30 мая – 3 июня, 2022, Санкт-Петербург
- доклады на Санкт-Петербургском семинаре по дифракции и распространению волн, ПОМИ РАН

**Личный вклад.** Результаты диссертации, относящиеся к каноническому представлению алгебры эйконалов изложены в совместных с М. И. Белишевым статьях [9; 11]. В них вклад соавтора (научного руководителя) состоит в постановке задач и определении общего направления и подходов к их решению. Вклад соискателя заключается в реализации предложенных идей и составляет основную содержательную часть этих работ. Им же в [11] введено понятие граничной алгебры, сыгравшее важную роль в описании связей между блоками алгебры эйконалов, и доказана теорема, описывающая подобные связи на абстрактном уровне. Также соискателем установлена связь между факторизованным спектром и остовом графа. Результаты работы [10] получены соискателем лично.

**Публикации.** Основные результаты по теме диссертации изложены в 3 статьях, опубликованных в журналах, рекомендованных ВАК. Все эти журналы входят в реферативные базы данных Web of Science и Scopus.

**Объем и структура работы.** Диссертация состоит из Введения, 6 глав и Заключения. Полный объем диссертации составляет 93 страницы, включая 4 рисунка. Список литературы содержит 35 наименований.

## Глава 1. Волны на графе

### 1.1 Метрический граф

Пусть  $I_j := (0, a_j) = \{s_j \in \mathbb{R} \mid 0 < s_j < a_j < \infty\}$ ,  $j = 1, \dots, d$  – конечные интервалы. Множество  $S_d := \{0\} \cup I_1 \cup \dots \cup I_d$ , оснащенное метрикой

$$\tau(x, y) := \begin{cases} |x - y|, & \text{при } x, y \in I_j \\ x + y, & \text{при } x \in I_i, y \in I_j, i \neq j \\ y, & \text{при } x = 0, y \in I_j \\ x, & \text{при } x \in I_i, y = 0 \\ 0, & \text{при } x = y = 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

будем называть *звездой*.

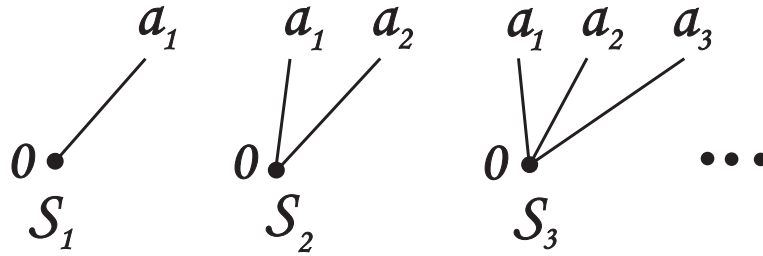


Рисунок 1.1 — Звезды

*Метрическим графом*  $\Omega$  назовем связное метрическое пространство, локально изометричное либо звезде, либо интервалу. Внутренние вершины – точки, малые окрестности которых изометричны звездам с  $d > 2$ , граничные – с  $d = 1$ . Ребрами будем называть максимальные части  $\Omega$ , изометричные интервалам. Таким образом,

- $\Omega = E \cup V \cup \Gamma$ , где  $E = \{e_i\}_{i=1}^p$  – ребра;  $V = \{v_j\}_{j=1}^q$ ,  $v_k$  – внутренние вершины;  $\Gamma = \{\gamma_k\}_{k=1}^n$ ,  $\gamma_k$  – граничные вершины
- каждое ребро  $e_i$  изометрично конечному интервалу  $\{s \in \mathbb{R} \mid a_i < s < b_i\}$ . Зафиксируем изометрии (параметризации)  $\kappa_i : e_i \rightarrow (a_i, b_i)$  и будем писать  $\tilde{y}(s) := (y \circ \kappa_i^{-1})(s)$ ,  $s \in (a_i, b_i)$  для функций  $y = y(x)$  на  $\Omega$ .
- каждая вершина  $w \in V \cup \Gamma$  имеет в  $\Omega$  окрестность, изометричную  $S_d$ ; число  $\mu(w) := d$  называется *валентностью*  $w$ . Вершины валентности  $> 2$  относятся к множеству внутренних вершин  $V$ , валентности 1 – к границе  $\Gamma$ .

– на графе  $\Omega$  определена метрика  $\tau : \Omega \times \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ , при этом для  $x, y \in e$   $\tau(x, y) = |\kappa(x) - \kappa(y)|$ , где  $\kappa : e \rightarrow (a, b) \subset \mathbb{R}$  – параметризация.

Отсутствие в рассмотрениях вершин с валентностью  $\mu(w) = 2$  объясняется тем, что звезда с  $d = 2$  изометрична интервалу.

Для подмножества  $A \subset \Omega$  величина  $\text{diam}A := \sup\{\tau(x, y) \mid x, y \in A\}$  называется *диаметром*  $A$ . Через  $\Omega^r[A] := \{x \in \Omega \mid \tau(x, A) < r\}$  обозначим метрическую окрестность множества  $A$  радиуса  $r > 0$ .

## 1.2 Операторы и пространства на графе

Для ребра  $e \in E$ , параметризованного  $\kappa : e \rightarrow (a, b)$ , функции  $y$  на  $\Omega$  и точки  $x \in e$  определим функцию

$$\frac{dy}{de}(x) := \lim_{\substack{m \rightarrow x \\ \kappa(m) > \kappa(x)}} \frac{y(m) - y(x)}{\tau(m, x)} = \frac{d\tilde{y}}{ds}\Big|_{s=\kappa(x)}, \quad (1.2)$$

производную относительно метрики  $\tau$  в направлении увеличения параметра.

Выберем вершину  $w \in V \cup \Gamma$  и ее окрестность в  $\Omega$ , изометричную звезде  $S_a$ . Будем говорить, что ребро  $e$  инцидентно  $w$ , если  $w \in \bar{e}$ . Для каждого  $e$ , инцидентного  $w$ , определим *исходящую производную*

$$\frac{dy}{de_+}(w) := \lim_{e \ni m \rightarrow w} \frac{y(m) - y(w)}{\tau(m, w)}. \quad (1.3)$$

Для каждой вершины  $w \in V \cup \Gamma$  и функции  $y$  определим *исходящий поток*

$$\Pi_w[y] = \sum_{\bar{e} \ni w} \frac{dy}{de_+}(w). \quad (1.4)$$

Рассмотрим вещественное гильбертово пространство  $\mathcal{H} := L_2(\Omega)$  функций на  $\Omega$  со скалярным произведением

$$(y, u)_{\mathcal{H}} = \int_{\Omega} yu \, d\tau = \sum_{e \in E} \int_e yu \, d\tau := \sum_{e \in E} \int_{\kappa(e)} \tilde{y}(s)\tilde{u}(s) \, ds. \quad (1.5)$$

Через  $C(\Omega)$  обозначим пространство непрерывных функций с нормой  $\|y\| = \sup_{\Omega} |y(\cdot)|$ . Будем говорить, что функция  $y$  принадлежит к классу Соболева  $\mathcal{H}^2(\Omega)$  и будем писать  $y \in \mathcal{H}^2(\Omega)$ , если выполнены условия:

- $y \in C(\Omega)$ ,
- $\tilde{y}|_{\kappa(e)} \in H^2(\kappa(e))$ , а именно  $\frac{dy}{de}, \frac{d^2y}{de^2} \in L_2(e)$  для каждого ребра  $e \in E$ ,

Отметим также, что значение производной  $\frac{d^2y}{de^2}$  не зависит от способа параметризации ребер.

Определим также класс Кирхгофа

$$\mathcal{K} := \{y \in H^2(\Omega) \mid \Pi_v[y] = 0, v \in V\}. \quad (1.6)$$

Оператор Лапласа на графе вводится определением

$$\Delta : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}; \quad \text{Dom } \Delta = \mathcal{K}; \quad (\Delta y)|_e = \frac{d^2y}{d\tau^2}, \quad e \in E. \quad (1.7)$$

Он плотно задан, замкнут и не зависит от способа параметризации ребер.

### 1.3 Динамическая система с граничным управлением

Начально-краевая задача, описывающая распространение волн в графе, имеет вид

$$u_{tt} - \Delta u = 0 \quad \text{в } \mathcal{H}, \quad 0 < t < T; \quad (1.8)$$

$$u(\cdot, t) \in \mathcal{K} \quad \text{при } 0 \leq t \leq T; \quad (1.9)$$

$$u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0 \quad \text{в } \Omega; \quad (1.10)$$

$$u = f \quad \text{на } \Gamma \times [0, T]. \quad (1.11)$$

Здесь  $T > 0$  – финальный момент времени;  $f = f(\gamma, t)$  – *граничное управление*;  $u = u^f(x, t)$  – решение (*волна*). При  $C^2$ -гладком (по  $t$ ) управлении  $f$ , исчезающем вблизи  $t = 0$ , задача имеет единственное классическое решение  $u^f$ . Отметим, что из определения класса Кирхгофа (1.6) и условия (1.9) следует, что выполняются правила Кирхгофа:

$$u(\cdot, t) \in C(\Omega), \quad \Pi_v[u(\cdot, t)] = 0 \quad (1.12)$$

для всех  $t \geq 0$  и  $v \in V$ .

Как следует из определения (1.7), на каждом ребре  $e$  решение  $u^f$  удовлетворяет уравнению однородной струны  $u_{tt} - u_{\tau\tau} = 0$ . Отсюда видно, что волны распространяются от границы внутрь  $\Omega$  с единичной скоростью. Как

следствие, если управление действует с части границы  $\Sigma \subseteq \Gamma$ , т.е. выполнено  $\text{supp } f \subset \Sigma \times [0, T]$ , имеем соотношение

$$\text{supp } u^f(\cdot, t) \subset \overline{\Omega^t[\Sigma]}, \quad t > 0. \quad (1.13)$$

Пространство управлений  $\mathcal{F}^T := L_2(\Gamma \times [0, T])$  со скалярным произведением

$$(f, g)_{\mathcal{F}^T} := \sum_{\gamma \in \Gamma} \int_0^T f(\gamma, t) g(\gamma, t) dt \quad (1.14)$$

называется *внешним пространством* системы (1.8)-(1.11). Оно может быть представлено в виде прямой суммы подпространств  $\mathcal{F}_\gamma^T := \{f \in \mathcal{F}^T \mid \text{supp } f \subset \{\gamma \times [0, T]\}$ :

$$\mathcal{F}^T = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{F}_\gamma^T. \quad (1.15)$$

Для каждого  $f \in \mathcal{F}_\gamma^T$  также справедливо представление  $f(\gamma', t) = \delta_\gamma(\gamma') \varphi(t)$ ,  $\varphi \in L_2([0, T])$ , где

$$\delta_\gamma(\gamma') := \begin{cases} 1 & \gamma' = \gamma, \\ 0 & \gamma' \neq \gamma \end{cases} \quad (1.16)$$

– дельта Кронекера. Пространство  $\mathcal{H}$  называется *внутренним пространством*, волны  $u^f(\cdot, t)$  – зависящие от времени элементы  $\mathcal{H}$

## 1.4 Фундаментальное решение

Рассмотрим систему (1.8)-(1.11) для  $T = \infty$ . Через  $\delta_x$  мы обозначаем меру Дирака, т.е. функционал на  $C(\Omega)$ , принимающий значения по правилу  $\langle \delta_x, y \rangle = y(x)$ . Пусть  $\delta = \delta(t)$  есть дельта-функция Дирака.

Фиксируем граничную вершину  $\gamma$ . Рассматривая обобщенное управление  $f(\gamma', t) = \delta_\gamma(\gamma') \delta(t)$ , определим обобщенное решение  $u^{\delta_\gamma \delta}$  динамической системы. Рассмотрим некоторую гладкую регуляризацию  $\delta^\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \delta(t)$ . Пусть  $u^{\delta_\gamma \delta^\varepsilon}$  есть классическое решение, а

$$u^{\delta_\gamma \delta} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} u^{\delta_\gamma \delta^\varepsilon} \quad (1.17)$$

в смысле распределений на  $\Omega \times [0, \infty)$ . Для каждого фиксированного  $T$  этот предел существует и представляет собой пространственно-временное распределение в  $\Omega \times [0, T]$  из класса  $C((0, T), H^{-1}(\Omega))$ . Распределение  $u^{\delta\gamma\delta}$  называется *фундаментальным решением* системы (1.8)-(1.11), отвечающим вершине  $\gamma$ .

Фундаментальное решение сингулярно. Опишем более подробно его структуру и приведем удобный формализм, описывающий его эволюцию.

### 1.4.1 Первое ребро

Пусть  $e$  – ребро, инцидентное граничной вершине  $\gamma$  и параметризованное длиной  $s = \kappa(x) := \tau(x, y) \in (0, \tau(\gamma, V))$ . Пусть  $v$  – ближайшая к  $\gamma$  внутренняя вершина (второй конец ребра  $e$ ). Тогда для времен  $0 < t < \tau(\gamma, v)$  справедливо

$$\tilde{u}_{tt} - \tilde{u}_{ss} = 0 \quad \text{в } (0, \tau(\gamma, v)) \times (0, T); \quad (1.18)$$

$$\tilde{u}|_{t=0} = \tilde{u}_t|_{t=0} = 0 \quad \text{в } [0, \tau(\gamma, v)] \quad (1.19)$$

$$\tilde{u}|_{s=0} = \delta(t) \quad \text{при } 0 \leq t \leq \tau(\gamma, v), \quad (1.20)$$

что приводит к  $\tilde{u}(s, t) = \delta(t - s)$ . Отсюда получаем, что справедливо представление

$$u^{\delta\gamma\delta}(\cdot, t) = \delta_{x(t)}(\cdot), \quad 0 \leq t \leq \tau(\gamma, v), \quad (1.21)$$

где  $x(t) \in e$  и  $\tau(x(t), \gamma) = t$ . Тем самым оказывается, что при малых временах возмущение (сингулярность) в виде дельта-функции двигается по исходящему из  $\gamma$  ребру  $e$  в сторону вершины  $v$  с единичной скоростью.

### 1.4.2 Прохождение через внутреннюю вершину

В момент времени  $t = \tau(\gamma, v)$  сингулярность достигает внутренней вершины  $v$ , а затем проходит через нее. С использованием правила Кирхгофа (1.12) можно показать, что для достаточно малых  $\varepsilon$  ( $0 < \varepsilon < \tau(v, (V \cup \Gamma) \setminus \{v\})$ ) справедливо равенство:

$$u^{\delta\gamma\delta}(\cdot, t) = \sum_{e': e' \ni v} a(x_{e'}(t)) \delta_{x_{e'}(t)}(\cdot), \quad \tau(\gamma, v) < t \leq \tau(\gamma, v) + \varepsilon. \quad (1.22)$$

Здесь  $x_{e'}(t) \in e'$  и выполнены равенства  $\tau(x_{e'}(t), v) = t - \tau(\gamma, v)$ . Функция  $a$ , которую мы будем называть *амплитудой*, определяется равенством

$$a(x) := \begin{cases} -\frac{\mu(v)-2}{\mu(v)}, & \text{при } x \in e \\ \frac{2}{\mu(v)}, & \text{при } x \in e' : e' \neq e, v \in \bar{e}' \end{cases}. \quad (1.23)$$

Таким образом, при прохождении через  $v$  сингулярность разделяется на  $\mu(v)$  частей. Одна из них отражается обратно в ребро  $e$ , а оставшиеся  $\mu(v) - 1$  начинают двигаться внутрь ребер  $e'$ , инцидентных вершине  $v$ . При этом соблюдается следующий закон сохранения

$$-\frac{\mu(v)-2}{\mu(v)} + (\mu(v)-1)\frac{2}{\mu(v)} = 1, \quad (1.24)$$

который означает, что суммарная амплитуда до и после прохождения через внутреннюю вершину остается постоянной.

### 1.4.3 Отражение от граничной вершины

Пусть, как выше,  $v$  есть ближайшая к  $\gamma$  внутренняя вершина, а  $\gamma'$  – ближайшая к  $v$  граничная вершина такая, что выполнено

$$\tau(\gamma', v) = \min_{\gamma'' \in \Gamma} \tau(\gamma'', v), \quad (1.25)$$

(возможно  $\gamma = \gamma'$ ). Рассмотрим момент времени  $\tilde{t}$ , определяемый равенством:

$$\tilde{t} := \begin{cases} 2\tau(\gamma, v), & \gamma' = \gamma, \\ \tau(\gamma, v) + \tau(v, \gamma'), & \gamma' \neq \gamma. \end{cases} \quad (1.26)$$

При  $t \rightarrow \tilde{t} - 0$  сингулярность, прошедшая через  $v$  и, возможно через другие внутренние вершины, либо отраженная обратно к  $\gamma$  (в случае, если  $\gamma' = \gamma$ ), достигает вершины  $\gamma'$ , а затем отражается от этой вершины. С использованием условия  $u^{\delta_{\gamma\delta}}(\gamma', t) = \delta_{\gamma}(\gamma')\delta(t) = 0$ ,  $t > 0$ , легко получить представление:

$$u^{\delta_{\gamma\delta}}(\cdot, t) = \begin{cases} a\delta_{x(t)}(\cdot) & t \in (\tilde{t} - \varepsilon, \tilde{t}) \\ -a\delta_{x(t)}(\cdot) & t \in (\tilde{t}, \tilde{t} + \varepsilon), \end{cases} \quad (1.27)$$

где  $x(t) \in e'$ ,  $\gamma' \in \bar{e}'$ ,  $\tau(x(t), \gamma') = |t - \tilde{t}|$ ,  $a = \text{const} \neq 0$ .

Таким образом, при достижении граничной вершины, сингулярность отражается со сменой знака константы.

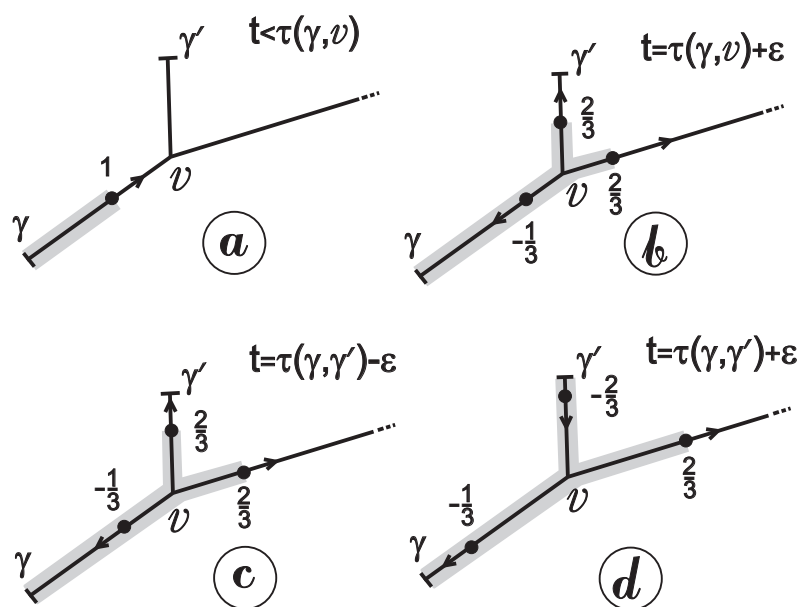


Рисунок 1.2 — Распространение сингулярностей



### 1.4.4 Формальное описание фундаментального решения

Эволюцию фундаментального решения удобно и наглядно описывают следующие правила "динамики импульсов". Они формализуют проведенный выше анализ.

1. Под *импульсом* понимается мера  $a\delta_x$ ; постоянная  $a \neq 0$  называется его амплитудой.
2. Каждый импульс  $a\delta_{x(t)}$  движется по ребру со скоростью 1 в одном из двух возможных направлений, так что  $|\dot{x}(t)| = 1$  при  $x(t) \in e$ .
3. (*принцип суперпозиции*) Импульсы движутся независимо друг от друга. Если в момент  $t$  имеется несколько импульсов  $a_1\delta_{x(t)}, \dots, a_p\delta_{x(t)}$ , расположенных в точке  $x(t) \in \Omega \setminus \Gamma$ , то они складываются, образуя импульс  $[a_1 + \dots + a_p]\delta_{x(t)}$ .
4. (*прохождение через внутреннюю вершину*) Перемещаясь вдоль ребра  $e$  и проходя через внутреннюю вершину  $v$ , импульс  $a\delta_{x(t)}$  делится на  $\mu(v)$  импульсов: один отраженный и  $\mu(v) - 1$  прошедших. Отраженный импульс движется вдоль  $e$  в обратном направлении и имеет амплитуду  $\frac{2-\mu(v)}{\mu(v)}a$ . Каждый из прошедших импульсов движется вдоль своего (инцидентного  $v$ ) ребра в сторону от  $v$  и имеет амплитуду  $\frac{2}{\mu(v)}a$ . При этом, общая амплитуда составляет  $\frac{2-\mu(v)}{\mu(v)}a + [\mu(v) - 1]\frac{2}{\mu(v)}a = a$ , что соответствует закону сохранения токов Кирхгофа  $\Pi_v[y] = 0$ .
5. (*отражение от границы*) Как только импульс  $a\delta_{x(t)}$  достигает вершины  $\gamma \in \Gamma$ , он мгновенно меняет свое направление на противоположное и инвертируется: изменяет амплитуду с  $a$  на  $-a$ .

Приняв эти правила, можно описать решение  $u^{\delta\gamma\delta}$  следующим образом:

- при  $0 \leq t \leq \tau(\gamma, V)$  имеем  $u^{\delta\gamma\delta} = \delta_{x(t)}$ , где  $x(t)$  точка ребра  $e$  инцидентного  $\gamma$  такая, что  $\tau(x(t), \gamma) = t$ . Таким образом, при малых временах,  $u^{\delta\gamma\delta}$  это уединенный импульс единичной амплитуды, вошедший в граф из вершины  $\gamma$  и движущийся по  $e$  с единичной скоростью;
- дальнейшая эволюция при временах  $t > \tau(\gamma, V)$  определяется правилами 1-5.

Нетрудно убедиться, что такое описание является вполне детерминированным. В каждый момент времени  $t \geq 0$  решение  $u^{\delta\gamma\delta}$  представляет собой набор конечного числа импульсов, движущихся в  $\Omega$ . С физической точки зрения эта

картина описывает, например, распространение острых сигналов (скачков напряжения) в электросети – графе, составленном из проводов.

Таким образом, фундаментальное решение есть некоторое пространственно-временное распределение в  $\Omega \times \{t \geq 0\}$ . Структура его такова, что для управлений вида  $f = \delta_\gamma \varphi$  с  $\varphi \in L_2[0, T]$  свертка по времени

$$u^f(x, t) := [u^{\delta_\gamma \delta}(x, \cdot) * \varphi](t), \quad x \in \Omega, \quad 0 \leq t \leq T \quad (1.28)$$

корректно определена. Кроме того, можно показать, что  $u^f \in C([0, T]; \mathcal{H})$  и, если  $\varphi$  является гладким и исчезает около  $t = 0$ , то  $u^f$  совпадает с классическим решением задачи (1.8)–(1.11).

С этого момента, функция  $u^f$ , определяемая соотношением (1.28), рассматривается как (обобщенное) решение для управлений указанного вида. В более общем случае, для  $f \in L_2(\Gamma \times [0, T])$  вида  $f = \sum_{\gamma \in \Sigma} f_\gamma$  с  $f_\gamma = \delta_\gamma \varphi_\gamma$  полагаем

$$u^f(x, t) := \sum_{\gamma \in \Sigma} u^{f_\gamma}(x, t), \quad x \in \Omega, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (1.29)$$

Нетрудно показать, что и для обобщенного решения соотношение (1.13) остается верным. Оно показывает, что метрическая окрестность  $\Omega^T[\Sigma]$  есть часть графа, захваченная волнами, идущими от  $\Sigma$ , к моменту  $t = T$ .

## 1.5 Гидра

Определим пространственно-временной граф, который используется для эффективного описания волн. Фиксируем граничную вершину  $\gamma$ . Рассматривая фундаментальное решение как пространственно-временное распределение, определим множество

$$H_\gamma := \text{supp } u^{\delta_\gamma \delta} \subset \Omega \times \overline{\mathbb{R}}_+, \quad (1.30)$$

которое будем называть *гидрой* [7]. По существу это пространственно-временной граф, образованный траекториями импульсов в ходе эволюции, описываемой правилами, указанными выше: см. Рис. 1.3. Его ребра суть характеристики волнового уравнения (1.8).

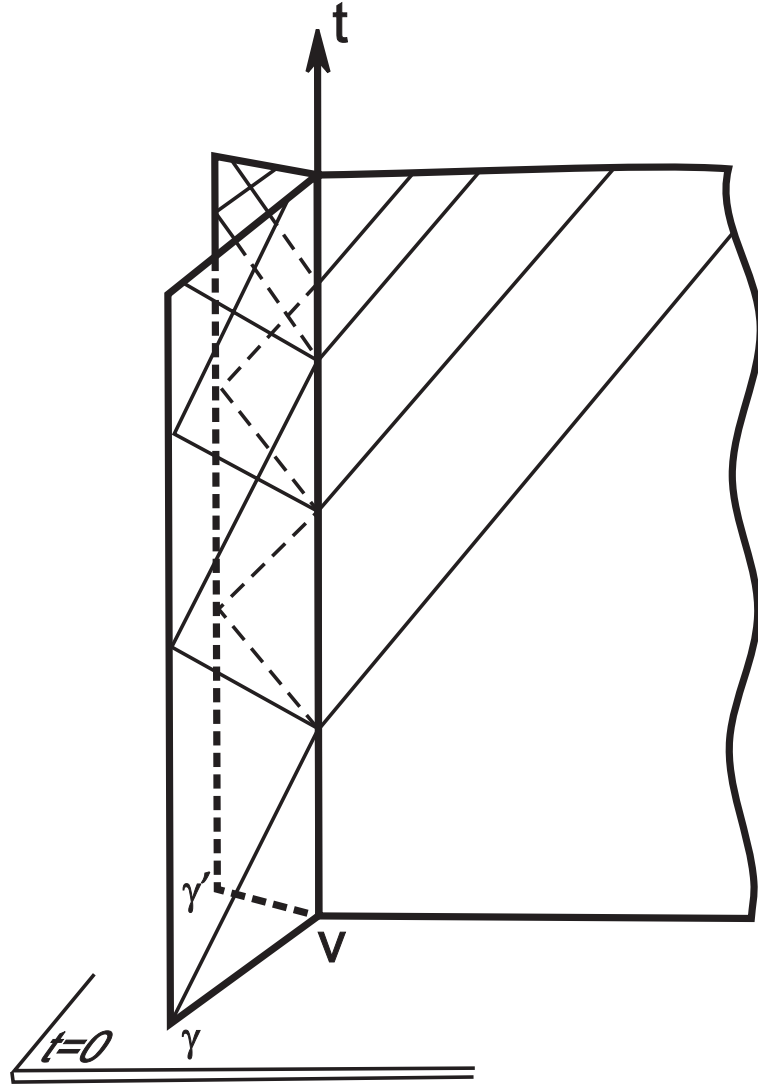


Рисунок 1.3 — Гидра

Определим проекции:

$$\pi : H_\gamma \ni h = (x, t) \mapsto x \in \Omega, \quad \pi^{-1}(x) := \{h \in H_\gamma \mid \pi(h) = x\}; \quad (1.31)$$

$$\rho : H_\gamma \ni h = (x, t) \mapsto t \in \overline{\mathbb{R}}_+, \quad \rho^{-1}(t) := \{h \in H_\gamma \mid \rho(h) = t\}. \quad (1.32)$$

На гидре зададим функцию (*амплитуду*)  $a(\cdot)$  по следующему правилу:

- для точки  $h \in H_\gamma$ , такой, что  $\pi(h) = x \in \Omega \setminus \Gamma$  и  $\rho(h) = t > 0$  имеем  $u^{\delta_\gamma \delta}(\cdot, t) = a\delta_x(\cdot)$  и определяем  $a(h) := a$ ;
- для  $h \in H_\gamma$ , такой, что  $\pi(h) \in \Gamma$  и  $\rho(h) > 0$ , полагаем  $a(h) := 0$ ;
- для  $h \in H_\gamma$ , такой, что  $\pi(h) = \gamma$  и  $\rho(h) = 0$ , полагаем  $a(h) := 1$ .

Как видно, амплитуда является кусочно-постоянной функцией, определенной на всей гидре  $H_\gamma$ : см. Рис. 1.4. Уточним, что в точках самопересечения  $p$ , согласно правилу 3 эволюции импульсов имеем  $a(p) = -\frac{4}{9} + \frac{1}{3} = -\frac{1}{9}$ . Точки вида  $p$  суть вершины  $H_\gamma$ , которые проектируются в  $\Omega \setminus [V \cup \Gamma]$ .

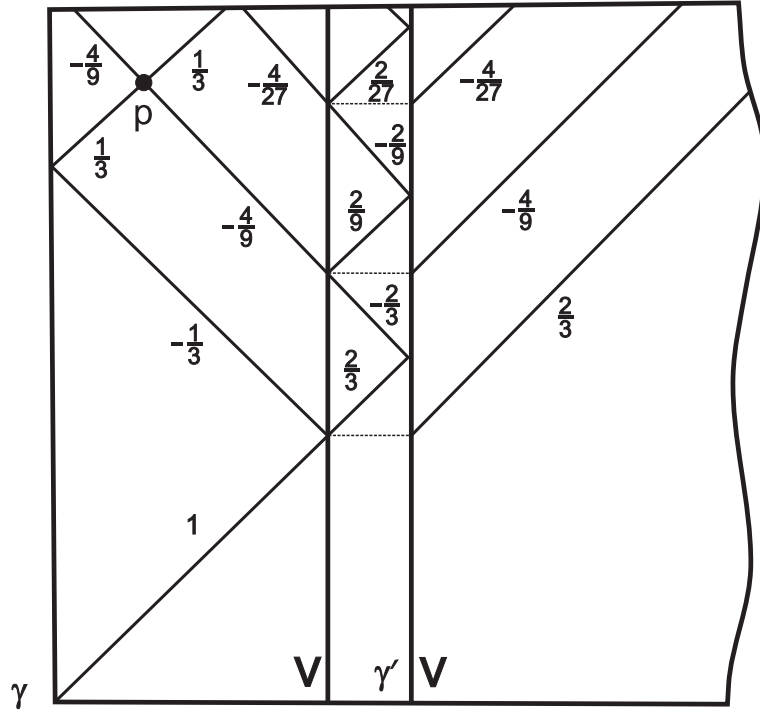


Рисунок 1.4 — Амплитуда на гидре

Приведем представление, ради которого введена гидра (см. [8]). Используя запись  $h = (x, t) \in H_\gamma$  и  $a(h) = a(x, t)$ , для управления  $f = \delta_\gamma \varphi(t)$  с  $\varphi \in L_2[0, T]$  согласно (1.28) получим:

$$u^f(x, T) = \sum_{t \in \rho(\pi^{-1}(x))} a(x, t) \varphi(T - t), \quad x \in \Omega. \quad (1.33)$$

В общем случае, когда управление  $f = \sum_{\gamma \in \Sigma} \delta_\gamma \varphi_\gamma(t)$  действует из нескольких граничных вершин, согласно (1.29) имеем:

$$u^f(x, T) = \sum_{\gamma \in \Sigma} \sum_{t \in \rho(\pi^{-1}(x))} a_\gamma(x, t) \varphi_\gamma(T - t), \quad x \in \Omega, \quad (1.34)$$

где  $a_\gamma$  суть амплитуды на гидрах  $H_\gamma$ .

Приведенные представления вполне эффективны: по ним можно вычислять значения волн. Однако, для предстоящего анализа алгебры эйконалов потребуется их модификация, к описанию которой мы переходим. Модификация использует разбиение графа  $\Omega$  на части (*семейства*), согласованное со структурой гидр. Во всех подробностях и с графическими иллюстрациями оно описано в [8].

## 1.6 Разбиение $\Pi$

В дальнейшем мы имеем дело с *усеченными* гидроми

$$H_\gamma^T := H_\gamma \cap \{\Omega \times [0, T]\}. \quad (1.35)$$

### 1.6.1 Транзитивное замыкание

Введем одно понятие общего характера.

Пусть дано множество  $X$  и симметричное рефлексивное отношение  $\sim_0$  на этом множестве. Будем говорить, что точки  $x$  и  $y$  соседние, если выполнено  $x \sim_0 y$ . Рассмотрим отношение  $\sim$ , которое задается следующим условием: точки  $x$  и  $y$  находятся в отношении  $\sim$ , если в  $X$  имеется конечный набор элементов  $x_1, \dots, x_n$  такой, что выполнено  $x \sim_0 x_1 \sim_0 \dots \sim_0 x_n \sim_0 y$ . Такое отношение  $\sim$  будем называть *транзитивным замыканием* отношения  $\sim_0$ . При этом, как несложно заметить, оно является отношением эквивалентности.

Класс эквивалентности  $[x]$  элемента  $x \in X$  по введенному выше отношению  $\sim$  также можно описать конструктивно. Введем операцию  $\text{ext}$ , расширяющую подмножество  $B \subset X$  по правилу

$$B \mapsto \text{ext}B := \bigcup_{b \in B} \{x \in X \mid x \sim_0 b\}; \quad (1.36)$$

обозначим  $\text{ext}^1 B := \text{ext}B$  и  $\text{ext}^j B := \text{ext} \text{ext}^{j-1} B$ ,  $j \geq 2$ . Нетрудно убедиться в справедливости представления

$$[x] = \bigcup_{j \geq 1} \text{ext}^j \{x\}. \quad (1.37)$$

Если множество  $X$  конечно, то последовательность  $\text{ext}^j$  на некотором шаге стабилизируется:  $\text{ext}^1 \{x\} \subset \dots \subset \text{ext}^N \{x\} = \text{ext}^{N+1} \{x\} = \dots = [x]$ . Этот случай встретится в работе.

### 1.6.2 Отношения на гидре и графе

Рассмотрим эквивалентность такого вида на гидре. Скажем, что точки  $h, h' \in H_\gamma^T$  суть соседние ( $h \sim_0 h'$ ), если выполнено хотя бы одно из условий:  $\pi(h) = \pi(h')$  или  $\rho(h) = \rho(h')$ . Через  $\simeq$  обозначим отношение эквивалентности, порожденное таким соседством. Класс эквивалентности

$$\mathcal{L}[h] := \{h' \in H_\gamma^T \mid h' \simeq h\} \quad (1.38)$$

назовем *решеткой*. Можно показать, что этот класс состоит из конечного числа точек. Для подмножества  $B \subset H_\gamma^T$  определим решетку

$$\mathcal{L}[B] := \bigcup_{h \in B} \mathcal{L}[h]. \quad (1.39)$$

Легко проверить, что операция  $B \mapsto \mathcal{L}[B]$  обладает следующими свойствами:

- $B \subset \mathcal{L}[B]$
- $\mathcal{L}[\mathcal{L}[B]] = \mathcal{L}[B]$
- $\mathcal{L}[B_1 \cup B_2] = \mathcal{L}[B_1] \cup \mathcal{L}[B_2]$
- $\pi^{-1}(\pi(\mathcal{L}[B])) = \rho^{-1}(\rho(\mathcal{L}[B])) = \mathcal{L}[B]$

Первые три свойства показывают, что она является топологическим замыканием (по Куратовскому).

С каждой точкой  $x \in \overline{\Omega^T[\gamma]}$  свяжем множество

$$\Lambda[x] := \pi(\mathcal{L}[\pi^{-1}(x)]) \subset \overline{\Omega^T[\gamma]}, \quad (1.40)$$

(замыкание в метрике  $\Omega$ ) которое назовем *множеством определенности* точки  $x$ . Это множество конечно. Как нетрудно проверить, отношение

$$x \sim x' \Leftrightarrow \Lambda[x] = \Lambda[x'] \quad (1.41)$$

есть эквивалентность на  $\Omega$ , а операция  $A \mapsto \Lambda[A] := \bigcup_{x \in A} \Lambda[x] = \pi(\mathcal{L}[\pi^{-1}(A)])$  - топологическое замыкание. Множества  $A = \Lambda[A]$  мы называем  *$\Lambda$ -замкнутыми*.

### 1.6.3 Критические точки

На полной гидре, точку  $h \in H_\gamma$  назовем *угловой*, если  $\pi(h) \in V \cup \Gamma$  или  $h$  является точкой самопересечения (как  $p$  на Рис.1.4). Последние суть вершины гидры валентности 4, которые проектируются в  $\Omega \setminus [V \cup \Gamma]$ .

На усеченной гидре  $H_\gamma^T$ , помимо содержащихся в ней угловых точек полной гидры, отнесем к угловым и точки множества  $\rho^{-1}(T)$ . Через  $\text{Corn } H_\gamma^T$  обозначим множество всех угловых точек усеченной гидры.

Решетка  $\mathcal{L}[\text{Corn } H_\gamma^T]$  разделяет гидру на конечное число открытых пространственно-временных интервалов. На каждом интервале амплитуда  $a$  принимает постоянное значение.

Точки, составляющие конечное множество

$$\Theta := \pi(\mathcal{L}[\text{Corn } H_\gamma^T]) \subset \overline{\Omega^T[\gamma]}, \quad (1.42)$$

называются *критическими*. Оставшиеся точки  $x \in \overline{\Omega^T[\gamma]} \setminus \Theta$  назовем *регулярными*. Критические точки делят  $\overline{\Omega^T[\gamma]}$  на части. Множество регулярных точек

$$\Pi := \overline{\Omega^T[\gamma]} \setminus \Theta \quad (1.43)$$

представляет собой совокупность конечного числа открытых интервалов, каждый из которых принадлежит некоторому ребру  $e$ . Таким образом,  $\overline{\Omega^T[\gamma]} = \Pi \cup \Theta$  есть разбиение части графа  $\Omega$ , захваченной волнами, определяемое структурой гидры  $H_\gamma^T$ .

### 1.6.4 Семейства

Пусть  $\omega = (c, c') \subset \Pi$  есть *максимальный* интервал, состоящий из регулярных точек. Максимальность означает, что концы интервала  $c$  и  $c'$  суть критические точки, так что расширение  $\omega$  сохранением регулярности внутренних точек невозможно. Несложно убедиться, что множество

$$\Phi := \Lambda(\omega) = \pi(\mathcal{L}[\pi^{-1}(\omega)]) \quad (1.44)$$

состоит из максимальных интервалов  $\omega_1, \dots, \omega_m$  одинаковой длины:

$$\Phi = \bigcup_{k=1}^m \omega_k, \quad \text{diam } \omega_1 = \dots = \text{diam } \omega_m = \tau(c, c') =: \varepsilon_\Phi, \quad (1.45)$$

где  $\tau$  - расстояние на графе. Будем говорить, что интервалы  $\omega_k$  являются *клетками* семейства  $\Phi$ .

Сравнивая определения (1.40) и (1.44), приходим к представлению

$$\Phi = \bigcup_{x \in \omega} \Lambda[x], \quad (1.46)$$

где  $\omega$  - любая из клеток  $\Phi$ .

Пусть  $\omega' \subset \Pi$  есть максимальный интервал, не лежащий в семействе  $\Phi$ . Он определяет еще одно семейство  $\Phi' = \Lambda[\omega']$ , состоящее из клеток и т.д. В результате множество  $\Pi$  оказывается конечным объединением непересекающихся семейств  $\Phi^1, \dots, \Phi^J$ , каждое из которых состоит из непересекающихся клеток:

$$\Pi = \bigcup_{j=1}^J \Phi^j = \bigcup_{j=1}^J \bigcup_{k=1}^{m_j} \omega_k^j, \quad (1.47)$$

где  $m_j$  - количество клеток в  $\Phi^j$ .

В пару к множеству определенности (1.40), каждому  $x \in \overline{\Omega^T[\gamma]} \setminus \Gamma$  поставим множество

$$\Xi[x] := \rho(\mathcal{L}[\pi^{-1}(x)]) \subset [0, T]. \quad (1.48)$$

При этом, как легко видеть, для  $x \neq x'$  выполнено либо  $\Xi[x] = \Xi[x']$ , либо  $\Xi[x] \cap \Xi[x'] = \emptyset$ . Также определим  $\Xi[B] := \bigcup_{x \in B} \Xi[x]$ .

Пусть  $\Phi = \bigcup_{k=1}^{m_\Phi} \omega_k \subset \Pi$  есть семейство. Легко проверить, что множество

$$\Psi := \Xi[\Phi] = \bigcup_{i=1}^{n_\Psi} \psi_i \subset [0, T] \quad (1.49)$$

состоит из дизъюнктивных временных интервалов  $\psi_i := (t_i, \tilde{t}_i)$  таких, что  $0 \leq t_1 < \tilde{t}_1 \leq t_2 < \tilde{t}_2 \leq \dots \leq t_{n_\Psi} < \tilde{t}_{n_\Psi} \leq T$  и имеющих одинаковую длину  $\tilde{t}_i - t_i = \varepsilon_\Phi$ . Множество  $\Psi$  также будем называть семейством, состоящим из *временных* клеток  $\psi_i$ .



В дальнейшем используются функции  $\tau^i : \Phi \rightarrow [0, T]$ , связанные с разбиением графа на семейства. Они вводятся следующим образом. Пусть  $x \in \Phi$ ; положим

$$\tau^i(x) := \psi_i \cap \rho(\mathcal{L}[\pi^{-1}(x)]), \quad i = 1, \dots, n_\Phi. \quad (1.50)$$

Из того, что для любого  $x_k \in \Lambda[x]$  выполнено  $\mathcal{L}[\pi^{-1}(x)] = \mathcal{L}[\pi^{-1}(x_k)]$ , следует, что эти функции постоянны на множествах определенности:  $\tau^i(x) = \tau^i(x_k)$ . Из определения следует, что

$$\tau^i(x) \neq \tau^{i'}(x) \quad \text{при } i \neq i', \quad x \in \Phi. \quad (1.51)$$

С изменением  $x$  внутри клетки  $\omega = (c, c') \subset \Phi$ , изменяется множество  $\Lambda[x]$ . При этом значение  $\tau^i(x)$  замечает клетку  $\psi_i = (t_i, \tilde{t}_i) \subset \Psi$  и, как нетрудно видеть из определения (1.50), справедливо *одно* из двух представлений

$$\tau^i(x) = t_i + \tau(x, c) \quad \text{или} \quad \tau^i(x) = \tilde{t}_i - \tau(x, c). \quad (1.52)$$

Имея ввиду это представление, можно сказать, что функции  $\tau^i$  зависят от  $x \in \omega$  *линейно*.

Свойство (1.52) позволяет доопределить функции  $\tau^i$  в критических точках: если  $x \in \omega = (c, c')$ ,  $x \rightarrow c$ , то  $\tau^i(c) = t_i$  или  $\tau^i(c) = \tilde{t}_i$ , в зависимости от того, какое из представлений (1.52) имеет место.

Для каждого семейства  $\Phi \subset \Pi$  набор функций  $\tau^i$  свой и, при необходимости, мы отмечаем это обозначением  $\tau_\Phi^i$ . Добавим, что в силу (1.51) и (1.52), равенство  $\tau_\Phi^i(x) = \tau_{\Phi'}^i(x)$  для разных  $\Phi$  и  $\Phi'$  возможно лишь в критических точках  $x$ .

Разбиение графа на семейства мотивировано, в частности, тем, что волны  $u^f$  зависят от управлений  $f$  *локально* в следующем смысле. Как видно из (1.33), значения  $u^f(\cdot, T)|_\Phi$  определяются значениями  $f|_{\Xi[\Phi]}$ . Более того, условия

$$\text{supp } f \subset \Xi[\Phi] \quad \text{и} \quad \text{supp } u^f(\cdot, T) \subset \Phi \quad (1.53)$$

являются равносильными.

Модификация представлений (1.33) и (1.34), о которой говорилось в конце предыдущего раздела, состоит в эффективном представлении волн на множествах определенности. Оно использует функции (векторы) на  $\Lambda[x]$ , к описанию которых мы переходим.

## 1.7 Амплитудные векторы

### 1.7.1 $\alpha$ -представление волн

Текущие рассмотрения по-прежнему относятся к одной граничной вершине  $\gamma \in \Gamma$ , фиксированному  $T > 0$  и соответствующему разбиению  $\Pi$ .

Пусть  $A = \{x_1, \dots, x_m\} \subset \overline{\Omega^T[\gamma]}$  есть конечное  $\Lambda$ -замкнутое множество и

$$\Xi[A] = \rho(\mathcal{L}[\pi^{-1}(A)]) = \{t_1, \dots, t_n\}, \quad (1.54)$$

где  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ . Множеству  $A$  сопоставим функции (*амплитудные векторы*)  $\alpha^i : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, n$  по правилу

$$\alpha^i(x_k) := \begin{cases} a(x_k, t_i), & \text{если } (x_k, t_i) \in H_\gamma^T, \\ 0, & \text{если } (x_k, t_i) \notin H_\gamma^T, \end{cases} \quad k = 1, \dots, m. \quad (1.55)$$

Набор  $\{\alpha^1, \dots, \alpha^n\}$  назовем  $\alpha$ -набором над множеством  $A$ . Для каждого  $x \in \overline{\Omega^T[\gamma]}$  множество определенности  $\Lambda[x]$  является  $\Lambda$ -замкнутым и над ним имеется свой  $\alpha$ -набор.

Как видно из (1.13), величина

$$T_\gamma := \inf \{t > 0 \mid \Omega^T[\gamma] = \Omega\} \quad (1.56)$$

есть время заполнения всего графа  $\Omega$  волнами, идущими (с единичной скоростью) от вершины  $\gamma$ . Справедлива

**Лемма 1.7.1.** *Пусть  $x$  есть точка в  $\overline{\Omega^T[\gamma]}$ ,  $\Lambda[x]$  - ее множество определенности и пусть  $\alpha^1, \dots, \alpha^n$  есть  $\alpha$ -набор над  $\Lambda[x]$ . Если  $T < T_\gamma$ , то векторы  $\alpha^i$  линейно-независимы.*

*Доказательство.* Фиксируем какой-либо момент времени  $t^* = t_i \in \Xi[x]$  с  $i \neq 1$ . В решетке  $\mathcal{L}[\pi^{-1}(x)]$  обязательно найдется точка  $(x^*, t^*)$ , такая, что  $x^*$  принадлежит границе  $\overline{\Omega^{t^*}[\gamma]} \setminus \Omega^{t^*}[\gamma]$  области  $\Omega^{t^*}[\gamma]$ , захваченной волнами к моменту  $t = t^*$ . Эта граница *непуста* в силу  $t^* \leq T < T_\gamma$ ; при этом  $x^* \in \Lambda[x]$ ,  $t^* = \tau(x^*, \gamma)$  и, очевидно,  $a(x^*, t^*) = \alpha^i(x^*) \neq 0$ .

В то же время, во всех точках  $(x^*, t)$  с  $t \in \Xi[x^*] = \Xi[x]$ ,  $t < t^*$  выполнено  $a(x^*, t) = 0$ , поскольку такие  $(x^*, t)$  не лежат на гидре  $H_\gamma^T$ . Последнее соответствует простому факту: при указанных временах  $t$  волны от  $\gamma$  не успевают дойти до точки  $x^*$  (см. (1.13)).

Таким образом, в точках  $(x^*, t)$  с  $t = t_k \in \Xi[x]$ ,  $t_i < t^*$  ( $k = 1, \dots, i-1$ ) имеем  $a(x^*, t_k) = \alpha^k(x^*) = 0$  и, в то же время,  $a(x^*, t^*) = \alpha^i(x^*) \neq 0$ . Это исключает линейную зависимость  $\alpha^i$  от  $\alpha^1, \dots, \alpha^{i-1}$ . В силу произвольности  $i$  получаем линейную независимость всего набора  $\alpha^1, \dots, \alpha^n$ .  $\square$

**Следствие 1.** При  $T < T_\gamma$  справедливо равенство  $\Xi[\overline{\Omega^T[\gamma]}] = [0, T]$ .

В самом деле, из доказательства Леммы 1.7.1 легко видеть, что условие  $T < T_\gamma$  обеспечивает непустоту множества  $\rho^{-1}(t) \subset H_\gamma^T$  при  $0 \leq t \leq T$ , что равносильно равенству  $\Xi[\overline{\Omega^T[\gamma]}] = [0, T]$ .

Вернемся к представлению (1.33). Как нетрудно убедиться, в терминах амплитудных векторов оно может быть приведено к форме

$$u^f(x_k, T)|_{x_k \in \Lambda[x]} = \sum_{i=1}^{n[x]} \varphi(T - t_i) \alpha^i(x_k), \quad \text{где } f = \delta_\gamma(\cdot) \varphi, \quad n[x] := \#\Xi[x], \quad (1.57)$$

представляющей волну не только в точке  $x$ , но и на всем множестве определенности  $\Lambda[x]$ . Более того, согласно (1.46), варьируя точку  $x$  внутри клетки  $\omega \subset \Phi$ , мы представляем волну  $u^f(\cdot, T)$  на всем семействе  $\Phi$ .

Заключительный шаг к модификации исходного представления (1.33) состоит в переходе в (1.57) к более удобной системе амплитудных векторов.

## 1.7.2 $\beta$ -представление волн

Пусть опять  $A = \Lambda[A] = \{x_1, \dots, x_m\} \subset \overline{\Omega^T[\gamma]}$ . Введем пространство  $\mathbf{l}_2(A)$  функций (векторов) на  $A$  со скалярным произведением

$$\langle f, g \rangle = \sum_{x \in A} f(x) g(x) = \sum_{k=1}^m f(x_k) g(x_k). \quad (1.58)$$

Оно содержит подпространство

$$\mathbb{A}[A] := \text{span}\{\alpha^1, \dots, \alpha^n\}, \quad \dim \mathbb{A}[A] \leq n, \quad (1.59)$$

определяемое  $\alpha$ -набором над  $A$ . Используя процедуру Грама-Шмидта, перейдем в  $\mathbb{A}[A]$  к набору

$$\beta^i := \begin{cases} \frac{\alpha^1}{\|\alpha^1\|}, & \text{если } i = 1; \\ \frac{\alpha^i - \sum_{j=1}^{i-1} \langle \alpha^i, \beta^j \rangle \beta^j}{\|\alpha^i - \sum_{j=1}^{i-1} \langle \alpha^i, \beta^j \rangle \beta^j\|}, & \text{если } i \geq 2 \text{ и } \alpha^i \notin \text{span}\{\alpha^1, \dots, \alpha^{i-1}\}; \\ 0, & \text{если } \alpha^i \in \text{span}\{\alpha^1, \dots, \alpha^{i-1}\}, \end{cases} \quad (1.60)$$

где  $\beta^i$  - вектор с компонентами  $\beta^i(x_1), \dots, \beta^i(x_m)$ . Для ненулевых элементов набора выполнено  $\langle \beta^i, \beta^j \rangle = \delta_{ij}$ , а их линейная оболочка, очевидно, совпадает с  $\mathbb{A}[A]$ . Совокупность векторов  $\{\beta^1, \dots, \beta^n\}$  назовем  $\beta$ -набором над множеством  $A$ .

Для каждого  $x \in \overline{\Omega^T[\gamma]}$  над множеством определенности  $\Lambda[x]$  имеется свой  $\beta$ -набор. Согласно Лемме 1.7.1, при  $T < T_\gamma$  векторы  $\alpha^i$  линейно независимы. Как следствие, при таких  $T$  все векторы  $\beta^i$  суть ненулевые и выполнено  $\dim \mathbb{A}[\Lambda[x]] = n \leq m$ .

С использованием  $\beta$ -набора над множеством  $A = \Lambda[x]$  представление (1.57) приобретает окончательный вид

$$u^f(x_k, T)|_{x_k \in \Lambda[x]} = \sum_{j=1}^{n[x]} c_j^\varphi \beta^j(x_k), \quad c_j^\varphi = \sum_{i=1}^{n[x]} \xi_{ji} \varphi(T - t_i), \quad (1.61)$$

где  $\xi$  - матрица перехода, связывающая наборы  $\alpha$  и  $\beta$ .

## 1.8 Гидра $H_\Sigma^T$

Введенные выше понятия и объекты относились к одной граничной вершине  $\gamma$ . В дальнейшем, указывая на это при необходимости, мы используем обозначения  $\overset{\gamma}{\sim}$ ,  $\overset{\gamma}{\mathcal{L}}$ ,  $\Lambda_\gamma$  и т.п.

Для набора граничных вершин  $\Sigma \subseteq \Gamma$  определим пространственно-временной граф

$$H_\Sigma^T := \bigcup_{\gamma \in \Sigma} H_\gamma^T \subset \Omega \times [0, T]. \quad (1.62)$$

На нем задаются аналоги объектов, введенных ранее для отдельных гидр  $H_\gamma^T$ . Опишем их.

- Проекция из  $H_\Sigma^T$  в  $\overline{\Omega_\Sigma^T}$  и в  $[0, T]$  суть  $\pi((x, t)) := x$  и  $\rho((x, t)) := t$ ; под  $\pi^{-1}$  и  $\rho^{-1}$  понимаются полные прообразы в  $H_\Sigma^T$ .
- Соседство  $h \sim_0 h'$  на  $H_\Sigma^T$  по определению означает, что  $\pi(x) = \pi(x')$  и/или  $\rho(x) = \rho(x')$ . Соседство определяет эквивалентность  $h \stackrel{\Sigma}{\sim} h'$ . Через  $\mathcal{L}_\Sigma[h]$  обозначается класс эквивалентности (*решетка*) точки  $h \in H_\Sigma^T$ . Операция  $H_\Sigma^T \supset B \mapsto \mathcal{L}_\Sigma[B]$  есть (топологическое) замыкание.
- Множество  $\Lambda_\Sigma[x] := \pi(\mathcal{L}_\Sigma[\pi^{-1}(x)])$  назовем *множеством определенности* точки  $x \in \overline{\Omega^T[\Sigma]}$ . Отметим очевидное вложение  $\Lambda_\gamma[x] \subset \Lambda_\Sigma[x]$  для  $\gamma \in \Sigma$ . Операция  $\overline{\Omega^T[\Sigma]} \supset A \mapsto \Lambda_\Sigma[A]$  есть (топологическое) замыкание.
- Множество угловых точек  $\text{Corn } H_\Sigma^T$  состоит из всех угловых точек гидр  $H_\gamma^T \subset H_\Sigma^T$  плюс точки (трансверсального) пересечения ребер *разных* гидр  $H_\gamma^T$ . Критические точки в  $\overline{\Omega^T[\Sigma]}$  суть  $\Theta_\Sigma := \pi(\mathcal{L}_\Sigma[\text{Corn } H_\Sigma^T])$ , регулярные суть  $\Pi_\Sigma := \overline{\Omega^T[\Sigma]} \setminus \Theta_\Sigma$ . Имеет место разбиение

$$\Pi_\Sigma = \bigcup_{j=1}^J \Phi^j = \bigcup_{j=1}^J \bigcup_{k=1}^{m_j} \omega_k^j, \quad \text{diam } \omega_k^j = \varepsilon_j := \varepsilon_\Phi \quad (1.63)$$

на семейства и клетки, вполне аналогичное разбиению (1.47).

- Для каждого семейства  $\Phi \subset \Pi_\Sigma$  множество

$$\Xi_\Sigma[\Phi] := \rho(\mathcal{L}_\Sigma[\pi^{-1}(\Phi)]) = \bigcup_{i=1}^{n_\Phi} \psi_i \subset [0, T] \quad (1.64)$$

состоит из временных интервалов  $\psi_i = (t_i, \tilde{t}_i)$  таких, что  $0 \leq t_1 < \tilde{t}_1 \leq t_2 < \tilde{t}_2 \leq \dots \leq t_{n_\Phi} < \tilde{t}_{n_\Phi} \leq T$ , все интервалы имеют одинаковую длину  $\tilde{t}_i - t_i = \varepsilon_\Phi$ .

- На каждом семействе определен набор функций  $\tau^i$ :

$$\tau_\Phi^i(x) := \psi_i \cap \rho(\mathcal{L}_\Sigma[\pi^{-1}(x)]), \quad x \in \Phi, \quad i = 1, \dots, n_\Phi. \quad (1.65)$$

Эти функции постоянны на множествах определенности:  $\tau_\Phi^i(x) = \tau_\Phi^i(x')$  для регулярных  $x, x' \in \Lambda_\Sigma[x]$ . Для них выполнено (1.51) и справедливо представление (1.52). Последнее позволяет доопределить функции  $\tau_\Phi^i$  в критических точках (концах клеток  $\omega$ ) по непрерывности.

Пусть  $\gamma \in \Sigma$ ,  $\Phi \subset \Pi_\Sigma$  и  $x \in \Phi$ . Нетрудно показать, что множество  $\Lambda_\Sigma[x] \cap \Omega^T[\gamma]$  является  $\Lambda_\gamma$ -замкнутым (в  $\Omega^T[\gamma]$ ). Следовательно, на нем имеется  $\beta$ -набор векторов  $\beta_{\gamma\Phi}^1, \dots, \beta_{\gamma\Phi}^{n_\Phi}$ . Условимся считать их заданными на всем  $\Lambda_\Sigma[x]$ , продолжив с  $\Lambda_\Sigma[x] \cap \Omega^T[\gamma]$  на  $\Lambda_\Sigma[x]$  нулем.

Повторив построение для всех  $\gamma \in \Sigma$ , получим совокупность  $\beta$ -наборов

$$\left\{ \beta_{\gamma\Phi}^1, \dots, \beta_{\gamma\Phi}^{n_\Phi} \mid \gamma \in \Sigma \right\}, \quad (1.66)$$

где  $\beta_{\gamma\Phi}^i$  – вектор с компонентами  $(\beta_{\gamma\Phi}^i)_1, \dots, (\beta_{\gamma\Phi}^i)_{m_\Phi}$  и  $m_\Phi = \#\Lambda_\Sigma[x]$ . Каждый из наборов ортонормирован в  $\mathbf{l}_2(\Lambda_\Sigma[x])$ . Соответственно, на каждом семействе  $\Phi \subset \Pi_\Sigma$  заданы функции  $\beta_{\gamma\Phi}^i(\cdot)$ , принимающие постоянные значения  $(\beta_{\gamma\Phi}^i)_k$  на клетках  $\omega_k \subset \Phi$ .

Для данного семейства  $\Phi$  и *разных* вершин  $\gamma \in \Sigma$  набор  $\left\{ \beta_{\gamma\Phi}^1, \dots, \beta_{\gamma\Phi}^{n_\Phi} \right\}$  содержит одно и то же число векторов, равное  $n_\Phi$ , а функции  $\tau_\Phi^i$  суть одни и те же. Тем не менее, примем по определению

$$n_{\gamma\Phi} := n_\Phi; \quad \tau_{\gamma\Phi}^i(x) := \tau_\Phi^i(x), \quad x \in \Phi; \quad \gamma \in \Sigma. \quad (1.67)$$

Это на первый взгляд избыточное обозначение (индекс  $\gamma$ ) окажется удобным в дальнейших рассуждениях.

## Глава 2. Алгебра эйконалов

### 2.1 Достижимые множества и проекторы

Здесь мы рассматриваем задачу (1.8)–(1.11) как динамическую систему и снабжаем ее атрибутами теории управления – пространствами и операторами.

Напомним, что ранее рассматривались пространство управлений (внешнее пространство)  $\mathcal{F}^T = L_2(\Gamma \times [0, T])$  со скалярным произведением (1.14), его подпространства  $\mathcal{F}_\gamma^T$ , также внутреннее пространство  $\mathcal{H} = L_2(\Omega)$  со скалярным произведением (1.5). Для множества  $B \subset \Omega$  определим подпространство  $\mathcal{H}\langle B \rangle := \{y \in \mathcal{H} \mid \text{supp } y \subset \bar{B}\} \subset \mathcal{H}$  функций, локализованных в  $B$ .

Множество волн

$$\mathcal{U}_\gamma^s := \{u^f(\cdot, s) \mid f \in \mathcal{F}_\gamma^T\} \subset \mathcal{H}, \quad 0 \leq s \leq T \quad (2.1)$$

называется *достижимым* (с вершины  $\gamma$ , к моменту  $t = s$ ). Из представлений (1.33) и (1.34) легко усмотреть, что  $\mathcal{U}_\gamma^s$  суть (замкнутые) подпространства в  $\mathcal{H}$ . С ростом  $s$  они расширяются:  $\mathcal{U}_\gamma^s \subset \mathcal{U}_\gamma^{s'}$  при  $s < s'$ .

Отмеченная в (1.53) локальность соответствия "управление – волна" ведет к разложению по семействам

$$\mathcal{U}_\gamma^T = \sum_{\Phi \in \Pi_\Sigma}^{\oplus} \mathcal{U}_\gamma^T \langle \Phi \rangle, \quad (2.2)$$

где подпространство  $\mathcal{U}_\gamma^T \langle \Phi \rangle \subset \mathcal{H} \langle \Phi \rangle$  состоит из волн  $u^f(\cdot, T) \in \mathcal{U}_\gamma^T$ , локализованных в  $\Phi \cap \Omega^T[\gamma]$ . Ортогональность слагаемых – следствие дизъюнктивности семейств:  $\Phi^j \cap \Phi^k = \emptyset$  для  $j \neq k$ .

Фиксируем граничную вершину  $\gamma \in \Sigma$ ; пусть  $P_\gamma^T$  есть проектор в  $\mathcal{H}$  на подпространство  $\mathcal{U}_\gamma^T$ . Обсудим его свойства и опишем его действие.

Как следствие (2.2), имеем представление

$$P_\gamma^T = \sum_{\Phi \in \Pi_\Sigma} P_\gamma^T \langle \Phi \rangle, \quad (2.3)$$

где  $P_\gamma^T \langle \Phi \rangle$  суть проекторы в  $\mathcal{H}$  на  $\mathcal{U}_\gamma^T \langle \Phi \rangle$ . Таким образом, проектор  $P_\gamma^T$  приводится подпространствами  $\mathcal{U}_\gamma^T \langle \Phi \rangle$  и, следовательно, его характеристика сводится к описанию действия проекторов  $P_\gamma^T \langle \Phi \rangle$ .

Как показано в [8], проекторы  $P_\gamma^T \langle \Phi \rangle$  выражаются через векторы (1.66) и отвечающие им функции  $\beta_{\gamma\Phi}^i(\cdot)$  следующим образом:

$$(P_\gamma^T \langle \Phi \rangle y)(x) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n_{\gamma\Phi}} \langle y|_{\Lambda_\gamma[x]}, \beta_{\gamma\Phi}^i \rangle \beta_{\gamma\Phi}^i(x), & x \in \Phi; \\ 0, & x \in \Omega \setminus \Phi; \end{cases}, \quad (2.4)$$

где  $y \in \mathcal{H}$  - произвольная функция на графе<sup>1</sup>. Это представление выводится из представления (1.61), для получения которого и вводились векторы  $\beta^i$ .

Как легко видеть из (2.3) и (2.4), если проектируемая на  $\mathcal{U}_\gamma^T$  функция  $y \in \mathcal{H}$  непрерывна и такова, что  $y|_{\Lambda_\gamma[x]} \equiv 0$ , то и  $(P_\gamma^T y)|_{\Lambda_\gamma[x]} \equiv 0$ . Другими словами, значения проекции  $P_\gamma^T y$  на множестве  $\Lambda_\gamma[x]$  вполне определяются значениями  $y$  на  $\Lambda_\gamma[x]$ . Именно в этом состоит повод называть  $\Lambda_\gamma[x]$ , а с ними и  $\Lambda_\Sigma[x]$ , множествами определенности.

Напомним, что векторы  $\beta_{\gamma\Phi}^i$  суть элементы подпространства  $\mathbb{A}[\Lambda_\Sigma[x]] \subset \mathbf{l}_2(\Lambda_\Sigma[x])$ . Из сказанного выше следует, что проектор  $P_\gamma^T$  определяет в  $\mathbf{l}_2(\Lambda_\Sigma[x])$  оператор  $p_{\gamma\Phi}[x]$ , проектирующий на  $\mathbb{A}[\Lambda_\gamma[x]] \subset \mathbb{A}[\Lambda_\Sigma[x]]$ . Пусть  $\chi_1, \dots, \chi_{m_\Phi}$  есть (стандартный) базис в  $\mathbf{l}_2(\Lambda_\Sigma[x])$ , состоящий из индикаторов точек множества  $\Lambda_\Sigma[x]$ ; в нем  $(\beta_{\gamma\Phi}^i)_k = \langle \beta_{\gamma\Phi}^i, \chi_k \rangle$ . Согласно (2.4), в этом базисе матрица проектора  $p_{\gamma\Phi}[x]$  принимает вид

$$\check{p}_{\gamma\Phi}[x] = B_{\gamma\Phi}^*[x] B_{\gamma\Phi}[x], \quad B_{\gamma\Phi}[x] := \begin{pmatrix} (\beta_{\gamma\Phi}^1)_1(x) & \dots & (\beta_{\gamma\Phi}^1)_{m_\Phi}(x) \\ (\beta_{\gamma\Phi}^2)_1(x) & \dots & (\beta_{\gamma\Phi}^2)_{m_\Phi}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ (\beta_{\gamma\Phi}^{n_{\gamma\Phi}})_1(x) & \dots & (\beta_{\gamma\Phi}^{n_{\gamma\Phi}})_{m_\Phi}(x) \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

## 2.2 Эйконал

Семейство  $\{P_\gamma^s \mid 0 \leq s \leq T\}$  проекторов в  $\mathcal{H}$  на достижимые множества  $\mathcal{U}_\gamma^s$  определяет оператор эйконала (коротко – *эйконал*)

$$E_\gamma^T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}, \quad E_\gamma^T := \int_0^T s dP_\gamma^s. \quad (2.6)$$

<sup>1</sup>В точном смысле, (2.4) есть представление "почти всюду" в  $\Omega$ . Для  $y \in C(\Omega)$  оно верно "всюду".



Из определения следует, что  $E_\gamma^T$  есть ограниченный самосопряженный положительный оператор. Как и проектор  $P_\gamma^T$ , эйконал  $E_\gamma^T$  приводится подпространствами  $\mathcal{H}\langle\Phi\rangle$ : для него справедливы соотношения  $E_\gamma^T \mathcal{H}\langle\Phi\rangle \subset \mathcal{H}\langle\Phi\rangle$  и разложение

$$E_\gamma^T = \sum_{\Phi \subset \Pi} E_\gamma^T \langle\Phi\rangle, \quad (2.7)$$

где  $E_\gamma^T \langle\Phi\rangle := E_\gamma^T|_{\Phi}$  есть сужение  $E_\gamma^T$ , действующее в  $\mathcal{H}\langle\Phi\rangle$ .

Как показано в [8], справедливо согласованное с (2.4) представление

$$(E_\gamma^T \langle\Phi\rangle y)(x) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n_{\gamma\Phi}} \tau_{\gamma\Phi}^i(x) \langle y|_{\Lambda_\gamma[x]}, \beta_{\gamma\Phi}^i \rangle \beta_{\gamma\Phi}^i(x), & x \in \Phi; \\ 0, & x \in \Omega \setminus \Phi; \end{cases}, \quad (2.8)$$

в котором  $y \in \mathcal{H}$  произвольно, а функции  $\tau_{\gamma\Phi}^i$  даются определениями (1.65) и (1.67).

Оператор  $E_\gamma^T$  индуцирует в  $\mathbf{l}_2(\Lambda_\Sigma[x])$  оператор  $e_{\gamma\Phi}[x]$ . Согласно (2.5) и (2.8), в базисе  $\chi_1, \dots, \chi_{m_\Phi}$  его матрица имеет вид

$$\check{e}_{\gamma\Phi}[x] = B_{\gamma\Phi}^*[x] D_{\gamma\Phi}[x] B_{\gamma\Phi}[x]; \quad (2.9)$$

$$B_{\gamma\Phi}[x] := \begin{pmatrix} (\beta_{\gamma\Phi}^1)_1(x) & \dots & (\beta_{\gamma\Phi}^1)_{m_\Phi}(x) \\ (\beta_{\gamma\Phi}^2)_1(x) & \dots & (\beta_{\gamma\Phi}^2)_{m_\Phi}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ (\beta_{\gamma\Phi}^{n_{\gamma\Phi}})_1(x) & \dots & (\beta_{\gamma\Phi}^{n_{\gamma\Phi}})_{m_\Phi}(x) \end{pmatrix}, \quad (2.10)$$

$$D_{\gamma\Phi}[x] = \text{diag}\{\tau_{\gamma\Phi}^i(x)\}_{i=1}^{n_{\gamma\Phi}}. \quad (2.11)$$

Подпространство  $\Lambda_{\gamma\Phi}[x] = \text{span}\{\beta_{\gamma\Phi}^1, \dots, \beta_{\gamma\Phi}^{n_{\gamma\Phi}}\} \subset \mathbf{l}_2(\Lambda_\Sigma[x])$  приводит эту матрицу, а ее ненулевой блок в базисе  $\beta_{\gamma\Phi}^1, \dots, \beta_{\gamma\Phi}^{n_{\gamma\Phi}}$  есть  $\text{diag}\{\tau_{\gamma\Phi}^i(x)\}_{i=1}^{n_{\gamma\Phi}}$ . Как видно из (1.51), все ее собственные значения  $\tau_{\gamma\Phi}^i(x)$  внутри клеток семейства *различны*; при изменении  $x$  в  $\omega \subset \Phi$  они заматают интервалы  $(t_i, \tilde{t}_i) \subset \Xi[\Phi]$ . Согласно Предложению 1, при  $T < T_\gamma$  объединение (по всем семействам  $\Phi \subset \Pi$ ) всех сегментов  $[t_i, \tilde{t}_i]$  совпадает  $[0, T]$ .

Из приведенных рассмотрений легко усматриваются общие свойства эйконала как оператора в  $\mathcal{H}$  (см., например, [30]).

**Предложение 1.** Для эйконала  $E_\gamma^T$  выполнено  $\overline{\text{Ran } E_\gamma^T} = \mathcal{U}_\gamma^T$  и  $\text{Ker } E_\gamma^T = \mathcal{H} \ominus \mathcal{U}_\gamma^T$ . Эйконал приводится частями достижимого множества:

$E_\gamma^T \mathcal{U}_\gamma^T \langle \Phi \rangle \subset \mathcal{U}_\gamma^T \langle \Phi \rangle$ ,  $\Phi \subset \Pi_\Sigma$ . При  $T < T_\gamma$  оператор  $E_\gamma^T|_{\mathcal{U}_\gamma^T}$  имеет простой абсолютно непрерывный спектр, заполняющий сегмент  $[0, T]$ .

**Замечание 1.** Из представления (2.8) также следует, что при временах  $T > T_\gamma$  спектр  $E_\gamma^T|_{\mathcal{U}_\gamma^T}$  есть объединение сегментов  $[0, T_0] \cup [T_1, T_2] \cup \dots \cup [T_{N-1}, T_N]$ , где  $T_\gamma \leq T_0 < T_1 < T_2 < \dots < T_N \leq T$ , а каждый сегмент состоит из областей значений функций  $\tau_{\gamma\Phi}^i$  (замыканий временных клеток  $\psi_{\gamma\Phi}^i$  – см. (1.49)).

## 2.3 Параметризация

### 2.3.1 Параметризация семейства $\Phi$

Выберем семейство  $\Phi = \bigcup_{k=1}^{m_\Phi} \omega_k \subset \Pi_\Sigma$ ; пусть  $\omega = (c, c') \subset \Phi$  – одна из его клеток. Напомним, что все клетки имеют одинаковую длину  $\varepsilon_\Phi = \tau(c, c')$ . Для  $x \in \omega$  введем обозначение  $x = x(r)$ , если  $\tau(c, x) = r$ . Наряду с  $x$ , множество определенности также оказывается параметризованным:  $\Lambda_\Sigma[x(r)] = \{x_k(r)\}_{k=1}^{m_\Phi}$ . При изменении  $r$  в интервале  $(0, \varepsilon_\Phi)$  точки  $x_k(r)$  непрерывно меняют положение и заматают клетки  $\omega_k$ . Таким образом, семейство  $\Phi$  параметризовано.

Параметризованы по  $r$  и все элементы представлений (2.4) и (2.8): векторы

$$\begin{aligned} \beta_{\gamma\Phi}^i &= \{(\beta_{\gamma\Phi}^i)_k(r)\}_{k=1}^{m_\Phi}, \quad (\beta_{\gamma\Phi}^i)_k(r) := \beta_{\gamma\Phi}^i(x_k(r)) = \\ &= (\beta_{\gamma\Phi}^i)_k = \text{const}, \quad 0 < r < \varepsilon_\Phi \end{aligned} \quad (2.12)$$

и функции  $\tau_{\gamma\Phi}^i(r) := \tau_{\gamma\Phi}^i(x(r))$ . Последние, согласно (1.52), принимают значения

$$\tau_{\gamma\Phi}^i(r) = t_{i\Phi} + r \quad \text{или} \quad \tau_{\gamma\Phi}^i(r) = \tilde{t}_{i\Phi} - r = (t_{i\Phi} + \varepsilon_\Phi) - r. \quad (2.13)$$

Отметим, что параметризаций семейства  $\Phi$  суть две: принятая выше с  $r = \tau(x, c)$  и отвечающая параметру  $r = \tau(x, c')$ . Они вполне равноправны. В дальнейшем будем считать, что каждое семейство  $\Phi \subset \Pi_\Sigma$  параметризовано каким-либо одним из двух способов.

Параметризация определяет матричные представления функций и операторов на графе.

Пусть  $\Phi \subset \Pi_\Sigma$  есть параметризованное семейство,  $y \in \mathcal{H}$  - функция на графе,  $x = x(r) \in \Lambda_\Sigma[x(r)] = \{x_k(r)\}_{k=1}^{m_\Phi} \subset \Phi$ ,  $0 < r < \varepsilon_\Phi$ . Легко проверить, что отображение

$$U_\Phi : \mathcal{H}\langle\Phi\rangle \rightarrow L_2([0, \varepsilon_\Phi]; \mathbb{R}^{m_\Phi}); (U_\Phi y)(r) := \begin{pmatrix} y(x_1(r)) \\ \dots \\ y(x_{m_\Phi}(r)) \end{pmatrix}, \quad r \in (0, \varepsilon_\Phi) \quad (2.14)$$

унитарно. Для каждой вершины  $\gamma \in \Sigma$  определим (постоянные – см. (2.12)) столбцы и образованные ими матрицы

$$\beta_{\gamma\Phi}^i = \begin{pmatrix} (\beta_{\gamma\Phi}^i)_1 \\ \dots \\ (\beta_{\gamma\Phi}^i)_{m_\Phi} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m_\Phi}, \quad B_{\gamma\Phi} := \begin{pmatrix} (\beta_{\gamma\Phi}^1)_1 & \dots & (\beta_{\gamma\Phi}^1)_{m_\Phi} \\ (\beta_{\gamma\Phi}^2)_1 & \dots & (\beta_{\gamma\Phi}^2)_{m_\Phi} \\ \dots & \dots & \dots \\ (\beta_{\gamma\Phi}^{n_{\gamma\Phi}})_1 & \dots & (\beta_{\gamma\Phi}^{n_{\gamma\Phi}})_{m_\Phi} \end{pmatrix}; \quad (2.15)$$

введем матрицы

$$D_{\gamma\Phi}(r) := \{\tau_{\gamma\Phi}^i(r) \delta_{ij}\}_{i,j=1}^{n_{\gamma\Phi}}, \quad r \in (0, \varepsilon_\Phi), \quad (2.16)$$

где  $\tau_{\gamma\Phi}^i(r)$  имеют вид (2.13). При изменении параметра  $r$  матрица  $B_{\gamma\Phi}$  не меняется в силу постоянства ее элементов в клетках  $\omega_1, \dots, \omega_{m_\Phi}$  семейства  $\Phi$ . Вместе с ней постоянна и матрица  $B_{\gamma\Phi}^* B_{\gamma\Phi}$ . Последняя, в силу того, что столбцы  $\beta_{\gamma\Phi}^i$  составляют ортонормированный набор, является проектором в  $\mathbb{R}^{m_\Phi}$  на подпространство

$$\mathcal{A}_\gamma[\Phi] := \text{span} \left\{ \beta_{\gamma\Phi}^1, \dots, \beta_{\gamma\Phi}^{n_{\gamma\Phi}} \right\} = [B_{\gamma\Phi}^* B_{\gamma\Phi}] \mathbb{R}^{m_\Phi}. \quad (2.17)$$

Матрица-проектор  $B_{\gamma\Phi}^* B_{\gamma\Phi}$  допускает разложение в сумму попарно ортогональных одномерных проекторов

$$B_{\gamma\Phi}^* B_{\gamma\Phi} = \sum_{i=1}^{n_{\gamma\Phi}} P_{\gamma\Phi}^i, \quad P_{\gamma\Phi}^i := \langle \cdot, \beta_{\gamma\Phi}^i \rangle \beta_{\gamma\Phi}^i, \quad (2.18)$$

где  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  – стандартное скалярное произведение в  $\mathbb{R}^{m_\Phi}$ . В соответствии с (2.8) имеем представление:

$$(U_\Phi E_\gamma^T \langle \Phi \rangle y)(r) = [B_{\gamma\Phi}^* D_{\gamma\Phi}(r) B_{\gamma\Phi}] (U_\Phi y)(r), \quad r \in (0, \varepsilon_\Phi) \quad (2.19)$$

с матрицами

$$B_{\gamma\Phi}^* D_{\gamma\Phi}(r) B_{\gamma\Phi} = U_\Phi E_\gamma^T \langle \Phi \rangle U_\Phi^{-1} \stackrel{(2.8), (2.18)}{=} \sum_{i=1}^{n_{\gamma\Phi}} \tau_{\gamma\Phi}^i(r) P_{\gamma\Phi}^i. \quad (2.20)$$

### 2.3.2 Параметризация разбиения $\Pi_\Sigma$

Опишем параметризацию пространств и операторов, отвечающую разбиению  $\Pi_\Sigma$  в целом. Аналог разложения (2.2) приобретает вид

$$\mathcal{U}_\Sigma^T = \sum_{\Phi \subset \Pi_\Sigma}^\oplus \mathcal{U}_\Sigma^T \langle \Phi \rangle, \quad \mathcal{U}_\Sigma^T \langle \Phi \rangle := \text{span} \{ \mathcal{U}_\gamma^T \langle \Phi \rangle \mid \gamma \in \Sigma \}, \quad (2.21)$$

причем каждое из подпространств-слагаемых приводит все эйконалы одновременно:

$$E_\gamma^T \mathcal{U}_\Sigma^T \langle \Phi \rangle \subset \mathcal{U}_\Sigma^T \langle \Phi \rangle, \quad \gamma \in \Sigma. \quad (2.22)$$

Используя параметризации в семействах, имеем:

$$U_\Phi \mathcal{H} \langle \Phi \rangle = L_2([0, \varepsilon_\Phi]; \mathbb{R}^{m_\Phi}), \quad U_\Phi \mathcal{U}_\Sigma^T [\Phi] = L_2([0, \varepsilon_\Phi]; \mathcal{A}_\Sigma[\Phi]), \quad (2.23)$$

где  $\mathcal{A}_\Sigma[\Phi] := \text{span} \{ \mathcal{A}_\gamma[\Phi] \mid \gamma \in \Sigma \}$ , а части  $E_\gamma^T \langle \Phi \rangle$  эйконалов умножают элементы  $L_2([0, \varepsilon_\Phi]; \mathbb{R}^{m_\Phi})$  на матрицы-функции (2.20).

**Соглашение 1.** Условимся об обозначениях. Для пространств  $\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_n$  сумма  $\mathcal{S} = \oplus \sum_j \mathcal{S}_j$  есть пространство наборов  $s = \{s_1, \dots, s_n\}$ ,  $s_j \in \mathcal{S}_j$  (с покомпонентными операциями). Для операторов  $A_1, \dots, A_n$ ,  $A_j \in \text{End } \mathcal{S}_j$ , сумма  $A = \oplus \sum_j A_j \in \text{End } \mathcal{S}$  есть оператор, действующий по правилу  $As := \{A_1 s_1, \dots, A_n s_n\}$ . Для матриц  $M_1, \dots, M_n$ ,  $M_j \in \mathbb{M}^{z_j}$ , сумма  $M = \oplus \sum_j M_j \in \mathbb{M}^{z_1 + \dots + z_n}$  есть блочно-диагональная матрица с блоками  $M_1, \dots, M_n$  (мы также пишем  $[M]_j = M_j$ ). Для алгебр  $\{\mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_n\}$ ,  $\mathfrak{A} = \oplus_j \mathfrak{A}_j$  есть прямая сумма алгебр-слагаемых (мы также пишем  $[\mathfrak{A}]_j = \mathfrak{A}_j$  и называем  $\mathfrak{A}_j$  блоками).

Параметризация всего  $\Pi_\Sigma$  реализуется оператором  $U := \oplus \sum_{\Phi \subset \Pi_\Sigma} U_\Phi$ :

$$U \mathcal{H} \langle \Omega^T[\Sigma] \rangle = \oplus \sum_{\Phi \subset \Pi_\Sigma} L_2([0, \varepsilon_\Phi]; \mathbb{R}^{m_\Phi}); \quad (2.24)$$

$$U E_\gamma^T U^{-1} = \oplus \sum_{\Phi \subset \Pi_\Sigma} U_\Phi E_\gamma^T \langle \Phi \rangle U_\Phi^{-1} \stackrel{(2.20)}{=} \oplus \sum_{\Phi \subset \Pi_\Sigma} \sum_{i=1}^{n_{\gamma\Phi}} \tau_{\gamma\Phi}^i P_{\gamma\Phi}^i \quad \gamma \in \Sigma. \quad (2.25)$$

## 2.4 Смещенные эйконалы

В техническом отношении, при описании алгебры, порожденной эйконалами, удобно использовать операторы (*смещенные эйконалы*)

$$\dot{E}_\gamma^T := \int_0^T (s+1) dP_\gamma^s = E_\gamma^T + P_\gamma^T. \quad (2.26)$$

Установленные ранее свойства и представления для  $E_\gamma^T$  очевидным образом переформулируются для  $\dot{E}_\gamma^T$ . Так, аналог представления (2.25) имеет вид:

$$\begin{aligned} U \dot{E}_\gamma^T U^{-1} &= \bigoplus \sum_{\Phi \subset \Pi_\Sigma} U_\Phi \dot{E}_\gamma^T \langle \Phi \rangle U_\Phi^{-1} = \bigoplus \sum_{\Phi \subset \Pi_\Sigma} [B_{\gamma\Phi}^* \dot{D}_{\gamma\Phi}(\cdot) B_{\gamma\Phi}] = \\ &\stackrel{(2.25)}{=} \bigoplus \sum_{\Phi \subset \Pi_\Sigma} \sum_{i=1}^{n_{\gamma\Phi}} \dot{\tau}_{\gamma\Phi}^i P_{\gamma\Phi}^i, \quad \gamma \in \Sigma, \end{aligned} \quad (2.27)$$

где  $\dot{D}_{\gamma\Phi}(\cdot) := D_{\gamma\Phi}(\cdot) + I$ ,  $I$  – единичная матрица соответствующей размерности и  $\dot{\tau}_{\gamma\Phi}^i(r) := \tau_{\gamma\Phi}^i(r) + 1$ . Аналог Предложения 1 имеет вид

**Предложение 2.** Для оператора  $\dot{E}_\gamma^T$  выполнено  $\text{Ran } \dot{E}_\gamma^T = \mathcal{U}_\gamma^T$ ,  $\text{Ker } \dot{E}_\gamma^T = \mathcal{H} \ominus \mathcal{U}_\gamma^T$  и  $\dot{E}_\gamma^T \mathcal{U}_\gamma^T \langle \Phi \rangle \subset \mathcal{U}_\gamma^T \langle \Phi \rangle$ ,  $\Phi \subset \Pi$ . При  $T < T_\gamma$  он имеет собственное значение 0 бесконечной кратности и простой абсолютно непрерывный спектр, заполняющий сегмент  $[1, T+1]$ . При  $T > T_\gamma$ , согласно Замечанию 1, выполнено

$$\begin{aligned} \sigma(\dot{E}_\gamma^T|_{\mathcal{U}_\gamma^T}) &= \sigma_{ac}(\dot{E}_\gamma^T) = \\ &= [1, T_0 + 1] \cup [T_1 + 1, T_2 + 1] \cup \dots \cup [T_{N-1} + 1, T_N + 1], \end{aligned} \quad (2.28)$$

где  $T_\gamma \leq T_0 < T_1 < T_2 < \dots < T_N \leq T$ , а сегменты суть объединения областей значений функций  $\dot{\tau}_{\gamma\Phi}^i$  (смещенных на 1 временных клеток  $\psi_{\gamma\Phi}^i$ ).

## 2.5 Общие факты об алгебрах

### 2.5.1 Определения

Напомним, что  $C^*$ -алгеброй называется банахова алгебра с инволюцией [31; 32]. Таковыми, в частности, являются алгебры ограниченных операторов  $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$  в гильбертовом пространстве  $\mathcal{H}$ , в которых роль инволюции играет операторное сопряжение. Запись  $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$  будет означать, что  $C^*$ -алгебры  $\mathfrak{A}$  и  $\mathfrak{B}$  связаны изометрическим  $*$ -изоморфизмом (далее коротко – *изометричны*). Для множества  $S \subset \mathfrak{A}$  через  $\vee S$  обозначается минимальная  $C^*$ -(под)алгебра в  $\mathfrak{A}$ , содержащая  $S$ .

Представление  $C^*$ -алгебры  $\mathfrak{A}$  это гомоморфизм  $\pi : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}(H)$ , где  $H$  – гильбертово пространство. Эквивалентность представлений  $\pi \sim \pi'$  означает, что  $\iota\pi(a) = \pi'(a)\iota$ ,  $a \in \mathfrak{A}$ , где  $\iota : H \rightarrow H'$  – изометрия пространств представлений. Представление *неприводимо*, если операторы  $\pi(\mathfrak{A})$  не имеют общего ненулевого инвариантного подпространства в  $H$ .

Спектром  $C^*$ -алгебры  $\mathfrak{A}$  называется множество  $\widehat{\mathfrak{A}}$  классов эквивалентности ее неприводимых представлений. Класс эквивалентности (точку спектра), отвечающий представлению  $\pi$ , будем обозначать через  $\hat{\pi}$ . Спектр снабжен канонической топологией Джекобсона [31; 32].

Изометрия алгебр  $u : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$  определяет соответствие представлений

$$\widehat{\mathfrak{A}} \ni \pi \rightarrow u_*\pi \in \widehat{\mathfrak{B}}, \quad (u_*\pi)(b) := \pi(u^{-1}(b)), \quad b \in \mathfrak{B}, \quad (2.29)$$

которое продолжается до канонического гомеоморфизма спектров:

$$\widehat{\mathfrak{A}} \ni \hat{\pi} \rightarrow u_*\hat{\pi} \in \widehat{\mathfrak{B}}, \quad u_*\hat{\pi} := \{ u_*\pi \mid \pi \in \hat{\pi} \}. \quad (2.30)$$

### 2.5.2 Стандартные алгебры и их спектр

Под  $M^n$  понимается алгебра вещественных  $n \times n$ -матриц, рассматриваемых как операторы в  $\mathbb{R}^n$  и снабженных соответствующей (операторной) нормой. Она

неприводима.  $C^*$ -подалгебру  $\mathfrak{A} \subset \mathbb{M}^n$  также условимся считать неприводимой, если выполнено  $\mathfrak{A} \cong \mathbb{M}^k$ , где  $k \leq n$ . Такая алгебра, в подходящем базисе в  $\mathbb{R}^n$ , принимает блочно-диагональную форму и состоит из двух блоков, один из которых есть  $\mathbb{M}^k$ , а второй (если имеется) – нулевой.

Справедливо утверждение

**Предложение 3.** *Любая  $C^*$ -подалгебра алгебры  $\mathbb{M}^n$  изометрична прямой сумме  $\bigoplus_k \mathbb{M}^{n_k}$ , где  $\sum_k n_k \leq n$ .*

Через  $C([a,b], \mathbb{M}^n)$  обозначается алгебра непрерывных  $\mathbb{M}^n$ -значных функций с нормой  $\|c\| = \sup_{a \leq t \leq b} \|c(t)\|_{\mathbb{M}^n}$ . Тем же символом мы обозначаем операторную (под)алгебру в  $\mathfrak{B}(L_2([a,b]; \mathbb{R}^n))$ , элементы которой умножают квадратично-суммируемые  $\mathbb{R}^n$ -значные функции на функции из  $C([a,b], \mathbb{M}^n)$ . Соответствие  $c \mapsto c \cdot$  устанавливает изометрию этих алгебр.

Приведем сводку известных результатов, относящихся к алгебрам непрерывных матричнозначных функций.

**Предложение 4.** *Пусть  $\mathfrak{P} \subset \mathbb{M}^n$  и  $C^*$ -подалгебра  $\mathfrak{A} \subset C([a,b]; \mathfrak{P})$  такова, что для любых  $t, t' \in [a,b]$  и  $p, p' \in \mathfrak{P}$  найдется элемент  $u \in \mathfrak{A}$ , для которого выполнено  $u(t) = p, u(t') = p'$ . Тогда  $\mathfrak{A} = C([a,b]; \mathfrak{P})$ .*

(см. [31]).

**Предложение 5.** *Представления*

$$\pi_t : C([a,b], \mathbb{M}^n) \rightarrow \mathbb{M}^n, \quad \pi_t(\varphi) := \varphi(t) \quad (2.31)$$

неприводимы; их классы эквивалентности исчерпывают спектр алгебры  $C([a,b], \mathbb{M}^n)$ . Для любого неприводимого представления  $\pi$  алгебры  $C([a,b], \mathbb{M}^n)$  существует единственная точка  $t \in [a,b]$ , такая, что  $\pi \sim \pi_t$ .

В алгебре  $C([a,b]; \mathbb{M}^n)$  содержатся подалгебры

$$\dot{C}([a,b]; \mathbb{M}^n) := \{\varphi \in C([a,b]; \mathbb{M}^n) \mid \varphi(a) \in \mathbb{M}_a, \varphi(b) \in \mathbb{M}_b\}, \quad (2.32)$$

где  $\mathbb{M}_a, \mathbb{M}_b$  суть  $C^*$ -подалгебры  $\mathbb{M}^n$ , которые называем *граничными*. Из Предложения 3 следует, что

$$\mathbb{M}_a \cong \bigoplus_{k=1}^{n_a} \mathbb{M}^{\nu_k}, \quad \nu_1 + \dots + \nu_{n_a} \leq n; \quad \mathbb{M}_b \cong \bigoplus_{k=1}^{n_b} \mathbb{M}^{\lambda_k}, \quad \lambda_1 + \dots + \lambda_{n_b} \leq n. \quad (2.33)$$

В случае  $\mathbb{M}_a = \mathbb{M}_b = \mathbb{M}^n$  имеем  $\dot{C}([a,b]; \mathbb{M}^n) = C([a,b]; \mathbb{M}^n)$ . Алгебры  $\dot{C}([a,b]; \mathbb{M}^n)$  мы будем называть *стандартными*.

Спектр стандартной алгебры состоит из классов  $\hat{\pi}_t$ ,  $t \in (a,b)$  неприводимых представлений вида (2.31) и представлений  $\hat{\pi}_a, \hat{\pi}_b$  алгебр  $\mathbb{M}_a, \mathbb{M}_b$ , которые могут оказаться приводимыми. Если, например,  $n_a \geq 2$ , то  $\pi_a$  распадается на неприводимые представления

$$\pi_a^k : \varphi(a) \mapsto [\varphi(a)]^k \in \mathbb{M}^{n_a k}, \quad (2.34)$$

где  $[\dots]^k$  есть  $k$ -й блок блочно-диагональной матрицы в представлениях (2.33). В этом случае мы говорим, что  $\hat{\pi}_a^1, \dots, \hat{\pi}_a^{n_a}$  образуют *кластер* в спектре стандартной алгебры. Этот термин мотивирован тем, что они неотделимы друг от друга в топологии Джекобсона. Аналогичный кластер может иметься и на правом конце  $t = b$ . В то же время, все  $\hat{\pi}_t$  с разными  $t \in (a,b)$  отделимы друг от друга и от кластеров (см. [8], [9]). Спектр алгебры  $C([a,b]; \mathbb{M}^n)$  кластеров не содержит.

### 2.5.3 Алгебра эйконолов и парциальные алгебры

Центральным объектом работы является *алгебра эйконолов* графа  $\Omega$

$$\mathfrak{E}_\Sigma^T := \vee \{E_\gamma^T \mid \gamma \in \Sigma\} \subset \mathfrak{B}(L_2(\Omega)). \quad (2.35)$$

Входящие в нее подалгебры

$$\mathfrak{E}_\gamma^T := \vee E_\gamma^T, \quad \gamma \in \Sigma \quad (2.36)$$

мы называем *парциальными*. В рассуждениях удобно использовать "смещенные" алгебры

$$\dot{\mathfrak{E}}_\gamma^T := \vee \dot{E}_\gamma^T, \quad \dot{\mathfrak{E}}_\Sigma^T := \vee \{\dot{E}_\gamma^T \mid \gamma \in \Sigma\} = \vee \{\dot{\mathfrak{E}}_\gamma^T \mid \gamma \in \Sigma\}. \quad (2.37)$$

Переход от  $\mathfrak{E}_\gamma^T$  к  $\dot{\mathfrak{E}}_\gamma^T$  состоит в добавлении проектора  $P_\gamma^T$ , играющего роль единицы в  $\dot{\mathfrak{E}}_\gamma^T$  (см. (2.26)), а алгебра  $\mathfrak{E}_\Sigma^T$  оказывается подалгеброй в  $\dot{\mathfrak{E}}_\Sigma^T$ ,

Согласно функциональному исчислению самосопряженных операторов и в силу ортогональности проекторов  $P_{\gamma\Phi}^i$  в (2.27), имеем:

$$\varphi(\dot{E}_\gamma^T) = \int_{\sigma_{ac}(\dot{E}_\gamma^T)} \varphi(s) dP_\gamma^s = U^{-1} \left[ \bigoplus_{\Phi \subset \Pi_\Sigma} \sum_{i=1}^{n_{\gamma\Phi}} (\varphi \circ \dot{\tau}_{\gamma\Phi}^i) P_{\gamma\Phi}^i \right] U \quad (2.38)$$



для  $\varphi \in C(\sigma_{\text{ac}}(\dot{E}_\gamma^T))$ . Задаваемое первым равенством соответствие  $\varphi(\dot{E}_\gamma^T) \leftrightarrow \varphi$  есть изометрия алгебр  $\dot{\mathfrak{E}}_\gamma^T$  и  $C(\sigma_{\text{ac}}(\dot{E}_\gamma^T))$ .

**Соглашение 2.** Далее всюду, если не оговорено противное, мы имеем дело только со смещенными эйконалами и опускаем  $(\dot{\phantom{x}})$  в относящихся к ним обозначениях:  $\dot{E}_\gamma^T \equiv E_\gamma^T$ ,  $\dot{\tau}_{\gamma l}^k \equiv \tau_{\gamma l}^k$ ,  $\dot{\psi}_{\gamma l}^k \equiv \psi_{\gamma l}^k$ ,  $\dot{\mathfrak{E}}_\Sigma^T \equiv \mathfrak{E}_\Sigma^T$  и т.д.

### Глава 3. Алгебры, образованные одномерными проекторами

Важная роль таких алгебр в изучении структуры алгебры эйконалов ожидаема и видна из представления (2.27).

#### 3.1 Приводимость

Пусть в гильбертовом пространстве  $\mathcal{G}$  со скалярным произведением  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  задан набор одномерных проекторов  $P^1, \dots, P^n : P^i = \langle \cdot, \beta^i \rangle \beta^i$ , где  $\|\beta^i\| = 1$ ; обозначим

$$\mathcal{A} := \text{span} \{\beta^1, \dots, \beta^n\}; \quad \mathfrak{P} := \vee \{P^1, \dots, P^n\} \subset \mathfrak{B}(\mathcal{G}). \quad (3.1)$$

На наборе  $B := \{\beta^1, \dots, \beta^n\}$  введем отношение:  $\beta^i \sim_0 \beta^{i'}$  если  $\langle \beta^i, \beta^{i'} \rangle \neq 0$ . Оно определяет эквивалентность (транзитивное замыкание):  $\beta^i \sim \beta^{i'}$ , если найдутся векторы  $\beta^{i_1}, \dots, \beta^{i_k}$  такие, что  $\beta^i \sim_0 \beta^{i_1} \sim_0 \dots \sim_0 \beta^{i_k} \sim_0 \beta^{i'}$ . Перенесем эту эквивалентность на проекторы, приняв  $P^i \sim P^{i'}$  если  $\beta^i \sim \beta^{i'}$ .

Пусть  $B = B_1 \cup \dots \cup B_q$  есть разбиение на классы эквивалентности; обозначим  $\mathcal{A}_k := \text{span } B_k$ . Из определения отношения  $\sim$  легко следует:  $\mathcal{A}_k \perp \mathcal{A}_l$  при  $k \neq l$ . Как следствие, имеем разложение  $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{A}_q$ , которое, очевидно, приводит все проекторы  $P^i$ .

**Предложение 6.** Алгебра  $\mathfrak{P}$  приводится подпространствами  $\mathcal{A}_k$ , причем справедливо разложение

$$\mathfrak{P} = \bigoplus_{k=1}^q \mathfrak{P}|_{\mathcal{A}_k}, \quad (3.2)$$

где  $\mathfrak{P}|_{\mathcal{A}_k} \cong \mathbb{M}^{\varkappa_k}$ ,  $\varkappa_k = \dim \mathcal{A}_k$ .

Приводимость очевидна; равенство для размерности следует из того, что любой  $\beta^i \in \mathcal{A}_k$  является циклическим в  $\mathcal{A}_k$  для части  $\mathfrak{P}|_{\mathcal{A}_k}$ . Для приведения  $\mathfrak{P}$  к виду (3.2) можно воспользоваться процедурой (1.36), (1.37).

### 3.2 Связи между блоками

Пусть имеются три гильбертовых пространства  $\mathcal{G}_k$ ,  $k = 1, 2, 3$ , в каждом из которых задан набор одномерных проекторов  $P_k^1, \dots, P_k^{n_k}$  :  $P_k^i = \langle \cdot, \beta_k^i \rangle \beta_k^i$ ,  $\|\beta_k^i\| = 1$ , где  $\beta_k^i$  суть векторы из наборов

$$B_k := \{\beta_k^i \mid i = 1, \dots, n_k\} \subset \mathcal{G}_k. \quad (3.3)$$

Проекторы порождают алгебры:

$$\mathfrak{P}_1 = \vee\{P_1^1, \dots, P_1^{n_1}\}, \quad \mathfrak{P}_2 = \vee\{P_2^1, \dots, P_2^{n_2}\}, \quad \mathfrak{P}_3 = \vee\{P_3^1, \dots, P_3^{n_3}\}. \quad (3.4)$$

Составим алгебру

$$\mathfrak{P} := \mathfrak{P}_1 \oplus \mathfrak{P}_2 \oplus \mathfrak{P}_3 \subset \mathfrak{B}(\mathcal{G}_1 \oplus \mathcal{G}_2 \oplus \mathcal{G}_3) \quad (3.5)$$

(подалгебру алгебры ограниченных операторов, действующих в пространстве  $\mathcal{G}_1 \oplus \mathcal{G}_2 \oplus \mathcal{G}_3$ ) с образующими

$$\mathcal{P}_1^i := P_1^i \oplus O_2 \oplus O_3, \quad i = 1, \dots, n_1; \quad (3.6)$$

$$\mathcal{P}_2^i := O_1 \oplus P_2^i \oplus O_3, \quad i = 1, \dots, n_2; \quad (3.7)$$

$$\mathcal{P}_3^i := O_1 \oplus O_2 \oplus P_3^i, \quad i = 1, \dots, n_3; \quad (3.8)$$

где  $O_k$  - нулевой оператор, действующий в  $k$ -й компоненте пространства  $\mathcal{G}_1 \oplus \mathcal{G}_2 \oplus \mathcal{G}_3$ . Об алгебрах  $\mathfrak{P}_k$  в (3.5) будем говорить как о *блоках* алгебры  $\mathfrak{P}$ .

Скажем, что алгебра  $\mathfrak{Q} \subset \mathfrak{P}$  *разделяет* (не связывает) блоки  $\mathfrak{P}_1$  и  $\mathfrak{P}_2$  в (3.5), если вместе с *любым* элементом  $q_1 \oplus q_2 \oplus q_3 \in \mathfrak{Q}$  в ней содержатся элементы  $q_1 \oplus O_2 \oplus q'_3$  и  $O_1 \oplus q_2 \oplus q''_3$ , где  $q'_3, q''_3$  - некоторые элементы  $\mathfrak{P}_3$ . В противном случае будем говорить, что она эти блоки *связывает*. Аналогично определяется связь (или ее отсутствие) для любой пары блоков в (3.5).

Отметим очевидный факт: если алгебра  $\mathfrak{Q}$  допускает систему образующих, каждая из которых имеет вид либо  $q_1 \oplus O_2 \oplus q'_3$ , либо  $O_1 \oplus q_2 \oplus q''_3$ , то она разделяет блоки  $\mathfrak{P}_1$  и  $\mathfrak{P}_2$ .

Пусть

$$\mathbb{P} := \{\mathcal{P}_k^i \mid i = 1, \dots, n_k; k = 1, 2, 3\} \quad (3.9)$$

есть полный набор образующих алгебры  $\mathfrak{P}$ . Зададим на нем отображение (инволюцию)  $\mathcal{T} : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$ , такое, что если  $\mathcal{T}(\mathcal{P}_k^i) = \mathcal{P}_{k'}^{i'}$ , то  $\mathcal{T}(\mathcal{P}_{k'}^{i'}) = \mathcal{P}_k^i$ , а также выполнено одно (и только одно) из условий:

$$\mathcal{T}(\mathcal{P}_k^i) = \mathcal{P}_k^i \quad \text{или} \quad \mathcal{T}(\mathcal{P}_k^i) \mathcal{P}_k^i = \mathcal{P}_k^i \mathcal{T}(\mathcal{P}_k^i) = 0. \quad (3.10)$$

Это отображение определяет разбиение множества  $\mathbb{P}$  на пары  $\{\mathcal{P}, \mathcal{T}(\mathcal{P})\}$ , причем компоненты в каждой из пар либо совпадают, либо ортогональны друг другу. Легко видеть, что такие  $\mathcal{T}$  найдутся, причем во множественном числе. В текущих рассуждениях они произвольны, но позже, при исследовании алгебры эйконалов,  $\mathcal{T}$  будет конкретным отображением, определяемым функциями  $\tau_{\gamma\Phi}^i$ , которые, в свою очередь, определяются разбиением  $\Pi_\Sigma$ .

Отображение  $\mathcal{T}$  определяет проекторы  $\mathcal{Q}_k^i$ :

$$\mathcal{Q}_k^i := \begin{cases} \mathcal{P}_k^i, & \text{если } \mathcal{T}(\mathcal{P}_k^i) = \mathcal{P}_k^i \\ \mathcal{P}_k^i + \mathcal{T}(\mathcal{P}_k^i), & \text{если } \mathcal{T}(\mathcal{P}_k^i) \mathcal{P}_k^i = 0 \end{cases},$$

среди которых могут быть совпадающие. Если  $\mathcal{T}$  не тождественно, то за счет совпадений их общее число, очевидно, будет меньше  $n_1 + n_2 + n_3$ . Образует алгебру

$$\mathfrak{Q} := \vee \{ \mathcal{Q}_k^i \mid k = 1, 2, 3; i = 1, \dots, n_k \} \subset \mathfrak{P}. \quad (3.11)$$

Она определяется отображением  $\mathcal{T}$ . В то же время, разным  $\mathcal{T}$  и  $\mathcal{T}'$  может отвечать одна и та же алгебра  $\mathfrak{Q}$ . Этот факт используется ниже в доказательстве Теоремы 1.

Для дальнейшего ключевым является вопрос: при каких условиях алгебра  $\mathfrak{Q}$  связывает блоки?

### 3.3 Результаты о связи двух блоков

#### 3.3.1 Теорема о возможности связи двух блоков

Разобьем определенный в (3.9) набор проекторов  $\mathbb{P}$  на части  $\mathbb{P}_k := \{\mathcal{P}_k^i \mid i = 1, \dots, n_k\}$ ,  $k = 1, 2, 3$ . Каждой части сопоставим матрицы

$$G(\mathbb{P}_k) := \left\{ \|\mathcal{P}_k^i \mathcal{P}_k^j\| \right\}_{i,j=1}^{n_k} = \begin{pmatrix} \|\mathcal{P}_k^1 \mathcal{P}_k^1\| & \cdots & \|\mathcal{P}_k^1 \mathcal{P}_k^{n_k}\| \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \|\mathcal{P}_k^{n_k} \mathcal{P}_k^1\| & \cdots & \|\mathcal{P}_k^{n_k} \mathcal{P}_k^{n_k}\| \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

и

$$G(\mathcal{T}(\mathbb{P}_k)) := \left\{ \|\mathcal{T}(\mathcal{P}_k^i) \mathcal{T}(\mathcal{P}_k^j)\| \right\}_{i,j=1}^{n_k} = \begin{pmatrix} \|\mathcal{T}\mathcal{P}_k^1 \mathcal{T}\mathcal{P}_k^1\| & \cdots & \|\mathcal{T}\mathcal{P}_k^1 \mathcal{T}\mathcal{P}_k^{n_k}\| \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \|\mathcal{T}\mathcal{P}_k^{n_k} \mathcal{T}\mathcal{P}_k^1\| & \cdots & \|\mathcal{T}\mathcal{P}_k^{n_k} \mathcal{T}\mathcal{P}_k^{n_k}\| \end{pmatrix}, \quad (3.13)$$

где  $\|\cdot\|$  - норма оператора в  $\mathcal{G}_1 \oplus \mathcal{G}_2 \oplus \mathcal{G}_3$ .

Пусть

$$B := \{\beta_k^i \mid i = 1, \dots, n_k; k = 1, 2, 3\} = \bigcup_{k=1}^3 B_k; \quad B_k = \{\beta_k^i \mid i = 1, \dots, n_k\}. \quad (3.14)$$

В силу очевидных равенств  $\|\mathcal{P}_k^i \mathcal{P}_k^j\| = |\langle \beta_k^i, \beta_k^j \rangle|$ , имеем:

$$G(\mathbb{P}_k) = \begin{pmatrix} |\langle \beta_k^1, \beta_k^1 \rangle| & \cdots & |\langle \beta_k^1, \beta_k^{n_k} \rangle| \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ |\langle \beta_k^{n_k}, \beta_k^1 \rangle| & \cdots & |\langle \beta_k^{n_k}, \beta_k^{n_k} \rangle| \end{pmatrix}. \quad (3.15)$$

**Теорема 1.** Пусть блоки  $\mathfrak{P}_1$  и  $\mathfrak{P}_2$  алгебры (3.5) таковы, что каждый из отвечающих им наборов  $B_1$  и  $B_2$  является классом эквивалентности по отношению  $\sim$ . Тогда алгебра  $\mathfrak{Q}$  может связывать  $\mathfrak{P}_1$  и  $\mathfrak{P}_2$  только в том случае, если

$$\mathcal{T}(\mathbb{P}_1) = \mathbb{P}_2 \quad \text{и} \quad G(\mathbb{P}_1) = G(\mathcal{T}(\mathbb{P}_1)). \quad (3.16)$$

При выполнении этих условий для алгебры  $\mathfrak{Q}$  справедливо представление:

$$\mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}_{12} \oplus \mathfrak{Q}_3, \quad (3.17)$$

где

$$\Omega_{12} = \vee \{ \mathcal{P} \oplus \mathcal{T}(\mathcal{P}) \mid \mathcal{P} \in \mathbb{P}_1 \} \subset \mathfrak{P}_1 \oplus \mathfrak{P}_2, \quad \Omega_3 \subseteq \mathfrak{P}_3. \quad (3.18)$$

При этом алгебра  $\Omega$  разделяет  $\Omega_{12}$  и  $\Omega_3$ .

*Доказательство.* **1.** Для  $k, k' = 1, 2, 3$ ,  $k' \neq k$  положим

$$\mathbb{Q}_{kk'} := \{ \mathcal{Q}_k^i = \mathcal{P}_k^i + \mathcal{T}(\mathcal{P}_k^i) \mid \mathcal{T}(\mathcal{P}_k^i) \in \mathbb{P}_{k'} \} \quad (3.19)$$

и отметим следующее из инволютивности  $\mathcal{T}$  равенство:

$$\mathbb{Q}_{k'k} = \{ \mathcal{Q}_{k'}^{i'} = \mathcal{P}_{k'}^{i'} + \mathcal{T}(\mathcal{P}_{k'}^{i'}) \mid \mathcal{T}(\mathcal{P}_{k'}^{i'}) \in \mathbb{P}_k \} = \mathbb{Q}_{kk'}. \quad (3.20)$$

При  $k = k' = 1, 2, 3$  примем

$$\mathbb{Q}_{kk} := \left\{ \mathcal{Q}_k^i = \begin{cases} \mathcal{P}_k^i + \mathcal{T}(\mathcal{P}_k^i), & \text{если } \mathcal{P}_k^i \neq \mathcal{T}(\mathcal{P}_k^i) \in \mathbb{P}_k \\ \mathcal{P}_k^i, & \text{если } \mathcal{P}_k^i = \mathcal{T}(\mathcal{P}_k^i) \end{cases} \mid i = 1, \dots, n_k \right\}. \quad (3.21)$$

Таким образом, все  $\mathbb{Q}_{kk'}$  состоят из одномерных и двумерных проекторов, а алгебра  $\Omega$  представляется в виде:

$$\Omega = \vee [ \mathbb{Q}_{11} \cup \mathbb{Q}_{22} \cup \mathbb{Q}_{33} \cup \mathbb{Q}_{12} \cup \mathbb{Q}_{13} \cup \mathbb{Q}_{23} ] \quad (3.22)$$

Из вида проекторов (3.8) легко усмотреть, что связывать блоки  $\mathfrak{P}_1$  и  $\mathfrak{P}_2$  алгебра  $\Omega$  может только при условии  $\mathbb{Q}_{12} \neq \emptyset$ ; в противном случае она их разделяет.

**2.** Предположим, что алгебра  $\Omega$  допускает представление:

$$\Omega = \vee [ \mathbb{Q}'_{11} \cup \mathbb{Q}'_{22} \cup \mathbb{Q}_{33} \cup \mathbb{Q}_{13} \cup \mathbb{Q}_{23} ], \quad (3.23)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}'_{11} &:= \mathbb{Q}_{11} \cup \{ \mathcal{P}_1^i \mid \mathcal{P}_1^i + \mathcal{T}(\mathcal{P}_1^i) \in \mathbb{Q}_{12} \}, \\ \mathbb{Q}'_{22} &:= \mathbb{Q}_{22} \cup \{ \mathcal{P}_2^i \mid \mathcal{P}_2^i + \mathcal{T}(\mathcal{P}_2^i) \in \mathbb{Q}_{12} \}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Тогда она разделяет блоки  $\mathfrak{P}_1$  и  $\mathfrak{P}_2$ . В самом деле, в этом случае в алгебру  $\Omega$ , вместе с элементами  $\mathcal{Q}_1^i = \mathcal{P}_1^i + \mathcal{T}(\mathcal{P}_1^i)$  и  $\mathcal{Q}_2^i = \mathcal{P}_2^i + \mathcal{T}(\mathcal{P}_2^i)$ , порознь войдут все проекторы  $\mathcal{P}_1^i = \mathcal{P}_1^i \oplus O_2 \oplus O_3$  и  $\mathcal{P}_2^i = O_1 \oplus \mathcal{P}_2^i \oplus O_3$ . Вводя их в число образующих алгебры  $\Omega$  вместо элементов из  $\mathbb{Q}_{12}$ , легко убедиться в том, что разделение имеет место.

Здесь поясним следующее. Определение отображения  $\mathcal{T}$  исключает одновременное присутствие элементов  $\mathcal{Q}_k^i = \mathcal{P}_k^i + \mathcal{T}(\mathcal{P}_k^i)$  и  $\mathcal{P}_k^i$  в списке образующих  $\{ \mathcal{Q}_k^i \mid i = 1, \dots, n_k; k = 1, 2, 3 \}$  алгебры  $\Omega$ : см. (3.11). Тем не менее, содержаться

в *самой* алгебре они вполне могут. Это соответствует возможности заменить  $\mathcal{T}$  на другое отображение  $\mathcal{T}' : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$  так, чтобы отвечающая ему алгебра  $\mathfrak{Q}'$  совпала с исходной  $\mathfrak{Q}$ .

**3.** Покажем, что если

$$\mathbb{Q}_{11} \cup \mathbb{Q}_{13} \cup \mathbb{Q}_{22} \cup \mathbb{Q}_{23} \neq \emptyset, \quad (3.25)$$

то для алгебры  $\mathfrak{Q}$  справедливо представление (3.23) и, следовательно, она разделяет блоки  $\mathfrak{P}_1$  и  $\mathfrak{P}_2$ . Последующие рассуждения, в силу равнозначности  $\mathfrak{P}_1$  и  $\mathfrak{P}_2$ , вполне аналогичны для частей  $\mathbb{Q}_{11} \cup \mathbb{Q}_{13}$  и  $\mathbb{Q}_{22} \cup \mathbb{Q}_{23}$ . Проведем их для случая  $\mathbb{Q}_{11} \cup \mathbb{Q}_{13} \neq \emptyset$ . При этом имеем  $\mathbb{Q}_{12} \neq \emptyset$ , ибо в противном случае блоки  $\mathfrak{P}_1$  и  $\mathfrak{P}_2$  заведомо разделены.

Каждый элемент  $\mathcal{Q}_1^i \in \mathbb{Q}_{11} \cup \mathbb{Q}_{12} \cup \mathbb{Q}_{13}$  имеет вид:

$$\mathcal{Q}_1^i := \begin{cases} \mathcal{P}_1^i + \mathcal{T}(\mathcal{P}_1^i), & \text{если } \mathcal{T}(\mathcal{P}_1^i) \neq \mathcal{P}_1^i \\ \mathcal{P}_1^i, & \text{если } \mathcal{T}(\mathcal{P}_1^i) = \mathcal{P}_1^i \end{cases}. \quad (3.26)$$

Каждому вектору  $\beta_1^i$  из набора  $B_1$  отвечает проектор

$$\mathcal{P}_1^i = P_1^i \oplus O_2 \oplus O_3 = \langle \cdot, \beta_1^i \rangle \beta_1^i \oplus O_2 \oplus O_3, \quad (3.27)$$

который, в свою очередь, определяет соответствующий проектор  $\mathcal{Q}_1^i$  вида (3.26). Это позволяет определить отображение  $\mathbf{b} : B_1 \rightarrow \mathbb{Q}_{11} \cup \mathbb{Q}_{12} \cup \mathbb{Q}_{13}$  по правилу

$$\mathbf{b}(\beta_1^i) := \mathcal{Q}_1^i \quad (3.28)$$

Заметим, что если  $\mathcal{Q}_1^i = \mathcal{P}_1^i + \mathcal{T}(\mathcal{P}_1^i) = \mathcal{P}_1^i + \mathcal{P}_1^{i'} \in \mathbb{Q}_{11}$ , то имеются два вектора  $\beta_1^i, \beta_1^{i'}$  таких, что  $\mathbf{b}(\beta_1^i) = \mathbf{b}(\beta_1^{i'}) = \mathcal{Q}_1^i = \mathcal{Q}_1^{i'}$ . Далее под  $\mathbf{b}^{-1}(\cdot)$  понимается полный прообраз.

По условиям Теоремы,  $B_1$  есть класс эквивалентности по отношению  $\sim$ . Из условия  $\mathbb{Q}_{11} \cup \mathbb{Q}_{13} \neq \emptyset$  следует, что найдется пара векторов  $\beta_1^i \in \mathbf{b}^{-1}(\mathbb{Q}_{12})$  и  $\beta_1^{i'} \in \mathbf{b}^{-1}(\mathbb{Q}_{11} \cup \mathbb{Q}_{13})$  таких, что  $\langle \beta_1^i, \beta_1^{i'} \rangle \neq 0$ . В самом деле, отсутствие такой пары означало бы, что

$$\text{span } B_1 = \text{span } \mathbf{b}^{-1}(\mathbb{Q}_{12}) \oplus \text{span } \mathbf{b}^{-1}(\mathbb{Q}_{11} \cup \mathbb{Q}_{13}), \quad (3.29)$$

что невозможно по определению эквивалентности  $\sim$ .

Выбранная пара векторов определяет проекторы

$$\mathcal{Q}_1^i = \mathcal{P}_1^i + \mathcal{T}(\mathcal{P}_1^i) = \mathbf{b}(\beta_1^i) \in \mathbb{Q}_{12} \quad (3.30)$$

и

$$\mathcal{Q}_1^{i'} = \mathbf{b}(\beta_1^{i'}) \in \mathbb{Q}_{11} \cup \mathbb{Q}_{13}, \quad (3.31)$$

а с ними и элемент

$$\tilde{\mathcal{Q}}_1^i := \mathcal{Q}_1^i \mathcal{Q}_1^{i'} \mathcal{Q}_1^i \in \mathfrak{Q}. \quad (3.32)$$

В соответствии с (3.5), имеем представления

$$\mathcal{Q}_1^i = (\mathcal{Q}_1^i)_1 \oplus (\mathcal{Q}_1^i)_2 \oplus (\mathcal{Q}_1^i)_3, \quad (3.33)$$

$$\mathcal{Q}_1^{i'} = (\mathcal{Q}_1^{i'})_1 \oplus (\mathcal{Q}_1^{i'})_2 \oplus (\mathcal{Q}_1^{i'})_3, \quad (3.34)$$

$$\tilde{\mathcal{Q}}_1^i = (\tilde{\mathcal{Q}}_1^i)_1 \oplus (\tilde{\mathcal{Q}}_1^i)_2 \oplus (\tilde{\mathcal{Q}}_1^i)_3, \quad (3.35)$$

где  $(\mathcal{Q}_1^i)_k, (\mathcal{Q}_1^{i'})_k, (\tilde{\mathcal{Q}}_1^i)_k \in \mathfrak{P}_k$ ,  $k = 1, 2, 3$ ; при этом выполнено

$$(\tilde{\mathcal{Q}}_1^i)_k = (\mathcal{Q}_1^i)_k (\mathcal{Q}_1^{i'})_k (\mathcal{Q}_1^i)_k, \quad k = 1, 2, 3. \quad (3.36)$$

По выбору вектора  $\beta_1^i$  имеем  $\mathcal{Q}_1^i = \mathbf{b}(\beta_1^i) \in \mathbb{Q}_{12}$ . Поэтому  $(\mathcal{Q}_1^i)_3 = O_3$ , а значит, и  $(\tilde{\mathcal{Q}}_1^i)_3 = O_3$ . Аналогично, из того, что  $\mathcal{Q}_1^{i'} \in \mathbb{Q}_{11} \cup \mathbb{Q}_{13}$  следует, что  $(\mathcal{Q}_1^{i'})_2 = O_2$ , а значит и  $(\tilde{\mathcal{Q}}_1^i)_2 = O_2$ . Таким образом, ненулевой может быть только компонента  $(\tilde{\mathcal{Q}}_1^i)_1$ . В этой ситуации имеются две возможности.

1. Пусть  $\mathcal{Q}_1^{i'} \in \mathbb{Q}_{13}$ . Тогда  $(\mathcal{Q}_1^{i'})_1 = P_1^{i'}$  и  $(\mathcal{Q}_1^i)_1 = P_1^i$ , а  $(\tilde{\mathcal{Q}}_1^i)_1$  имеет вид:

$$(\tilde{\mathcal{Q}}_1^i)_1 = P_1^i P_1^{i'} P_1^i = \langle \beta_1^i, \beta_1^{i'} \rangle^2 P_1^i. \quad (3.37)$$

2. Пусть теперь  $\mathcal{Q}_1^{i'} \in \mathbb{Q}_{11}$ . Если  $\mathcal{Q}_1^{i'} = \mathcal{P}_1^{i'}$ , то рассуждения, вполне аналогичные приведенным выше, ведут к тому же равенству (3.37). Рассмотрим случай, когда  $\mathcal{Q}_1^{i'} = \mathcal{P}_1^{i'} + \mathcal{T}(\mathcal{P}_1^{i'})$ , причем  $\mathcal{T}(\mathcal{P}_1^{i'}) = \mathcal{P}_1^j \in \mathbb{P}_1$  и  $\mathcal{P}_1^j \mathcal{P}_1^{i'} = O_1$ . Проектору  $\mathcal{P}_1^j$  соответствует вектор  $\beta_1^j \in B_1$ . Тогда  $(\tilde{\mathcal{Q}}_1^i)_1$  имеет вид:

$$(\tilde{\mathcal{Q}}_1^i)_1 = P_1^i (P_1^{i'} + P_1^j) P_1^i = \left[ \langle \beta_1^i, \beta_1^{i'} \rangle^2 + \langle \beta_1^i, \beta_1^j \rangle^2 \right] P_1^i. \quad (3.38)$$

Сопоставляя (3.37) с (3.38), приходим к соотношению

$$\tilde{\mathcal{Q}}_1^i = c \mathcal{P}_1^i, \quad c \geq \langle \beta_1^i, \beta_1^{i'} \rangle^2 > 0. \quad (3.39)$$

Это означает, что в алгебру  $\mathfrak{Q}$  по-отдельности входят проекторы  $\mathcal{P}_1^i \in \mathbb{P}_1$  и  $\mathcal{T}(\mathcal{P}_1^i) \in \mathbb{P}_2$ . Об этом результате скажем, что проектор  $\mathcal{Q}_1^i = \mathcal{P}_1^i + \mathcal{T}(\mathcal{P}_1^i)$  распался на независимые (в алгебре  $\mathfrak{Q}$ ) одномерные части  $\mathcal{P}_1^i$  и  $\mathcal{T}(\mathcal{P}_1^i)$ .



Далее рассмотрим отображение  $\mathcal{T}' : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$ , отличающееся от  $\mathcal{T}$  значениями только на двух проекторах  $\mathcal{P}_1^i$  и  $\mathcal{T}(\mathcal{P}_1^i)$  и положим

$$\mathcal{T}'(\mathcal{P}_1^i) := \mathcal{P}_1^i, \quad \mathcal{T}'(\mathcal{T}(\mathcal{P}_1^i)) := \mathcal{T}(\mathcal{P}_1^i). \quad (3.40)$$

При этом алгебры  $\mathfrak{Q}$  и  $\mathfrak{Q}'$ , определенные отображениями  $\mathcal{T}$  и  $\mathcal{T}'$ , очевидно совпадают, а для  $\mathfrak{Q}'$  справедливо свое представление вида (3.22):

$$\mathfrak{Q}' = \vee [\mathbb{Q}'_{11} \cup \mathbb{Q}'_{22} \cup \mathbb{Q}'_{33} \cup \mathbb{Q}'_{12} \cup \mathbb{Q}'_{13} \cup \mathbb{Q}'_{23}] = \mathfrak{Q}, \quad (3.41)$$

причем его связь с (3.22) такова:

$$\mathbb{Q}'_{11} = \mathbb{Q}_{11} \cup \{\mathcal{P}_1^i\}, \quad (3.42)$$

$$\mathbb{Q}'_{22} = \mathbb{Q}_{22} \cup \{\mathcal{T}(\mathcal{P}_1^i)\}, \quad (3.43)$$

$$\mathbb{Q}'_{12} = \mathbb{Q}_{12} \setminus \{\mathbb{Q}_1^i\}, \quad (3.44)$$

$$\mathbb{Q}'_{13} = \mathbb{Q}_{13}, \quad \mathbb{Q}'_{23} = \mathbb{Q}_{23}, \quad \mathbb{Q}'_{33} = \mathbb{Q}_{33}. \quad (3.45)$$

Таким образом, распад  $\mathbb{Q}_1^i$  привел к тому, что часть  $\mathbb{Q}_{12}$ , отвечающая за связь блоков  $\mathfrak{P}_1$  и  $\mathfrak{P}_2$ , уменьшилась на один проектор.

Повторяя рассмотрения для части  $\mathbb{Q}'_{12} \subset \mathbb{Q}_{12}$ , убедимся, что и из нее можно изъять очередной проектор, *не меняя при этом алгебры  $\mathfrak{Q}$* . Продолжение процедуры за конечное число шагов приведет к распаду всех проекторов, содержащихся в  $\mathbb{Q}_{12}$  и, как следствие, к представлению (3.23).

Итак, показано, что условие  $\mathbb{Q}_{11} \cup \mathbb{Q}_{13} \cup \mathbb{Q}_{22} \cup \mathbb{Q}_{23} = \emptyset$  необходимо для того, чтобы алгебра связывала блоки  $\mathfrak{P}_1$  и  $\mathfrak{P}_2$ . Заметим, что условие  $\mathbb{Q}_{11} \cup \mathbb{Q}_{13} = \emptyset$  эквивалентно тому, что  $\mathcal{T}(\mathbb{P}_1) \subset \mathbb{P}_2$ , а условие  $\mathbb{Q}_{22} \cup \mathbb{Q}_{23} = \emptyset$  - тому, что  $\mathcal{T}(\mathbb{P}_2) \subset \mathbb{P}_1$ . Поскольку отображение  $\mathcal{T}$  инволютивно, отсюда получаем, что  $\mathbb{Q}_{11} \cup \mathbb{Q}_{13} \cup \mathbb{Q}_{22} \cup \mathbb{Q}_{23} = \emptyset$  выполняется тогда и только тогда, когда  $\mathcal{T}(\mathbb{P}_1) = \mathbb{P}_2$ .

4. С этого момента будем считать, что условие  $\mathcal{T}(\mathbb{P}_1) = \mathbb{P}_2$  выполнено, а, значит, для алгебры  $\mathfrak{Q}$ , связывающей блоки  $\mathfrak{P}_1$  и  $\mathfrak{P}_2$ , справедливо представление:

$$\mathfrak{Q} = \vee[\mathbb{Q}_{12} \cup \mathbb{Q}_{33}]. \quad (3.46)$$

Отсюда видно, что  $\mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}_{12} \oplus \mathfrak{Q}_3$ , где  $\mathfrak{Q}_{12} := \vee \mathbb{Q}_{12}$ ,  $\mathfrak{Q}_3 := \vee \mathbb{Q}_{33}$ , *причем алгебра  $\mathfrak{Q}$  разделяет блоки  $\mathfrak{Q}_{12}$  и  $\mathfrak{Q}_3$* .

Далее мы уточним структуру алгебры  $\mathfrak{Q}_{12}$ . С этой целью удобно использовать матричную запись:

$$\mathfrak{Q}_{12} = \vee \left\{ \mathcal{Q}^i := \begin{pmatrix} P_1^i & \\ & P_2^{i'} \end{pmatrix} \middle| \mathcal{T}(\mathcal{P}_1^i) = \mathcal{P}_2^{i'}; \quad i = 1, \dots, n_1 \right\} \quad (3.47)$$

(нулевые элементы опущены) и представление

$$\mathcal{Q}^i = \begin{pmatrix} \langle \cdot, \beta_1^i \rangle \beta_1^i & \\ & \langle \cdot, \beta_2^{i'} \rangle \beta_2^{i'} \end{pmatrix} \quad (3.48)$$

через векторы  $\beta_k^i$ , отвечающие проекторам  $P_1^i$  и  $P_2^{i'}$ . Теперь предположим, что  $G(\mathbb{P}_1) \neq G(\mathcal{T}(\mathbb{P}_1))$ . Отметим, что это возможно только если в каждом из наборов  $B_1$  и  $B_2$  больше одного элемента. В этом предположении, в алгебре  $\mathfrak{Q}_{12}$  найдутся такие  $\mathcal{Q}^i$  и  $\mathcal{Q}^j$ , что  $|\langle \beta_1^i, \beta_1^j \rangle| \neq |\langle \beta_2^{i'}, \beta_2^{j'} \rangle|$ . Для произведения  $\mathcal{Q}^i \mathcal{Q}^j \mathcal{Q}^i \in \mathfrak{Q}_{12}$  легко получаем представление:

$$\mathcal{Q}^i \mathcal{Q}^j \mathcal{Q}^i = \begin{pmatrix} \langle \beta_1^i, \beta_1^j \rangle^2 \langle \cdot, \beta_1^i \rangle \beta_1^i & \\ & \langle \beta_2^{i'}, \beta_2^{j'} \rangle^2 \langle \cdot, \beta_2^{i'} \rangle \beta_2^{i'} \end{pmatrix} \quad (3.49)$$

и приходим к соотношениям:

$$\mathcal{Q}^i = \begin{pmatrix} P_1^i & \\ & O_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} O_1 & \\ & P_2^{i'} \end{pmatrix}; \quad (3.50)$$

$$\mathcal{Q}^i \mathcal{Q}^j \mathcal{Q}^i = \langle \beta_1^i, \beta_1^j \rangle^2 \begin{pmatrix} P_1^i & \\ & O_2 \end{pmatrix} + \langle \beta_2^{i'}, \beta_2^{j'} \rangle^2 \begin{pmatrix} O_1 & \\ & P_2^{i'} \end{pmatrix} \quad (3.51)$$

Из них, с учетом неравенства  $|\langle \beta_1^i, \beta_1^j \rangle| \neq |\langle \beta_2^{i'}, \beta_2^{j'} \rangle|$ , заключаем, что в алгебра  $\mathfrak{Q}_{12}$  содержит каждый из проекторов

$$\begin{pmatrix} P_1^i & \\ & O_2 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} O_1 & \\ & P_2^{i'} \end{pmatrix} \quad (3.52)$$

по-отдельности. Из этого следует, что алгебра  $\mathfrak{Q}$  разделяет блоки  $\mathfrak{P}_1$  и  $\mathfrak{P}_2$  и справедливо представление

$$\mathfrak{Q} = \mathfrak{P}_1 \oplus \mathfrak{P}_2 \oplus \mathfrak{Q}_3. \quad (3.53)$$

**5.** Таким образом, условие  $G(\mathbb{P}_1) = G(\mathcal{T}(\mathbb{P}_1))$  также необходимо для того, чтобы алгебра  $\mathfrak{Q}$  связывала блоки  $\mathfrak{P}_1$  и  $\mathfrak{P}_2$ . При его выполнении справедливо представление:

$$\mathfrak{Q}_{12} = \vee \left\{ \begin{pmatrix} \mathcal{P} & \\ & \mathcal{T}(\mathcal{P}) \end{pmatrix} \middle| \mathcal{P} \in \mathbb{P}_1 \right\} = \vee \{ \mathcal{P} \oplus \mathcal{T}(\mathcal{P}) \mid \mathcal{P} \in \mathbb{P}_1 \},$$

что и требовалось доказать. □

Укажем на важное обстоятельство. Если условия Теоремы 1 выполнены, то наличие связи между блоками  $\mathfrak{P}_1$  и  $\mathfrak{P}_2$  исключает связь какого-либо из этих блоков с блоком  $\mathfrak{P}_3$ . Это следует из факта о разделении блоков  $\mathfrak{Q}_{12}$  и  $\mathfrak{Q}_3$ , отмеченного курсивом в начале п. 4 доказательства.

### 3.3.2 Изометричность двух блоков

Следующий результат [33], позволяет уточнить структуру алгебры  $\mathfrak{Q}_{12}$  из Теоремы 1. Пусть выполнено равенство  $\mathcal{T}(\mathbb{P}_1) = \mathbb{P}_2$  и, соответственно,  $n_1 = n_2 =: n$ . Выберем согласованную нумерацию в этих наборах:

$$\mathbb{P}_1 = \{\mathcal{P}_1^i \mid i = 1, \dots, n\}, \quad \mathbb{P}_2 = \{\mathcal{P}_2^i \mid \mathcal{P}_2^i = \mathcal{T}(\mathcal{P}_1^i); i = 1, \dots, n\}.$$

Каждому проектору  $\mathcal{P}_k^i$  сопоставим одномерное подпространство  $L_k^i$ :

$$L_k^i := P_k^i \mathcal{G}_k = \text{span} \{\beta_k^i\} \subset \mathcal{G}_k.$$

Угол между подпространствами  $L$  и  $M$  задается соотношением

$$\varphi(L, M) := \arccos \|P_L P_M\| \in [0, \pi/2],$$

где  $P_L, P_M$  суть соответствующие ортогональные проекторы.

Семействам подпространств

$$\mathfrak{L}_k := \{L_k^1, \dots, L_k^n\}, \quad k = 1, 2$$

сопоставим наборы углов

$$\begin{aligned} \varphi_k^i &:= \varphi(L_k^i, L_k^1 + \dots + L_k^{i-1}) & i = 1, \dots, n, \\ \varphi_k^{ij} &:= \varphi(L_k^i, L_k^j) & i, j = 1, \dots, n, i < j, \\ \varphi_k^{ij,l} &:= \varphi(L_k^i + L_k^j, L_k^l) & i, j, l = 1, \dots, n, i < j < l. \end{aligned}$$

Прямое применение критерия унитарной эквивалентности семейств подпространств из работы [33] приводит к следующему результату:

**Лемма 3.3.1.** *Пусть наборы  $\mathbb{P}_1$  и  $\mathbb{P}_2$  удовлетворяют условиям теоремы 1. Тогда отображение  $\mathcal{T}$  продолжается с образующих  $\mathcal{P}_k^i$  до изометрии алгебр  $\mathcal{I} : \mathfrak{P}_1 \rightarrow \mathfrak{P}_2$ , а алгебра  $\mathfrak{Q}_{12}$  имеет вид*

$$\mathfrak{Q}_{12} = \{A \oplus \mathcal{I}A \mid A \in \mathfrak{P}_1\}$$

если и только если выполнены равенства

$$\varphi_1^i = \varphi_2^i, \quad \varphi_1^{ij} = \varphi_2^{ij}, \quad \varphi_1^{ij,l} = \varphi_2^{ij,l} \quad (3.54)$$

для всех  $i, j, l$ .

Также несложно показать, что нарушение *хотя бы одного* из равенств (3.54) приводит к тому, что алгебра  $\mathfrak{Q}_{12}$  не связывает блоки  $\mathfrak{P}_1$  и  $\mathfrak{P}_2$ . Тем самым, одновременное выполнение условий Теоремы 1 и Леммы 3.3.1 гарантирует, что блоки связаны и существует изометрия  $\mathcal{I}$ , а невыполнение хотя бы одного из условий приводит к разделению этих блоков алгеброй  $\mathfrak{Q}$ .

### 3.4 Связи в наборе блоков

Рассмотрим более общую ситуацию. Пусть имеется  $N$  гильбертовых пространств  $\mathcal{G}_k$ ,  $k = 1, \dots, N$ . В каждом  $\mathcal{G}_k$  задан свой набор одномерных проекторов

$$\mathbb{P}_k := \{P_k^1, \dots, P_k^{n_k}\}, \quad P_k^i = \langle \cdot, \beta_k^i \rangle \beta_k^i, \quad \|\beta_k^i\| = 1, \quad (3.55)$$

определяемый набором векторов  $B_k := \{\beta_k^i \mid i = 1, \dots, n_k\} \subset \mathcal{G}_k$ , причем каждый  $B_k$  является классом эквивалентности по отношению  $\sim$ . Проекторы порождают алгебры:

$$\mathfrak{P}_k := \vee \mathbb{P}_k = \vee \{P_k^1, \dots, P_k^{n_k}\} \cong \mathbb{M}^{l_k}, \quad (3.56)$$

где  $l_k := \dim \text{span } B_k$ . Составим алгебру

$$\mathfrak{P} := \bigoplus_{k=1}^N \mathfrak{P}_k \quad (3.57)$$

с образующими

$$\mathcal{P}_k^i := O_1 \oplus \dots \oplus O_{k-1} \oplus P_k^i \oplus O_{k+1} \oplus \dots \oplus O_N, \quad (3.58)$$

где  $O_k$  – нулевой оператор, действующий в  $k$ -й компоненте пространства  $\bigoplus_{k=1}^N \mathcal{G}_k$ . О слагаемых  $\mathfrak{P}_k$  в (3.57) будем говорить как о *блоках* алгебры  $\mathfrak{P}_*$ .

На полном наборе образующих

$$\mathbb{P} := \mathbb{P}_1 \cup \dots \cup \mathbb{P}_N = \{\mathcal{P}_k^i \mid i = 1, \dots, n_k; k = 1, \dots, N\} \quad (3.59)$$

алгебры  $\mathfrak{P}$  зададим отображение  $\mathcal{T} : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$  такое, что если  $\mathcal{T}(\mathcal{P}_k^i) = \mathcal{P}_{k'}^{i'}$ , то  $\mathcal{T}(\mathcal{P}_{k'}^{i'}) = \mathcal{P}_k^i$ , а также выполнено одно (и только одно) из условий:

$$\mathcal{T}(\mathcal{P}_k^i) = \mathcal{P}_k^i \quad \text{или} \quad \mathcal{T}(\mathcal{P}_k^i) \mathcal{P}_k^i = \mathcal{P}_k^i \mathcal{T}(\mathcal{P}_k^i) = 0. \quad (3.60)$$

По данному отображению определим проекторы  $\mathcal{Q}_k^i$ :

$$\mathcal{Q}_k^i := \begin{cases} \mathcal{P}_k^i, & \text{если } \mathcal{T}(\mathcal{P}_k^i) = \mathcal{P}_k^i \\ \mathcal{P}_k^i + \mathcal{T}(\mathcal{P}_k^i), & \text{если } \mathcal{T}(\mathcal{P}_k^i) \mathcal{P}_k^i = 0 \end{cases}, \quad (3.61)$$

среди которых могут быть совпадающие. Образует алгебру

$$\mathfrak{Q} := \vee \{\mathcal{Q}_k^i \mid i = 1, \dots, n_k; k = 1, \dots, N\} \subset \mathfrak{P} \quad (3.62)$$

и опишем ее структуру, используя результаты Теоремы 1 и Леммы 3.3.1.

Из блоков, составляющих алгебру  $\mathfrak{P}$  в (3.57), составим всевозможные пары  $\{\mathfrak{P}_k, \mathfrak{P}_{k'}\}$  с  $k \neq k'$  и отберем те из них, в которых компоненты связаны через алгебру  $\mathfrak{Q}$  (в том же смысле, что и  $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2$  в Теореме 1 и Лемме 3.3.1). Такой отбор однозначен, поскольку, как отмечалось после доказательства Теоремы, каждый из  $\mathfrak{P}_k$  может быть связан лишь с одним  $\mathfrak{P}_{k'}$ . Перенумеруем блоки в (3.57), выделяя пары связанных блоков и независимые блоки:

$$\underbrace{\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2; \dots; \mathfrak{P}_{2k-1}, \mathfrak{P}_{2k}; \dots; \mathfrak{P}_{2N_1-1}, \mathfrak{P}_{2N_1}}_{\text{связанные}}; \mathfrak{P}_{2N_1+1}; \dots; \mathfrak{P}_{2N_1+j}; \dots; \mathfrak{P}_N \quad (3.63)$$

и соответствующим образом сгруппируем составляющие набора  $\mathbb{P}$ :

$$\underbrace{\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2; \dots; \mathbb{P}_{2k-1}, \mathbb{P}_{2k}; \dots; \mathbb{P}_{2N_1-1}, \mathbb{P}_{2N_1}}_{\text{связанные}}; \mathbb{P}_{2N_1+1}; \dots; \mathbb{P}_{2N_1+j}; \dots; \mathbb{P}_N. \quad (3.64)$$

Далее используется именно эта нумерация. Легко видеть, что такая группировка приводит отображение  $\mathcal{T}$  в следующем смысле:

$$\mathcal{T}(\{\mathbb{P}_{2k-1}, \mathbb{P}_{2k}\}) = \{\mathbb{P}_{2k-1}, \mathbb{P}_{2k}\}, \quad (3.65)$$

$$\mathcal{T}(\mathbb{P}_{2k-1}) = \mathbb{P}_{2k}, \quad \mathcal{T}(\mathbb{P}_{2k}) = \mathbb{P}_{2k-1}, \quad k = 1, \dots, N_1; \quad (3.66)$$

$$\mathcal{T}(\mathbb{P}') = \mathbb{P}', \quad \text{где } \mathbb{P}' := \mathbb{P}_{2N_1+1} \cup \dots \cup \mathbb{P}_N. \quad (3.67)$$

Блоки  $\mathfrak{P}_{2N_1+j}$  выделены тем, что они попарно разделены (не связаны) алгеброй  $\mathfrak{Q}$ . Из разделенности следует: если проектор

$$\mathcal{Q}_{2N_1+j}^i = \mathcal{P}_{2N_1+j}^i + \mathcal{T}(\mathcal{P}_{2N_1+j}^i) \quad (3.68)$$

таков, что  $\mathcal{T}(\mathcal{P}_{2N_1+j}^i) \notin \mathbb{P}_{2N_1+j}$ , то в алгебру  $\mathfrak{Q}$  по-отдельности входят проекторы  $\mathcal{P}_{2N_1+j}^i$  и  $\mathcal{T}(\mathcal{P}_{2N_1+j}^i)$ . В противном случае блок  $\mathbb{P}_{2N_1+j}$  и блок, в котором лежит  $\mathcal{T}(\mathcal{P}_{2N_1+j}^i)$ , оказались бы связанными. Это позволяет заменить  $\mathcal{T}|_{\mathbb{P}'}$  новым отображением  $\mathcal{T}' : \mathbb{P}' \rightarrow \mathbb{P}'$ , которое определяется на  $\mathcal{P}_k^i \in \mathbb{P}'$  по правилам:

$$\mathcal{T}'(\mathcal{P}_k^i) := \begin{cases} \mathcal{P}_k^i, & \text{если } \mathcal{T}(\mathcal{P}_k^i) \notin \mathbb{P}_k \\ \mathcal{P}_k^i, & \text{если } \mathcal{T}(\mathcal{P}_k^i) = \mathcal{P}_k^i \\ \mathcal{T}(\mathcal{P}_k^i), & \text{если } \mathcal{T}(\mathcal{P}_k^i) \in \mathbb{P}_k \text{ и } \mathcal{T}(\mathcal{P}_k^i) \neq \mathcal{P}_k^i \end{cases}. \quad (3.69)$$

Легко видеть, что отображение

$$\tilde{\mathcal{T}} : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}, \quad \tilde{\mathcal{T}} := \begin{cases} \mathcal{T} & \text{на } \mathbb{P} \setminus \mathbb{P}' \\ \mathcal{T}' & \text{на } \mathbb{P}' \end{cases} \quad (3.70)$$

определяет *ту же* алгебру  $\mathfrak{Q}$ , что и  $\mathcal{T}$  и, в дополнение к (3.67), приводится независимыми блоками:  $\tilde{\mathcal{T}}(\mathbb{P}_{2N+j}) = \mathbb{P}_{2N+j}$ . Внутри этих блоков оно либо действует тождественно, либо сопоставляет проектору ортогональный к нему.

Отображение  $\mathcal{T}$  определяет алгебру  $\mathfrak{Q}$  через проекторы-образующие  $\mathcal{Q}_k^i$  согласно (3.62). Вполне аналогично, отображение  $\tilde{\mathcal{T}}$  задает соответствующие проекторы  $\tilde{\mathcal{Q}}_k^i$ , генерирующие ту же алгебру. Особенность последних заключается в их форме: по построению имеем

$$\tilde{\mathcal{Q}}_k^i = \begin{cases} \mathcal{P}_k^i + \tilde{\mathcal{T}}(\mathcal{P}_k^i), & \text{если } \tilde{\mathcal{T}}(\mathcal{P}_k^i) \in \mathbb{P}_k, \tilde{\mathcal{T}}(\mathcal{P}_k^i) \neq \mathcal{P}_k^i \\ \mathcal{P}_k^i, & \text{в остальных случаях} \end{cases}, \quad (3.71)$$

т.е. все двумерные  $\tilde{\mathcal{Q}}_k^i$  суть суммы проекторов, входящих в *один и тот же* блок  $\mathfrak{P}_k$ .

Введем обозначение  $\mathbb{Q}_k := \{\tilde{\mathcal{Q}}_k^i \mid i = 1, \dots, n_k\}$ . Следующий результат просто резюмирует проведенные выше рассуждения:

**Теорема 2.** *Для алгебры  $\mathfrak{Q}$  (с нумерацией блоков (3.63)) справедливо представление:*

$$\mathfrak{Q} = \left[ \bigoplus_{k=1}^{N_1} \mathfrak{Q}_k^I \right] \oplus \left[ \bigoplus_{k=2N_1+1}^N \mathfrak{Q}_k^{II} \right], \quad (3.72)$$

где

$$\mathfrak{Q}_k^I := \{A \oplus \mathcal{I}A \mid A \in \mathfrak{P}_{2k-1}\} \subset \mathfrak{P}_{2k-1} \oplus \mathfrak{P}_{2k} \quad (3.73)$$

– блоки из попарно связанных алгебр, а

$$\mathfrak{Q}_k^{II} := \vee \mathbb{Q}_k \subset \mathfrak{P}_k \quad (3.74)$$

– отдельные блоки (подалгебры в  $\mathfrak{P}_k$ ), чья структура определяется наборами  $\mathbb{Q}_k$  и может отличаться от  $\mathfrak{P}_k$  (получившиеся алгебры могут оказаться приводимыми).

## Глава 4. Приведение $\mathfrak{E}_\Sigma^T$ к канонической форме

### 4.1 Параметрическое представление

#### 4.1.1 Исходное представление

Из (2.3) и (2.8) имеем представление

$$\mathfrak{E}_\Sigma^T = \vee \left\{ \bigoplus_{\Phi \subset \Pi_\Sigma} \sum E_\gamma \langle \Phi \rangle \mid \gamma \in \Sigma \right\}. \quad (4.1)$$

Параметризация (2.25) приводит к представлению

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_\Sigma^T &\cong U \mathfrak{E}_\Sigma^T U^{-1} \stackrel{(2.27)}{=} \\ &= \vee \left\{ \bigoplus_{\Phi \subset \Pi_\Sigma} \sum_{i=1}^{n_{\gamma\Phi}} \tau_{\gamma\Phi}^i(\cdot) P_{\gamma\Phi}^i \mid \gamma \in \Sigma \right\} \subset \bigoplus_{\Phi \subset \Pi_\Sigma} C([0, \varepsilon_\Phi], \mathbb{M}^{m_\Phi}) \end{aligned} \quad (4.2)$$

в виде операторной алгебры; ее элементы умножают функции из пространства представления

$$\mathcal{R}_\Sigma^T := \bigoplus_{\Phi \subset \Pi_\Sigma} L_2([0, \varepsilon_\Phi]; \mathbb{R}^{m_\Phi}) \quad (4.3)$$

на непрерывные матрицы-функции соответствующего вида.

В более наглядной блочно-матричной записи представления (4.2) имеем:

$$\begin{aligned} U \mathfrak{E}_\Sigma^T U^{-1} &= \vee \left\{ \left( \begin{array}{ccc} \sum_{i=1}^{n_{\gamma\Phi^1}} \tau_{\gamma\Phi^1}^i(\cdot_1) P_{\gamma\Phi^1}^i & & \\ & \dots & \\ & & \sum_{i=1}^{n_{\gamma\Phi^J}} \tau_{\gamma\Phi^J}^i(\cdot_J) P_{\gamma\Phi^J}^i \end{array} \right) \mid \gamma \in \Sigma \right\} \subset \\ &\subset \left( \begin{array}{ccc} C([0, \varepsilon_1]; \mathbb{M}^{m_{\Phi^1}}) & & \\ & \dots & \\ & & C([0, \varepsilon_J]; \mathbb{M}^{m_{\Phi^J}}) \end{array} \right); \end{aligned} \quad (4.4)$$

здесь нулевые внедиагональные блоки опущены;  $\Pi_\Sigma = \Phi^1 \cup \dots \cup \Phi^J$ . Обозначение  $(\cdot_j)$  подчеркивает, что аргументы  $r_j \in [0, \varepsilon_j]$  у функций  $\tau_{\gamma\Phi^j}^i$  суть разные, в соответствии с представлением (4.3).



Определим наборы проекторов  $\mathbb{P}_{\Phi^j} := \{P_{\gamma\Phi^j}^i \mid i = 1, \dots, n_{\gamma\Phi^j}; \gamma \in \Sigma\}$ . Тогда с привлечением алгебр

$$\mathfrak{P}_{\Phi^j} := \vee \mathbb{P}_{\Phi^j} \subseteq \mathbb{M}^{m_{\Phi^j}} \quad (4.5)$$

вложение в (4.4) уточняется следующим образом:

$$U\mathfrak{E}_{\Sigma}^T U^{-1} \subset \bigoplus_{j=1}^J C([0, \varepsilon_j]; \mathfrak{P}_{\Phi^j}). \quad (4.6)$$

Как можно предвидеть из (4.4) и (4.6), описание структуры алгебры эйконолов сведется к установлению связей между ее блоками  $[U\mathfrak{E}_{\Sigma}^T U^{-1}]_j(\cdot_j)$ , отвечающими разным семействам  $\Phi^j \subset \Pi_{\Sigma}$ . Именно эти связи отличают  $U\mathfrak{E}_{\Sigma}^T U^{-1}$  от алгебры в правой части (4.6), у которой блоки вполне независимы. Приводимая ниже лемма - шаг в изучении связей между блоками алгебры  $U\mathfrak{E}_{\Sigma}^T U^{-1}$ .

Определим проекторы

$$\mathcal{P}_{\gamma\Phi^j}^i := \begin{pmatrix} O_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & P_{\gamma\Phi^j}^i & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & O_J \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} \mathfrak{P}_{\Phi^1} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \mathfrak{P}_{\Phi^j} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \mathfrak{P}_{\Phi^J} \end{pmatrix} = \bigoplus_{j=1}^J \mathfrak{P}_{\Phi^j}, \quad (4.7)$$

где  $i = 1, \dots, n_{\gamma\Phi^j}$ , а  $O_k$  - нулевые матрицы соответствующей размерности. Как и  $P_{\gamma\Phi^j}^i$ , эти проекторы попарно ортогональны. Определим также "точки"  $\mathbf{r} := \{r_1, \dots, r_J\}$  с координатами  $r_j \in [0, \varepsilon_j]$ , матрицы

$$(UE_{\gamma}^T U^{-1})(\mathbf{r}) := \bigoplus_{j=1}^J \sum_{i=1}^{n_{\gamma\Phi^j}} \tau_{\gamma\Phi^j}^i(r_j) P_{\gamma\Phi^j}^i = \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^{n_{\gamma\Phi^j}} \tau_{\gamma\Phi^j}^i(r_j) \mathcal{P}_{\gamma\Phi^j}^i \in \bigoplus_{j=1}^J \mathfrak{P}_{\Phi^j} \quad (4.8)$$

(см. (2.27)) и матричные алгебры

$$(U\mathfrak{E}_{\Sigma}^T U^{-1})(\mathbf{r}) := \vee \{(UE_{\gamma}^T U^{-1})(\mathbf{r}) \mid \gamma \in \Sigma\}. \quad (4.9)$$

#### 4.1.2 Об элементах алгебры $U\mathfrak{E}_{\Sigma}^T U^{-1}$

Справедлива лемма:

**Лемма 4.1.1.** *Фиксируем  $\gamma, i, j$ . Пусть точки  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}'$  таковы, что их координаты удовлетворяют условиям  $r_j \in (0, \varepsilon_j)$  и  $r_j \neq r'_j$ . Тогда найдется элемент  $e \in U \mathfrak{E}_\Sigma^T U^{-1}$ , для которого выполнено  $e(\mathbf{r}) = \mathcal{P}_{\gamma j}^i$  и  $e(\mathbf{r}') = O$ .*

*Доказательство.* В силу попарной ортогональности проекторов в (4.8), при  $s \in \mathbb{N}$  имеем:

$$\left( (UE_\gamma^T U^{-1})^s \right) (\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^J \sum_{l=1}^{n_{\gamma\Phi^k}} \left( (\tau_{\gamma\Phi^k}^l(r_k)) \right)^s \mathcal{P}_{\gamma\Phi^k}^l. \quad (4.10)$$

Как следствие, для полинома  $q = q(t) = a_\nu t^\nu + \dots + a_1 t$  выполнено

$$\left( q(UE_\gamma^T U^{-1}) \right) (\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^J \sum_{l=1}^{n_{\gamma\Phi^k}} q(\tau_{\gamma\Phi^k}^l(r_k)) \mathcal{P}_{\gamma\Phi^k}^l. \quad (4.11)$$

По условию на координаты точек  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}'$  и свойству (1.51), в наборе

$$\{ \tau_{\gamma\Phi^k}^l(\eta) \mid k = 1, \dots, J; l = 1, \dots, n_{\Phi^k}; \eta = r_k, r'_k \} \quad (4.12)$$

число  $\tau_{\gamma j}^i(r_j)$  встречается один раз. Выберем полином так, чтобы он обращался в 1 при  $t = \tau_{\gamma j}^i(r_j)$  и в 0 во всех остальных точках набора. Для  $e := q(UE_\gamma^T U^{-1})$ , очевидно, имеем  $e(\mathbf{r}) = \mathcal{P}_{\gamma j}^i$ ,  $e(\mathbf{r}') = O$ .  $\square$

**Следствие 2.** Если координаты точки  $\mathbf{r}$  не принимают крайних значений, т.е.  $r_j \notin \{0, \varepsilon_j\}$  для всех  $j$ , то выполнено

$$(U \mathfrak{E}_\Sigma^T U^{-1})(\mathbf{r}) = \bigoplus_{j=1}^J \mathfrak{P}_{\Phi^j}. \quad (4.13)$$

Если координаты таковы, что для фиксированного  $j$  выполнено  $0 < a_j \leq r_j \leq b_j < \varepsilon_j$ , а остальные координаты произвольны, то справедливо соотношение

$$[U \mathfrak{E}_\Sigma^T U^{-1}]_j \Big|_{a_j \leq r_j \leq b_j} = C([a_j, b_j]; \mathfrak{P}_{\Phi^j}). \quad (4.14)$$

Первое соотношение – прямое следствие утверждения леммы; второе легко выводится из первого с использованием Предложения 4. Равенство (4.14) указывает на отсутствие связей между блоками  $[U \mathfrak{E}_\Sigma^T U^{-1}]_j$  при принятых ограничениях на координаты.

Если координаты точки  $\mathbf{r}$  принимают *крайние* значения, то равенство (4.13), вообще говоря, нарушается: в матричной алгебре  $[U \mathfrak{E}_\Sigma^T U^{-1}](\mathbf{r})$  появляются связи между ее блоками. Именно они отличают левую и правую части во

вложении (4.6): у состоящей из стандартных алгебр правой части такие связи отсутствуют. Поясним это на примерах.

Из определения и свойств функций  $\tau_{\gamma\Phi^j}^i$  (см. (1.51)) следует, что равенства  $\tau_{\gamma\Phi^j}^i(r_j) = \tau_{\gamma\Phi^{j'}}^i(r_{j'})$  возможны только при *крайних* значениях координат, т.е. при  $r_j \in \{0, \varepsilon_j\}$  и  $r_{j'} \in \{0, \varepsilon_{j'}\}$ . Пусть функции  $\tau_{\gamma\Phi^j}^i$  таковы, что выполнено  $\tau_{\gamma\Phi^j}^i(\varepsilon_j) = \tau_{\gamma\Phi^j}^{i+1}(\varepsilon_j) = \tau$ . В этом случае  $j$ -тый блок эйконала в (4.4) примет вид

$$[[U E_{\gamma}^T U^{-1}](\mathbf{r})]_j = \tau_{\gamma\Phi^j}^1(\varepsilon_j) P_{\gamma\Phi^j}^1 + \cdots + \tau(P_{\gamma\Phi^j}^i + P_{\gamma\Phi^j}^{i+1}) + \cdots + \tau_{\gamma\Phi^j}^{n_{\gamma\Phi^j}}(\varepsilon_j) P_{\gamma\Phi^j}^{n_{\gamma\Phi^j}}. \quad (4.15)$$

Поэтому в семейство образующих алгебры  $[U \mathfrak{E}_{\Sigma}^T U^{-1}](\mathbf{r})$  проекторы  $P_{\gamma\Phi^j}^i$  и  $P_{\gamma\Phi^j}^{i+1}$  войдут не порознь, а в составе суммы  $P_{\gamma\Phi^j}^i + P_{\gamma\Phi^j}^{i+1}$  и, таким образом, число образующих уменьшится на 1. Как следствие, возможно (и в содержательных случаях происходит) нарушение (4.13): вместо равенства гарантировано лишь

$$[U \mathfrak{E}_{\Sigma}^T U^{-1}](\mathbf{r}) \subset \bigoplus_{j=1}^J \mathfrak{P}_{\Phi^j}.$$

Аналогичным образом могут связываться проекторы, входящие в разные блоки. Пусть  $\tau_{\gamma\Phi^j}^i$  таковы, что для каких-то *разных*  $j$  и  $j'$  выполнено  $\tau_{\gamma\Phi^j}^i(\varepsilon_j) = \tau_{\gamma\Phi^{j'}}^i(\varepsilon_{j'}) = \tau$ . В этом случае в (4.4) блоки с номерами  $j$  и  $j'$  примут вид

$$[[U E_{\gamma}^T U^{-1}](\mathbf{r})]_j = \tau_{\gamma\Phi^j}^1(\varepsilon_j) P_{\gamma\Phi^j}^1 + \cdots + \tau P_{\gamma\Phi^j}^i + \cdots + \tau_{\gamma\Phi^j}^{n_{\gamma\Phi^j}}(\varepsilon_j) P_{\gamma\Phi^j}^{n_{\gamma\Phi^j}}, \quad (4.16)$$

$$[[U E_{\gamma}^T U^{-1}](\mathbf{r})]_{j'} = \tau_{\gamma\Phi^{j'}}^1(\varepsilon_{j'}) P_{\gamma\Phi^{j'}}^1 + \cdots + \tau P_{\gamma\Phi^{j'}}^i + \cdots + \tau_{\gamma\Phi^{j'}}^{n_{\gamma\Phi^{j'}}}(\varepsilon_{j'}) P_{\gamma\Phi^{j'}}^{n_{\gamma\Phi^{j'}}} \quad (4.17)$$

и окажутся связанными (через проекторы  $P_{\gamma\Phi^j}^i$  и  $P_{\gamma\Phi^{j'}}^i$ ), что также может привести к уменьшению числа образующих алгебры  $[U \mathfrak{E}_{\Sigma}^T U^{-1}](\mathbf{r})$ .

### 4.1.3 Приводимость

Алгебры  $\mathfrak{P}_{\Phi^j}$ , определяемые наборами проекторов  $\mathbb{P}_{\Phi^j}$  в (4.5), вообще говоря, приводимы: по Предложению 3 имеем

$$\mathfrak{P}_{\Phi^j} = \bigoplus_{k=1}^{q_j} \mathfrak{P}_{\Phi^j}^k, \quad \mathfrak{P}_{\Phi^j}^k \cong \mathbb{M}^{\varkappa_{j,k}}, \quad \varkappa_{j,1} + \cdots + \varkappa_{j,q_k} \leq m_{\Phi^j} \quad (4.18)$$

и вложение (4.6) принимает вид

$$U \mathfrak{E}_{\Sigma}^T U^{-1} \subset \bigoplus_{j=1}^J C([0, \varepsilon_j]; \bigoplus_{k=1}^{q_j} \mathfrak{P}_{\Phi^j}^k) = \bigoplus_{j=1}^J \bigoplus_{k=1}^{q_j} C([0, \varepsilon_j]; \mathfrak{P}_{\Phi^j}^k) \quad (4.19)$$

с неприводимыми  $\mathfrak{P}_{\Phi^j}^k$ . Ранее в Предложении 6 было выяснено, как происходит разложение алгебры  $\mathfrak{P}_{\Phi^j}$ . В нашем случае справедливо равенство:

$$\mathfrak{P}_{\Phi^j}^k = \vee \mathbb{P}_{\Phi^j}^k, \quad (4.20)$$

где  $\mathbb{P}_{\Phi^j}^k$  суть поднаборы из  $\mathbb{P}_{\Phi^j}$ , являющиеся классом эквивалентности по отношению  $\sim$ , такие, что

$$\bigcup_{k=1}^{q_j} \mathbb{P}_{\Phi^j}^k = \mathbb{P}_{\Phi^j}; \quad \mathbb{P}_{\Phi^j}^k \cap \mathbb{P}_{\Phi^j}^{k'} = \emptyset \text{ при } k \neq k'. \quad (4.21)$$

Тем самым, приведение алгебры  $U\mathfrak{E}_{\Sigma}^T U^{-1}$  к сумме неприводимых блоков в (4.19) сведется к адекватной группировке проекторов *внутри каждого из наборов*  $\mathbb{P}_{\Phi^j}$ . При группировке удобно перейти к новой нумерации.

Первым шагом является переход к сквозной нумерации алгебр, входящих в (4.19):

$$\begin{aligned} & \mathfrak{P}_{\Phi^1}^1, \dots, \mathfrak{P}_{\Phi^1}^{q_1}; \quad \mathfrak{P}_{\Phi^2}^1, \dots, \mathfrak{P}_{\Phi^2}^{q_2}; \quad \dots; \quad \mathfrak{P}_{\Phi^J}^1, \dots, \mathfrak{P}_{\Phi^J}^{q_J} \Rightarrow \\ & \mathfrak{P}_1, \dots, \mathfrak{P}_{q_1}; \quad \mathfrak{P}_{q_1+1}, \dots, \mathfrak{P}_{q_1+q_2}; \quad \dots; \quad \mathfrak{P}_{q_1+s+q_{J-1}}, \dots, \mathfrak{P}_L, \end{aligned} \quad (4.22)$$

где  $L := q_1 + \dots + q_J$ . Аналогично (т.е. формальной заменой  $\mathfrak{P}$  на  $\mathbb{P}$  в (4.22)) перейдем от наборов  $\mathbb{P}_{\Phi^j}^k$  к наборам (классам эквивалентности)  $\mathbb{P}_l$ , где  $l = 1, \dots, L$ . Каждый набор  $\mathbb{P}_l$ , в свою очередь, можно разбить на поднаборы, отвечающие отдельным вершинам  $\gamma \in \Sigma$ :

$$\mathbb{P}_l = \bigcup_{\gamma \in \Sigma} \mathbb{P}_l^\gamma, \quad \mathbb{P}_l^\gamma := \{P_{\gamma'\Phi^j}^i \in \mathbb{P}_l \mid \gamma' = \gamma\} = \{P_{\gamma\Phi^j}^{i_1}, \dots, P_{\gamma\Phi^j}^{i_{n_{\gamma l}}}\}, \quad (4.23)$$

где  $n_{\gamma l} := \# \mathbb{P}_l^\gamma$ . Наконец, перенумеруем проекторы внутри каждого  $\mathbb{P}_l^\gamma$ :

$$\begin{aligned} & P_{\gamma\Phi^j}^{i_1}, \dots, P_{\gamma\Phi^j}^{i_k}, \dots, P_{\gamma\Phi^j}^{i_{n_{\gamma l}}} \Rightarrow \\ & P_{\gamma l}^1, \dots, P_{\gamma l}^k, \dots, P_{\gamma l}^{n_{\gamma l}}, \end{aligned} \quad (4.24)$$

а с ними - функции  $\tau_{\gamma\Phi^j}^i$  и проекторы  $\mathcal{P}_{\gamma\Phi^j}^i$  (4.7):

$$\begin{aligned} & \tau_{\gamma\Phi^j}^{i_1}, \dots, \tau_{\gamma\Phi^j}^{i_k}, \dots, \tau_{\gamma\Phi^j}^{i_{n_{\gamma l}}}; \quad \mathcal{P}_{\gamma\Phi^j}^{i_1}, \dots, \mathcal{P}_{\gamma\Phi^j}^{i_k}, \dots, \mathcal{P}_{\gamma\Phi^j}^{i_{n_{\gamma l}}} \Rightarrow \\ & \tau_{\gamma l}^1, \dots, \tau_{\gamma l}^k, \dots, \tau_{\gamma l}^{n_{\gamma l}}; \quad \mathcal{P}_{\gamma l}^1, \dots, \mathcal{P}_{\gamma l}^k, \dots, \mathcal{P}_{\gamma l}^{n_{\gamma l}}. \end{aligned} \quad (4.25)$$

В новой нумерации вложение (4.19) запишется в форме

$$U\mathfrak{E}_{\Sigma}^T U^{-1} \subset \bigoplus_{l=1}^L C([0, \varepsilon_l]; \mathfrak{P}_l), \quad (4.26)$$

где  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dots = \varepsilon_{q_1} = \varepsilon_1$ ;  $\varepsilon_{q_1+1} = \dots = \varepsilon_{q_1+q_2} = \varepsilon_2$ ; ..., а представление эйконалов (2.25) и соотношение (4.13) примут согласованный с (4.26) вид

$$UE_\gamma^T U^{-1} = \bigoplus \sum_{l=1}^L \left[ \sum_{k=1}^{n_{\gamma l}} \tau_{\gamma l}^k P_{\gamma l}^k \right] = \sum_{l=1}^L \left[ \sum_{k=1}^{n_{\gamma l}} \tau_{\gamma l}^k P_{\gamma l}^k \right] \quad (4.27)$$

и

$$(U \mathfrak{E}_\Sigma^T U^{-1})(\mathbf{r}) = \bigoplus_{l=1}^L \mathfrak{P}_l, \quad (4.28)$$

где координаты точки  $\mathbf{r} = \{r_1, \dots, r_L\}$  не принимают крайних значений.

Отметим, что именно при смене нумерации становится необходимым использовать индекс  $\gamma$  для функций  $\tau_\Phi^i$  (см. (1.67)). Это связано с тем, что исходные *равные* функции  $\tau_{\gamma\Phi^j}^i = \tau_{\gamma'\Phi^j}^i$  для фиксированного семейства  $\Phi^j$  могут соответствовать проекторам  $P_{\gamma\Phi^j}^i$  и  $P_{\gamma'\Phi^j}^i$ , которые после смены нумерации оказываются в *разных* блоках  $\mathfrak{P}_l$  и  $\mathfrak{P}_{l'}$ .

## 4.2 Граничная алгебра

### 4.2.1 Определение и связи наборов

Как показывают Следствие 2 и последующие комментарии, связи между блоками алгебры  $U \mathfrak{E}_\Sigma^T U^{-1}$  возможны только на границах интервалов  $[0, \varepsilon_j]$ . Для детального описания этих связей удобно использовать следующий формализм.

Фиксируем вершину  $\gamma \in \Sigma$  и рассмотрим набор  $(k, l, r_l)$ , отвечающий значению  $\tau_{\gamma l}^k(r_l)$  функции  $\tau_{\gamma l}^k$ . Скажем, что наборы  $(k, l, r_l)$  и  $(k', l', r_{l'})$  *связаны* и будем писать  $(k, l, r_l) \leftrightarrow (k', l', r_{l'})$ , если выполнено  $\tau_{\gamma l}^k(r_l) = \tau_{\gamma l'}^{k'}(r_{l'})$ . По свойствам (1.51) и (1.52), такие равенства возможны только при крайних значениях параметров  $r_l \in \{0, \varepsilon_l\}$  и  $r_{l'} \in \{0, \varepsilon_{l'}\}$ ; в приводимом ниже предложении фигурируют *только такие* значения. Эти же свойства легко ведут к следующим свойствам связи  $\leftrightarrow$ .

**Предложение 7.** *Для заданного набора  $(k, l, r_l)$  выполняется одно и только одно из следующих условий:*

1. *не существует отличного от  $(k, l, r_l)$  набора  $(k', l', r_{l'})$ , такого, что  $(k, l, r_l) \leftrightarrow (k', l', r_{l'})$ ;*

2. существует единственный набор  $(k', l', r_{l'})$ , такой, что  $(k, l, r_l) \leftrightarrow (k', l', r_{l'})$ ; при этом  $l' = l$ ,  $r_{l'} = r_l$ ,  $k' \neq k$ ;
3. существует единственный набор  $(k', l', r_{l'})$ , такой, что  $(k, l, r_l) \leftrightarrow (k', l', r_{l'})$ ; при этом  $l' \neq l$ .

Условимся разделять наборы  $(k, l, r_l)$  на соответствующие типы **1**, **2** и **3**.

**Лемма 4.2.1.** Пусть  $\mathbf{r} = \{r_1, \dots, r_l, \dots, r_{\mathcal{L}}\}$ ,  $r_l \in \{0, \varepsilon_l\}$ .

1. Если  $(k, l, r_l) \in \mathbf{1}$ , то для любого  $\tilde{\mathbf{r}}$  с координатой  $\tilde{r}_l \neq r_l$ , существует элемент  $e \in U \mathfrak{E}_{\gamma}^T U^{-1} \subset U \mathfrak{E}_{\Sigma}^T U^{-1}$  такой, что выполнено

$$e(\mathbf{r}) = \mathcal{P}_{\gamma l}^k, \quad e(\tilde{\mathbf{r}}) = O.$$

2. Если  $(k, l, r_l) \in \mathbf{2}$  и  $(k, l, r_l) \leftrightarrow (k', l, r_l)$ , то для любого  $\tilde{\mathbf{r}}$  с  $\tilde{r}_l \neq r_l$ , существует элемент  $e \in U \mathfrak{E}_{\gamma}^T U^{-1}$ , такой, что выполнено

$$e(\mathbf{r}) = \mathcal{P}_{\gamma l}^k + \mathcal{P}_{\gamma l}^{k'}, \quad e(\tilde{\mathbf{r}}) = O.$$

3. Если  $(k, l, r_l) \in \mathbf{3}$  и  $(k, l, r_l) \leftrightarrow (k', l', r_{l'})$ , то для  $\mathbf{r} = \{r_1, \dots, r_l, \dots, r_{l'}, \dots, r_{\mathcal{L}}\}$  и любого  $\tilde{\mathbf{r}}$  с координатами  $\tilde{r}_j \neq r_j$ ,  $\tilde{r}_{j'} \neq r_{j'}$  существует элемент  $e \in U \mathfrak{E}_{\gamma}^T U^{-1}$ , такой, что выполнено

$$e(\mathbf{r}) = \mathcal{P}_{\gamma l}^k + \mathcal{P}_{\gamma l'}^{k'}, \quad e(\tilde{\mathbf{r}}) = O.$$

Доказательство мы опускаем – оно вполне аналогично доказательству Леммы 4.1.1: как и последнее, оно сводится к выбору подходящего полинома  $q$ . Причина "склейки" проекторов в суммы та же, что и в рассмотренных ниже Следствия 2 примерах.

Как отмечалось, отличие алгебры  $U \mathfrak{E}_{\Sigma}^T U^{-1}$  от  $\bigoplus_{l=1}^L C([0, \varepsilon_l]; \mathfrak{P}_l)$  состоит в возможных связях между блоками матричной алгебры  $(U \mathfrak{E}_{\Sigma}^T U^{-1})(\mathbf{r})$ , которые могут появиться, когда координаты  $r_l$  принимают крайние значения. Для изучения связей будет использована *граничная алгебра*

$$\partial(U \mathfrak{E}_{\Sigma}^T U^{-1}) := \left\{ e(\mathbf{0}) \oplus e(\boldsymbol{\varepsilon}) \mid e \in U \mathfrak{E}_{\Sigma}^T U^{-1} \right\} \subset \left[ \bigoplus_{l=1}^L \mathfrak{P}_l \right] \oplus \left[ \bigoplus_{l=1}^L \mathfrak{P}_l \right] \quad (4.29)$$

где  $\mathbf{0} = \{0, \dots, 0\}$  и  $\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_L\}$ . Для нее справедливо представление через образующие

$$\partial(U \mathfrak{E}_{\Sigma}^T U^{-1}) = \vee \left\{ (UE_{\gamma}^T U^{-1})(\mathbf{0}) \oplus (UE_{\gamma}^T U^{-1})(\boldsymbol{\varepsilon}) \mid \gamma \in \Sigma \right\}. \quad (4.30)$$

Напомним, что группировка проекторов в (4.21), проведенная в соответствии с разложением (4.20), есть разбиение наборов  $\mathbb{P}_{\Phi^j}$  на классы эквивалентности  $\mathbb{P}_{\Phi^j}^k$  (они же суть классы  $\mathbb{P}_l$ ) по отношению  $\sim$ . Она мотивирована Предложением 6 и подготавливает применение Теоремы 2.

### 4.2.2 Лемма о граничной алгебре

Роль алгебры  $\mathfrak{P}$  из Теоремы 2 (см.(3.57)) играет алгебра

$$\mathfrak{P}^\partial := \left[ \bigoplus_{l=1}^L \mathfrak{P}_l \right] \oplus \left[ \bigoplus_{l=1}^L \mathfrak{P}_l \right]. \quad (4.31)$$

Она состоит из  $2L$  неприводимых блоков и имеет представление  $\mathfrak{P}^\partial = \vee \mathbb{P}^\partial$ , в котором

$$\mathbb{P}^\partial := \left\{ \mathcal{P}_{\gamma l}^k \oplus O \mid l = 1, \dots, L; k = 1, \dots, n_{\gamma l}; \gamma \in \Sigma \right\} \cup \left\{ O \oplus \mathcal{P}_{\gamma l}^k \mid l = 1, \dots, L; k = 1, \dots, n_{\gamma l}; \gamma \in \Sigma \right\}, \quad (4.32)$$

где  $\mathcal{P}_{\gamma l}^k$  суть проекторы из (4.27),  $O$  – нулевой элемент алгебры  $\bigoplus_{l=1}^L \mathfrak{P}_l$ . Обозначив

$$\mathcal{P}_{\gamma l}^{kr} := \begin{cases} \mathcal{P}_{\gamma l}^k \oplus O, & r = 0 \\ O \oplus \mathcal{P}_{\gamma l}^k, & r = \varepsilon_l \end{cases}, \quad (4.33)$$

имеем:

$$\mathbb{P}^\partial = \left\{ \mathcal{P}_{\gamma l}^{kr} \mid l = 1, \dots, L; k = 1, \dots, n_{\gamma l}; r = 0, \varepsilon_l; \gamma \in \Sigma \right\}. \quad (4.34)$$

Зададим отображение  $\mathcal{T} : \mathbb{P}^\partial \rightarrow \mathbb{P}^\partial$  с помощью введенного ранее формализма, определяющего связи между наборами  $(k, l, r_l)$ . Для каждого  $\gamma \in \Sigma$  положим

$$\mathcal{T}(\mathcal{P}_{\gamma l}^{kr_l}) := \begin{cases} \mathcal{P}_{\gamma l'}^{k' r_{l'}}, & \text{если } (k', l', r_{l'}) \leftrightarrow (k, l, r_l) \\ \mathcal{P}_{\gamma l}^{kr_l}, & \text{если } (k, l, r_l) \text{ не связан ни с каким } (k', l', r_{l'}) \end{cases}. \quad (4.35)$$

Заметим, что второе условие в (3.60) при этом автоматически выполняется, поскольку все проекторы  $\mathcal{P}_{\gamma l}^k$  отвечающие одной вершине  $\gamma \in \Sigma$  ортогональны.

К набору  $\mathbb{P}^\partial$  и отображению  $\mathcal{T}$  применимы Теоремы 1 и 2, так как алгебры  $\mathfrak{P}_l$  из (4.31) неприводимы.

Справедлива лемма

**Лемма 4.2.2.** Пусть набор  $\mathbb{P}^\partial$  задается равенством (4.34), а отображение  $\mathcal{T}$  – соотношениями (4.35). Тогда определяемая ими согласно (3.62) алгебра  $\mathfrak{Q}$  совпадает с граничной алгеброй (4.29):

$$\mathfrak{Q} = \partial(U\mathfrak{E}_\Sigma^T U^{-1}). \quad (4.36)$$

*Доказательство.* Из Леммы 4.2.1 следует, что выполнено вложение

$$\mathfrak{Q} \subset \partial(U\mathfrak{E}_\Sigma^T U^{-1}). \quad (4.37)$$

При этом, из представления (4.30) и рассуждений Раздела 4.1.2 следует, что разделение полученных пар проекторов, определяемых отображением  $\mathcal{T}$ , на отдельные невозможно в рамках рассмотрения отдельных граничных подалгебр

$$\partial(U\mathfrak{E}_\gamma^T U^{-1}) = \vee \{(UE_\gamma^T U^{-1})(\mathbf{0}) \oplus (UE_\gamma^T U^{-1})(\varepsilon)\}. \quad (4.38)$$

Тем самым структура граничной алгебры полностью определяется набором образующих алгебры  $\mathfrak{Q}$ , что приводит к выполнению равенства (4.36).  $\square$

### 4.3 Соединение блоков

При приведении алгебры эйконалов к канонической форме будет использовано *соединение* ее блоков, связанных через граничную алгебру. Опишем эту конструкцию.

Пусть имеются две стандартные алгебры  $\mathfrak{A} = \dot{C}([0, \varepsilon]; \mathfrak{P})$  и  $\mathfrak{B} = \dot{C}([0, \varepsilon']; \mathfrak{P}')$  такие, что

$$\mathfrak{A}(\varepsilon) := \{a(\varepsilon) \mid a \in \mathfrak{A}\} = \mathfrak{P}, \quad \mathfrak{B}(0) := \{b(0) \mid b \in \mathfrak{B}\} = \mathfrak{P}' \quad (4.39)$$

и пусть  $\mathfrak{P} \cong \mathfrak{P}'$  через изометрию  $\mathcal{I} : \mathfrak{P}' \rightarrow \mathfrak{P}$ . Определим алгебру

$$\mathfrak{A}^\oplus \mathfrak{B} := \{a \oplus b \mid a \in \mathfrak{A}, b \in \mathfrak{B}, a(\varepsilon) = \mathcal{I}b(0)\}. \quad (4.40)$$



Алгебры такого вида появятся при переходе к каноническому представлению в ситуации, когда в граничной алгебре  $\partial(U\mathfrak{E}_\Sigma^T U^{-1}) = \mathfrak{Q}$  в представлении (3.72) имеются блоки типа  $\mathfrak{Q}_k^I$  (см. Теорему 2, (3.73)), связывающие граничные значения  $\mathfrak{A}(\varepsilon)$  и  $\mathfrak{B}(0)$  какой-то пары блоков  $\mathfrak{A}$  и  $\mathfrak{B}$  алгебры эйконалов.

Для  $a \in \mathfrak{A}$  и  $b \in \mathfrak{B}$  таких, что  $a(\varepsilon) = \mathcal{I}b(0)$  определим элемент  $a \sqcup b \in C([0, \varepsilon + \varepsilon'], \mathfrak{P})$  по правилу:

$$(a \sqcup b)(r) := \begin{cases} a(r), & r \in [0, \varepsilon] \\ \mathcal{I}b(r - \varepsilon), & r \in [\varepsilon, \varepsilon + \varepsilon'] \end{cases}, \quad (4.41)$$

который будем называть *соединением* элементов  $a$  и  $b$ . Затем определим *соединение алгебр*  $\mathfrak{A}$  и  $\mathfrak{B}$ :

$$\mathfrak{A} \sqcup \mathfrak{B} := \{a \sqcup b \in C([0, \varepsilon + \varepsilon']; \mathfrak{P}) \mid a \in \mathfrak{A}, b \in \mathfrak{B}, a(\varepsilon) = \mathcal{I}b(0)\}. \quad (4.42)$$

Легко видеть, что  $\mathfrak{A} \sqcup \mathfrak{B}$  есть подалгебра в  $C([0, \varepsilon + \varepsilon']; \mathfrak{P})$ , являющаяся стандартной алгеброй, для которой справедливо представление:

$$\mathfrak{A} \sqcup \mathfrak{B} = \{c \in C([0, \varepsilon + \varepsilon']; \mathfrak{P}) \mid c(0) \in \mathfrak{A}(0), c(\varepsilon + \varepsilon') \in \mathcal{I}[\mathfrak{B}(\varepsilon')]\}, \quad (4.43)$$

и выполнены равенства

$$(\mathfrak{A} \sqcup \mathfrak{B})(0) = \mathfrak{A}(0), \quad (\mathfrak{A} \sqcup \mathfrak{B})(\varepsilon + \varepsilon') = \mathcal{I}[\mathfrak{B}(\varepsilon')]. \quad (4.44)$$

Несложно заметить, что алгебры  $\mathfrak{A}^\oplus \mathfrak{B}$  и  $\mathfrak{A} \sqcup \mathfrak{B}$  изометрически изоморфны. Резюмируя рассмотрения, условимся говорить, что алгебры  $\mathfrak{A}$  и  $\mathfrak{B}$  допускают *соединение через концы*  $r = \varepsilon$  и  $r' = 0$ . Отметим при этом, что вид алгебр  $\mathfrak{A}(0)$  и  $\mathfrak{B}(\varepsilon')$  на возможность соединения и его результат влияния не оказывают.

Очевидным образом изменяя определение (4.41), можно ввести *соединение*  $\mathfrak{A} \sqcup \mathfrak{B} \subset C([0, \varepsilon + \varepsilon']; \mathfrak{P})$

$$\text{через концы } r = \varepsilon \text{ и } r' = \varepsilon', \text{ если } \mathfrak{A}(\varepsilon) = \mathcal{I}[\mathfrak{B}(\varepsilon')]; \quad (4.45)$$

$$\text{через концы } r = 0 \text{ и } r' = \varepsilon', \text{ если } \mathfrak{A}(0) = \mathcal{I}[\mathfrak{B}(\varepsilon')]; \quad (4.46)$$

$$\text{через концы } r = 0 \text{ и } r' = 0, \text{ если } \mathfrak{A}(0) = \mathcal{I}[\mathfrak{B}(0)]. \quad (4.47)$$

На элементах алгебры  $\mathfrak{A} = \dot{C}([0, \varepsilon], \mathfrak{P})$  определим *транспозицию*  $t : a \mapsto a^t$ ,  $a^t(r) := a(\varepsilon - r)$ ,  $r \in [0, \varepsilon]$  и примем  $\mathfrak{A}^t := \{a^t \mid a \in \mathfrak{A}\}$ .

Любая изометрия  $\mathcal{M} : \mathfrak{P} \rightarrow \mathfrak{P}$  определяет преобразование  $\check{\mathcal{M}} : C([0, \varepsilon], \mathfrak{P}) \rightarrow C([0, \varepsilon], \mathfrak{P})$ ,  $(\check{\mathcal{M}}a)(r) := \mathcal{M}[a(r)]$ ,  $r \in [0, \varepsilon]$ . Для стандартной алгебры  $\mathfrak{A}$  примем  $\check{\mathcal{M}}\mathfrak{A} := \{\check{\mathcal{M}}a \mid a \in \mathfrak{A}\} \subset C([0, \varepsilon], \mathfrak{P})$ .

Алгебры  $\mathfrak{A}^t$  и  $\mathcal{M}\mathfrak{A}$  также являются стандартными; легко видеть, что  $\check{\mathcal{M}}\mathfrak{A} \cong \mathfrak{A}^t \cong \mathfrak{A}$  и выполнено:

$$\mathfrak{A}^t(0) = \mathfrak{A}(\varepsilon), \quad \mathfrak{A}^t(\varepsilon) = \mathfrak{A}(0); \quad (4.48)$$

$$(\check{\mathcal{M}}\mathfrak{A})(0) = \mathcal{M}[\mathfrak{A}(0)], \quad (\check{\mathcal{M}}\mathfrak{A})(\varepsilon) = \mathcal{M}[\mathfrak{A}(\varepsilon)]. \quad (4.49)$$

#### 4.4 Построение канонического представления

Переход к каноническому представлению алгебры эйконалов вполне подготовлен и описывается следующей процедурой.

**Шаг 1.** Определим изометрию  $\mathbf{I}_0 : \mathfrak{E}_\Sigma^T \rightarrow U\mathfrak{E}_\Sigma^T U^{-1} \stackrel{(4.26)}{\subset} \bigoplus_{l=1}^L C([0, \varepsilon_l], \mathfrak{P}_l)$ , задав ее на образующих:

$$\mathbf{I}_0 E_\gamma^T := U E_\gamma^T U^{-1} \stackrel{(4.27)}{=} \bigoplus \sum_{l=1}^L \left[ \sum_{k=1}^{n_{\gamma l}} \tau_{\gamma l}^k P_{\gamma l}^k \right]. \quad (4.50)$$

Блоки алгебры  $\mathbf{I}_0 \mathfrak{E}_\Sigma^T$  суть

$$[\mathbf{I}_0 \mathfrak{E}_\Sigma^T]_l := \vee \left\{ \sum_{k=1}^{n_{\gamma l}} \tau_{\gamma l}^k P_{\gamma l}^k \mid \gamma \in \Sigma \right\} \subset C([0, \varepsilon_l]; \mathfrak{P}_l). \quad (4.51)$$

Пусть блоки  $[\mathbf{I}_0 \mathfrak{E}_\Sigma^T]_l$  и  $[\mathbf{I}_0 \mathfrak{E}_\Sigma^T]_{l'}$  таковы, что их граничные значения  $[\mathbf{I}_0 \mathfrak{E}_\Sigma^T]_l(\varepsilon_l)$  и  $[\mathbf{I}_0 \mathfrak{E}_\Sigma^T]_{l'}(0)$  образуют один блок типа  $\mathfrak{Q}_k^I$  в граничной алгебре  $\partial(\mathbf{I}_0 \mathfrak{E}_\Sigma^T) := \partial(U\mathfrak{E}_\Sigma^T U^{-1}) = \mathfrak{Q}$  (см. Теорему 2). В этом случае отображение  $\mathcal{T}$  (см. (4.35)) определяет изометрию  $\mathcal{I} : \mathfrak{P}_{l'} \rightarrow \mathfrak{P}_l$

$$\mathcal{I}(P_{\gamma l'}^{k'}) = P_{\gamma l}^k, \quad \text{если } \mathcal{T}(P_{\gamma l'}^{k'0}) = P_{\gamma l}^{k\varepsilon_l}. \quad (4.52)$$

Как следствие, корректно определена алгебра  $[\mathbf{I}_0 \mathfrak{E}_\Sigma^T]_l \sqcup [\mathbf{I}_0 \mathfrak{E}_\Sigma^T]_{l'}$  - соединение этих блоков через концы  $r_l = \varepsilon_l$  и  $r_{l'} = 0$ . Несложно проверить, что элементы

$$([\mathbf{I}_0 E_\gamma^T]_l \sqcup [\mathbf{I}_0 E_\gamma^T]_{l'}) (r) := \begin{cases} \sum_{k=1}^{n_{\gamma l}} \tau_{\gamma l}^k(r) P_{\gamma l}^k, & r \in [0, \varepsilon_l]; \\ \mathcal{I} \left[ \sum_{k'=1}^{n_{\gamma l'}} \tau_{\gamma l'}^{k'}(r - \varepsilon_l) P_{\gamma l'}^{k'} \right], & r \in [\varepsilon_l, \varepsilon_l + \varepsilon_{l'}] \end{cases} \quad (4.53)$$

составляют систему ее образующих.

По свойствам отображения  $\mathcal{T}$ , из существования связи между блоками следует, что  $n_{\gamma l} = n_{\gamma l'}$  для любого  $\gamma \in \Sigma$ , а соединения  $[\mathbf{I}_0 E_\gamma^T]_l \sqcup [\mathbf{I}_0 E_\gamma^T]_{l'}$  могут быть представлены в следующем виде:

$$([\mathbf{I}_0 E_\gamma^T]_l \sqcup [\mathbf{I}_0 E_\gamma^T]_{l'}) (r) = \sum_{k=1}^{n_{\gamma l}} [\tau_{\gamma l}^k \sqcup \tau_{\gamma l'}^{k'}](r) P_{\gamma l}^k, \quad r \in [0, \varepsilon_l + \varepsilon_{l'}], \quad (4.54)$$

где

$$[\tau_{\gamma l}^k \sqcup \tau_{\gamma l'}^{k'}](r) := \begin{cases} \tau_{\gamma l}^k(r), & r \in [0, \varepsilon_l]; \\ \tau_{\gamma l'}^{k'}(r - \varepsilon_l), & r \in [\varepsilon_l, \varepsilon_l + \varepsilon_{l'}]. \end{cases} \quad (4.55)$$

Функции  $[\tau_{\gamma l}^k \sqcup \tau_{\gamma l'}^{k'}]$  являются непрерывными в силу равенства  $\tau_{\gamma l}^k(\varepsilon_l) = \tau_{\gamma l'}^{k'}(0)$ , определяющего связь между наборами  $(k, l, \varepsilon_l)$  и  $(k', l', 0)$ , которая, в свою очередь, определяет отображение  $\mathcal{T}$  и изоморфизм  $\mathcal{I}$ . Напомним, что каждая  $\tau_{\gamma l}^k$  есть линейная функция одного из двух видов:

$$\text{либо } \tau_{\gamma l}^k(r) = t_{\gamma l}^k + r, \text{ либо } \tau_{\gamma l}^k(r) = t_{\gamma l}^k - r, \quad (4.56)$$

где  $t_{\gamma l}^k = \text{const} \geq 0$ .

Пусть, для определенности,  $\tau_{\gamma l}^k(r) = t_{\gamma l}^k + r$ . Тогда из условия  $\tau_{\gamma l}^k(\varepsilon_l) = \tau_{\gamma l'}^{k'}(0)$  и того, что равенство  $\tau_{\gamma l}^k(r_l) = \tau_{\gamma l'}^{k'}(r_{l'})$  возможно *только* в случае граничных значений параметров  $r_l$  и  $r_{l'}$  (в нашем случае  $r_l = \varepsilon_l$ ,  $r_{l'} = 0$ ), следует, что  $\tau_{\gamma l'}^{k'}(r) = t_{\gamma l'}^{k'} + r$ , причем  $t_{\gamma l'}^{k'} = t_{\gamma l}^k + \varepsilon_l$ . Это приводит к следующим равенствам:

$$\begin{aligned} [\tau_{\gamma l}^k \sqcup \tau_{\gamma l'}^{k'}](r) &= \begin{cases} t_{\gamma l}^k + r, & r \in [0, \varepsilon_l]; \\ (t_{\gamma l}^k + \varepsilon_l) + (r - \varepsilon_l), & r \in [\varepsilon_l, \varepsilon_l + \varepsilon_{l'}]; \end{cases} = \\ &= \begin{cases} t_{\gamma l}^k + r, & r \in [0, \varepsilon_l]; \\ t_{\gamma l}^k + r, & r \in [\varepsilon_l, \varepsilon_l + \varepsilon_{l'}]; \end{cases} = t_{\gamma l}^k + r, \quad r \in [0, \varepsilon_l + \varepsilon_{l'}]. \end{aligned} \quad (4.57)$$

Аналогичные рассуждения справедливы и в случае  $\tau_{\gamma l}^k(r) = t_{\gamma l}^k - r$ . Таким образом, соединение функций  $\tau_{\gamma l}^k$  и  $\tau_{\gamma l'}^{k'}$  является *линейной* функцией того же вида, что и сами  $\tau_{\gamma l}^k$  и  $\tau_{\gamma l'}^{k'}$ . Из этого следует, что соединение блоков  $[\mathbf{I}_0 \mathfrak{E}_\Sigma^T]_l \sqcup [\mathbf{I}_0 \mathfrak{E}_\Sigma^T]_{l'}$  есть стандартная алгебра с образующими того же вида, что и у исходных блоков.

В рассмотренном случае связаны граничные значения  $[\mathbf{I}_0 \mathfrak{E}_\Sigma^T]_l(\varepsilon_l)$  и  $[\mathbf{I}_0 \mathfrak{E}_\Sigma^T]_{l'}(0)$ . Вполне аналогично рассматриваются случаи других возможных связей между граничными значениями, допускающих соединение блоков: см. (4.45) - (4.47).

**Шаг 2.** Пусть блоки  $[\mathbf{I}_0 \mathfrak{E}_\Sigma^T]_l$  и  $[\mathbf{I}_0 \mathfrak{E}_\Sigma^T]_{l'}$  допускают соединение. Определим отображение

$$\mathbf{I}_1 : \mathfrak{E}_\Sigma^T \rightarrow \mathbf{I}_1 \mathfrak{E}_\Sigma^T \subset \left[ \bigoplus_{\lambda=1}^L \bigoplus_{(\lambda \neq l, l')} C([0, \varepsilon_\lambda]; \mathfrak{P}_\lambda) \right] \oplus C([0, \varepsilon_l + \varepsilon_{l'}]; \mathfrak{P}_l), \quad (4.58)$$

задав его на образующих:

$$\mathbf{I}_1 E_\gamma^T := \left[ \bigoplus \sum_{\lambda=1}^L \bigoplus_{(\lambda \neq l, l')} [\mathbf{I}_0 E_\gamma^T]_\lambda \right] \oplus ([\mathbf{I}_0 E_\gamma^T]_l \sqcup [\mathbf{I}_0 E_\gamma^T]_{l'}), \quad \gamma \in \Sigma. \quad (4.59)$$

Нетрудно видеть, что отображение  $\mathbf{I}_1$  есть изометрия: изометричность алгебр  $\mathbf{I}_0 \mathfrak{E}_\Sigma^T$  и  $\mathbf{I}_1 \mathfrak{E}_\Sigma^T$  вполне аналогична изометричности  $\mathfrak{A}^\oplus \mathfrak{B}$  и  $\mathfrak{A} \sqcup \mathfrak{B}$ . Изометрия  $\mathbf{I}_1$  переводит алгебру эйконалов в алгебру того же вида, что и  $\mathbf{I}_0 \mathfrak{E}_\Sigma^T$ , но с меньшим на 1 количеством блоков; при этом в граничной алгебре  $\partial(\mathbf{I}_1 \mathfrak{E}_\Sigma^T)$  блоков типа  $\mathfrak{Q}_k^I$  становится также на 1 меньше.

Последовательно заменяя аналогичным образом все пары связанных блоков на их соединения, придем к некоторому изометрическому изоморфизму  $\mathbf{I}_N : \mathfrak{E}_\Sigma^T \rightarrow \mathbf{I}_N \mathfrak{E}_\Sigma^T$ , такому, что в граничной алгебре  $\partial(\mathbf{I}_N \mathfrak{E}_\Sigma^T)$  уже не содержится ни одного блока типа  $\mathfrak{Q}_k^I$ . Таким образом, отображение  $\mathbf{I}_N$  переводит алгебру эйконалов в алгебру той же структуры, что и  $\mathbf{I}_0 \mathfrak{E}_\Sigma^T$ , но уже с *независимыми* блоками. Отметим также, что в процессе перехода к представлению  $\mathbf{I}_N \mathfrak{E}_\Sigma^T$  несколько (больше 2) блоков исходного представления  $\mathbf{I}_0 \mathfrak{E}_\Sigma^T$  могут соединиться в один новый блок.

**Шаг 3.** На заключительном шаге еще раз используется неприводимость алгебр  $\mathfrak{P}_l$ . Для каждой из них подберем преобразование, реализующее изометрию  $\mathfrak{P}_l \cong \mathbb{M}^{\varkappa_l}$ . Как следствие, определится изометрия

$$\mathbf{I} : \mathfrak{E}_\Sigma^T \rightarrow \bigoplus_{l=1}^{\mathcal{L}} \dot{C}([0, \zeta_l]; \mathbb{M}^{\varkappa_l}), \quad (4.60)$$

заданная на образующих равенствами:

$$\mathbf{I} E_\gamma^T := \bigoplus \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \left[ \sum_{k=1}^{s_{\gamma l}} \tilde{\tau}_{\gamma l}^k(\cdot) \tilde{P}_{\gamma l}^k \right], \quad \gamma \in \Sigma, \quad (4.61)$$

где  $\tilde{P}_{\gamma l}^k \in \mathbb{M}^{\varkappa_l}$  суть одномерные (матричные) проекторы, попарно ортогональные для фиксированной вершины  $\gamma \in \Sigma$ , а  $\tilde{\tau}_{\gamma l}^k$  - линейные функции одного из

двух видов: либо  $\tilde{\tau}_{\gamma l}^k(r) = \tilde{t}_{\gamma l}^k + r$ , либо  $\tilde{\tau}_{\gamma l}^k(r) = \tilde{t}_{\gamma l}^k - r$ ,  $r \in [0, \zeta_l]$ , где  $\tilde{t}_{\gamma l}^k \geq 0$  суть постоянные, а каждое  $\zeta_l$  есть сумма какого-то набора длин  $\varepsilon_k$ .

Таким образом, последовательными преобразованиями исходного параметрического представления (4.2), мы получаем представление такой же структуры, но уже с *независимыми* блоками, являющимися стандартными алгебрами. Сформулируем итоговый результат.

**Теорема 3.** *Существует изометрический изоморфизм  $\mathbf{I}$ , доставляющий алгебре  $\mathbf{E}_{\Sigma}^T$  и ее образующим-эйконалам представление*

$$\mathbf{I}\mathbf{E}_{\Sigma}^T = \bigoplus_{l=1}^{\mathcal{L}} \dot{C}([0, \zeta_l]; \mathbb{M}^{\varkappa_l}); \quad \mathbf{I}E_{\gamma}^T = \bigoplus_{l=1}^{\mathcal{L}} \left[ \sum_{k=1}^{s_{\gamma l}} \tilde{\tau}_{\gamma l}^k \tilde{P}_{\gamma l}^k \right], \quad \gamma \in \Sigma. \quad (4.62)$$

В нем  $\tilde{\tau}_{\gamma l}^k$  – линейные функции от  $r_l \in [0, \zeta_l]$ , такие, что  $|\frac{d\tilde{\tau}_{\gamma l}^k}{dr_l}| = 1$ , а их области значений суть сегменты длины  $\zeta_l$ , которые могут иметь разве что общие концы.  $\tilde{P}_{\gamma l}^k \in \mathbb{M}^{\varkappa_l}$  суть проекторы, попарно ортогональные для каждого  $\gamma$  и такие, что выполнено  $\vee \{ \tilde{P}_{\gamma l}^k \mid k = 1, \dots, s_{\gamma l}; \gamma \in \Sigma \} = \mathbb{M}^{\varkappa_l}$ .

Представление такого вида будем называть *каноническим*. Оно не единственно, но можно показать, что любые два таких представления отличаются друг от друга нумерацией блоков  $[\mathbf{I}\mathbf{E}_{\Sigma}^T]_l$ , их транспозицией  $[\mathbf{I}\mathbf{E}_{\Sigma}^T]_l \rightarrow [\mathbf{I}\mathbf{E}_{\Sigma}^T]_l^t$  и изометриями  $[\mathbf{I}\mathbf{E}_{\Sigma}^T]_l \rightarrow \check{\mathcal{M}}[\mathbf{I}\mathbf{E}_{\Sigma}^T]_l$ . Неоднозначность, связанная с транспозицией, очевидно, отвечает двум направлениям изменения аргумента каждой из функций  $\tilde{\tau}_{\gamma l}^k$  на интервале  $[0, \zeta_l]$  (двум возможным параметризациям  $l$ -го блока).

**Замечание 2.** Каноническому представлению отвечает граничная алгебра  $\partial(\mathbf{I}\mathbf{E}_{\Sigma}^T)$ . Для нее правая часть представления (3.72) исчерпывается вторым слагаемым: алгебра содержит только независимые блоки типа  $\mathfrak{Q}^{II}$ . В самом деле, все возможные парные блоки типа  $\mathfrak{Q}^I$  исчезают на **Шаге 2** при переходе к каноническому представлению.

## Глава 5. Спектр алгебры эйконалов

Главное достоинство канонического представления состоит в том, что из него легко извлекается полная информация о спектре алгебры  $\mathfrak{E}_\Sigma^T$  и определяется ряд ее инвариантов.

### 5.1 Структура спектра

Сопоставим содержание Теоремы 3 и Предложения 2. С учетом отмеченной после Теоремы 3 неоднозначности канонического представления, будем считать, что нумерация и параметризация его блоков фиксированы. Само представление (4.62) перепишем в *обновленных* удобных для дальнейшего обозначениях (заменяя  $\zeta_l$  на  $\varepsilon_l$  и  $s_{\gamma l}$  на  $n_{\gamma l}$ , а также убрав  $(\sim)$ ):

$$\mathbf{I}\mathfrak{E}_\Sigma^T = \bigoplus_{l=1}^{\mathcal{L}} \dot{C}([0, \varepsilon_l]; \mathbb{M}^{\varkappa_l}); \quad \mathbf{I}E_\gamma^T = \bigoplus_{l=1}^{\mathcal{L}} \left[ \sum_{k=1}^{n_{\gamma l}} \tau_{\gamma l}^k P_{\gamma l}^k \right], \quad \gamma \in \Sigma. \quad (5.1)$$

Пусть

$$\psi_{\gamma l}^k := \{\tau_{\gamma l}^k(r_l) \mid r_l \in (0, \varepsilon_l)\} = (\tau_{\gamma l}^k(0), \tau_{\gamma l}^k(\varepsilon_l)) \quad (5.2)$$

суть временные клетки, соответствующие каноническому представлению. Правая часть представления (5.1) для оператора  $\mathbf{I}E_\gamma^T$  определяет его спектр и, в силу изометричности  $\mathbf{I}$ , спектр эйконала:

$$\sigma_{\text{ac}}(E_\gamma^T) = [1, T_1^\gamma] \cup [T_2^\gamma, T_3^\gamma] \cup \dots \cup [T_{N_\gamma-1}^\gamma, T_{N_\gamma}^\gamma] = \bigcup_{l=1}^{\mathcal{L}} \bigcup_{k=1}^{n_{\gamma l}} \overline{\psi_{\gamma l}^k} \quad (5.3)$$

где каждый из сегментов  $[T_{i-1}^\gamma, T_i^\gamma]$ , в свою очередь, покрывается клетками  $\overline{\psi_{\gamma l}^k}$ , которые либо не пересекаются, либо имеют общие концы. По Предложению 2, то же верно и для клеток  $\overline{\psi_{\gamma\Phi}^i}$ , связанных с параметрическим представлением (2.27). Сравнивая разложения (5.3) и (2.28), заключаем, что каноническому представлению соответствует новая (каноническая) нарезка спектра эйконала на временные клетки. Можно показать, что каждая новая клетка состоит из старых, т.е. переходу к каноническому представлению отвечает укрупнение временных клеток.

Как было показано в Предложении 5 и дальнейших рассуждениях, спектр стандартной алгебры  $\dot{C}([a,b]; \mathbb{M}^n)$  состоит из (классов эквивалентности) неприводимых представлений, отвечающих *внутренним* точкам сегмента  $[a,b]$  и кластеров (если таковые имеются)  $\{\hat{\pi}_a^1, \dots, \hat{\pi}_a^{n_a}\}$  и  $\{\hat{\pi}_b^1, \dots, \hat{\pi}_b^{n_b}\}$ , примыкающих к его концам. Такой спектр, оснащенный топологией Джекобсона, гомеоморфен пространству, которое естественно назвать *сегментом с расщепленными концами*. Оно описывается следующей конструкцией (см., например, [34]).

Рассмотрим  $n_a$  полусегментов  $[a,b)$  и  $n_b$  полусегментов  $(a,b]$  с топологией из  $\mathbb{R}$ . отождествим *внутренние* точки всех полусегментов, имеющие *одинаковые* координаты. Образовавшееся фактор-пространство  $\mathcal{S}_{[a,b]}$  состоит из части  $S_{(a,b)}$ , гомеоморфной  $(a,b)$  и двух наборов попарно неотделимых точек (двух кластеров)  $K_a$  и  $K_b$ , которые состоят из  $n_a$  и  $n_b$  точек и отвечают концам  $a$  и  $b$  соответственно. Каждый из кластеров неотделим от  $S_{(a,b)}$ . Часть  $S_{(a,b)} := \text{int } \mathcal{S}_{[a,b]}$  есть множество *внутренних точек*, каждая из которых имеет окрестность, гомеоморфную (открытому) интервалу вещественной оси.

По первому из представлений (5.1), спектр алгебры  $\mathbf{IE}_\Sigma^T$  гомеоморфен дизъюнктному объединению сегментов

$$\mathcal{S}_\Sigma^T = \mathcal{S}_{[0,\varepsilon_1]} \cup \dots \cup \mathcal{S}_{[0,\varepsilon_\mathcal{L}]}; \quad \mathcal{S}_{[0,\varepsilon_l]} := K_0^l \cup S_{(0,\varepsilon_l)} \cup K_{\varepsilon_l}^l. \quad (5.4)$$

Каждый сегмент  $\mathcal{S}_{[0,\varepsilon_l]}$  характеризуется как *максимальная компактная линейно-связная компонента* пространства  $\mathcal{S}_\Sigma^T$ , а  $S_{(0,\varepsilon_l)} = \text{int } \mathcal{S}_{[0,\varepsilon_l]}$  - как часть спектра, гомеоморфная интервалу  $(0,\varepsilon_l)$ .

Спектры алгебр  $\mathfrak{E}_\Sigma^T$  и  $\mathbf{IE}_\Sigma^T$  связаны гомеоморфизмом  $\mathbf{I}_* : \widehat{\mathfrak{E}}_\Sigma^T \rightarrow \widehat{\mathbf{IE}}_\Sigma^T$  (см. (2.30)). Следовательно,  $\widehat{\mathfrak{E}}_\Sigma^T$  гомеоморфен пространству  $\mathcal{S}_\Sigma^T$  и допускает представление

$$\widehat{\mathfrak{E}}_\Sigma^T = \mathcal{S}_1 \cup \dots \cup \mathcal{S}_\mathcal{L}; \quad \mathcal{S}_l = \eta(\mathcal{S}_{[0,\varepsilon_l]}) = \mathcal{K}_0^l \cup S_l \cup \mathcal{K}_{\varepsilon_l}^l, \quad (5.5)$$

где  $\eta : \mathcal{S}_\Sigma^T \rightarrow \widehat{\mathfrak{E}}_\Sigma^T$  - гомеоморфизм,  $S_l = \eta(S_{(0,\varepsilon_l)})$ ,  $\mathcal{K}_0^l = \eta(K_0^l)$ ,  $\mathcal{K}_{\varepsilon_l}^l = \eta(K_{\varepsilon_l}^l)$ . Оно определяет разбиение спектра на максимальные компактные линейно-связные компоненты и, как таковое, имеет инвариантный топологический смысл. Последнее относится и к разбиению *сегментов*  $\mathcal{S}_l$  на внутренние точки  $S_l$  и множества граничных точек  $\mathcal{K}_0^l, \mathcal{K}_{\varepsilon_l}^l$ . Если множество  $\mathcal{K}_r^l$  содержит больше одной точки, мы называем его *кластером*. Множество внутренних точек спектра есть  $\text{int } \widehat{\mathfrak{E}}_\Sigma^T = S_1 \cup \dots \cup S_\mathcal{L}$ .

## 5.2 Характеристики точек спектра

### 5.2.1 Определения

Для начала рассмотрим структуру парциальных алгебр  $\mathfrak{E}_\gamma^T = \vee\{E_\gamma^T\} \subset \mathfrak{E}_\Sigma^T$ . Через  $\pi$  и  $\hat{\pi}$  обозначаются неприводимое представление и его класс эквивалентности. Соответствие  $\varphi(E_\gamma^T) \leftrightarrow \varphi$  есть изометрия алгебр  $\mathfrak{E}_\gamma^T$  и  $C(\sigma_{\text{ac}}(E_\gamma^T))$ , определяемая первым равенством в (2.38): см. [30]. Каждая  $\mathfrak{E}_\gamma^T$  есть коммутативная подалгебра в  $\mathfrak{E}_\Sigma^T$ . Ее спектр (множество характеров)  $\widehat{\mathfrak{E}_\gamma^T}$  исчерпывается мерами Дирака:

$$\widehat{\mathfrak{E}_\gamma^T} = \left\{ \hat{\delta}_t \mid t \in \sigma_{\text{ac}}(E_\gamma^T) \right\}, \quad \mathfrak{E}_\gamma^T \ni \varphi(E_\gamma^T) \xrightarrow{\hat{\delta}_t} \varphi(t) \in \mathbb{R}; \quad (5.6)$$

при этом  $\hat{\delta}_t$  состоит из единственного элемента  $\delta_t$ : см. [32; 35].

Любое представление  $\rho$  алгебры  $\mathfrak{E}_\gamma^T$  разлагается по неприводимым. Поэтому, согласно (5.6) имеем:

$$\rho \sim \delta_{t_1} \oplus \dots \oplus \delta_{t_p}, \quad \rho(\varphi(E_\gamma^T)) \sim \text{diag} \{ \varphi(t_1), \dots, \varphi(t_p) \}. \quad (5.7)$$

Ясно также, что для эквивалентных представлений из класса  $\hat{\rho}$  набор  $\{t_1, \dots, t_p\}$  будет одним и тем же. Отметим, что в разложение представления  $\rho$  по характерам  $\delta_t$  могут одновременно входить *несколько* представлений с *одинаковыми*  $t$ .

Перейдем к рассмотрению спектра  $\widehat{\mathfrak{E}_\Sigma^T}$  всей алгебры эйконалов. Заметим, что в силу того, что парциальные алгебры  $\mathfrak{E}_\gamma^T$  являются подалгебрами в  $\mathfrak{E}_\Sigma^T$ , представления  $\pi \in \hat{\pi} \in \widehat{\mathfrak{E}_\Sigma^T}$  являются некоторыми, вообще говоря приводимыми, представлениями алгебр  $\mathfrak{E}_\gamma^T$ . Тем самым, справедливо равенство:

$$\pi|_{\mathfrak{E}_\gamma^T} \sim \delta_\gamma^{t_1(\pi)} \oplus \dots \oplus \delta_\gamma^{t_p(\pi)}, \quad \pi \in \hat{\pi} \in \widehat{\mathfrak{E}_\Sigma^T} \quad (5.8)$$

Сопоставим каждому представлению  $\pi$  набор чисел  $t_\gamma^i(\pi)$ , определяемых равенством (5.8):

$$\sigma_\gamma(\pi) := \{t_\gamma^1(\pi), \dots, t_\gamma^p(\pi)\}. \quad (5.9)$$

Легко установить равенство

$$\sigma_\gamma(\pi) = \sigma_\gamma(\pi'), \quad \pi, \pi' \in \hat{\pi}. \quad (5.10)$$



Из него следует корректность определения

$$\sigma_\gamma(\hat{\pi}) := \sigma_\gamma(\pi), \quad (5.11)$$

где  $\pi$  есть произвольный элемент из класса  $\hat{\pi}$ . Числовой набор  $\sigma_\gamma(\hat{\pi})$  является инвариантной характеристикой точки спектра  $\hat{\pi}$ .

Рассмотрим элемент алгебры  $\mathbb{M}^{\varkappa(\pi)}$ , определяемый равенством

$$\hat{E}_\gamma^T(\pi) := \pi(E_\gamma^T) \in \mathbb{M}^{\varkappa(\pi)}. \quad (5.12)$$

Из спектральной теоремы для самосопряженных операторов и равенства (5.9) следует представление

$$\hat{E}_\gamma^T(\pi) = \sum_{k=1}^{n_\gamma(\hat{\pi})} t_\gamma^k(\hat{\pi}) \mathcal{R}_\gamma^k(\pi), \quad (5.13)$$

где  $\mathcal{R}_\gamma^k(\pi)$  - некоторые ортогональные проекторы,  $n_\gamma(\hat{\pi}) := p(\pi)$ . Определим отображение

$$\mu_\gamma : \sigma_{\text{ac}}(E_\gamma^T) \rightarrow 2^{\widehat{\mathfrak{E}}_\Sigma^T}, \quad \mu_\gamma(t) := \{\hat{\pi} \in \widehat{\mathfrak{E}}_\Sigma^T \mid t \in \sigma_\gamma(\hat{\pi})\}, \quad (5.14)$$

которое будем называть *координатным*.

В дальнейшем каноническое представление (5.1) считается фиксированным, а именно выбрана определенная нумерация блоков  $l = 1, \dots, \mathcal{L}$ , параметризация  $r \in [0, \varepsilon_l]$  для функций  $\tau_{\gamma l}^k(r)$  и проекторы  $P_{\gamma l}^k$ .

## 5.2.2 Внутренние точки

Пусть  $\hat{\pi} \in S_l \subset \text{int } \widehat{\mathfrak{E}}_\Sigma^T$  - внутренняя точка спектра. Тогда справедливы равенства

$$n_\gamma(\hat{\pi}) = n_{\gamma l}, \quad \varkappa(\hat{\pi}) = \varkappa_l, \quad (5.15)$$

а также

$$t_\gamma^k(\hat{\pi}) = \tau_{\gamma l}^k(r), \quad k = 1, \dots, n_{\gamma l} \quad (5.16)$$

для некоторого  $r \in (0, \varepsilon_l)$ . Тем самым, элементы открытого интервала  $S_l$  индексируются параметром  $r$  и далее будут обозначаться  $\hat{\pi}_l(r)$ .

Для множества  $\sigma_\gamma$  и отображения  $\mu_\gamma$  справедливы равенства

$$\sigma_\gamma(\hat{\pi}_l(r)) = \{\tau_{\gamma l}^1(r), \dots, \tau_{\gamma l}^{n_{\gamma l}}(r)\}, \quad (5.17)$$

$$\mu_\gamma(\tau_{\gamma l}^k(r)) = \{\hat{\pi}_l(r)\}, \quad k = 1, \dots, n_{\gamma l}. \quad (5.18)$$

Важно, что множество в правой части (5.18) состоит из единственной точки спектра. Это следствие свойств функций  $\tau_{\gamma l}^k$ , входящих в каноническое представление: при  $r \in (0, \varepsilon_l)$  значения  $\tau_{\gamma l}^k$  попадают внутрь интервалов (5.2), которые не имеют общих точек. Из (5.17) также следует, что выполняется равенство

$$\bigcup_{\hat{\pi} \in S_l} \sigma_\gamma(\hat{\pi}) = \bigcup_{k=1}^{n_{\gamma l}} \psi_{\gamma l}^k. \quad (5.19)$$

Сопоставляя правую часть второго равенства для канонического представления (5.1) с правой частью представления (5.13), заключаем, что для каждой точки интервала  $\hat{\pi}_l(r) \in S_l$  существует такое  $\pi \in \hat{\pi}_l(r)$ , что выполнены равенства

$$\mathcal{R}_\gamma^k(\pi) = P_{\gamma l}^k, \quad k = 1, \dots, n_{\gamma l}, \quad \gamma \in \Sigma. \quad (5.20)$$

### 5.2.3 Точки кластеров

Предположим, что сегмент спектра  $\mathcal{S}_l$  содержит кластер  $\mathcal{K}_0^l = \{\hat{\pi}^1, \dots, \hat{\pi}^{m_0^l}\}$  (см. (5.5)). Этот кластер образуется при предельном переходе  $r \rightarrow 0$ , когда неприводимое представление  $\hat{\pi}_l(r)$  переходит в приводимое  $\hat{\pi}_l(0)$ , которое распадается на неприводимые  $\hat{\pi}^1, \dots, \hat{\pi}^{m_0^l}$ . Пусть  $\pi^1 \in \hat{\pi}^1, \dots, \pi^{m_0^l} \in \hat{\pi}^{m_0^l}$  есть набор представителей всех точек кластера. Тогда существует унитарный оператор  $V$  в  $\mathbb{M}^{\varkappa_l}$  такой, что

$$V \left( \bigoplus_{i=1}^{m_0^l} \hat{E}_\gamma^T(\pi^i) \right) V^{-1} = \sum_{k=1}^{n_{\gamma l}} \tau_{\gamma l}^k(0) P_{\gamma l}^k, \quad \gamma \in \Sigma. \quad (5.21)$$

Как следствие, имеем равенство для размерностей представлений:

$$\sum_{i=1}^{m_0^l} \varkappa(\hat{\pi}^i) = \varkappa_l. \quad (5.22)$$

Соотношения (5.16) при  $r \rightarrow 0$  переходят в

$$t_\gamma^k(\hat{\pi}^i) = \tau_{\gamma l}^{k'}(0), \quad k = 1, \dots, n_\gamma(\hat{\pi}^i), \quad i = 1, \dots, m_0^l, \quad (5.23)$$

где  $k' = k'(k) \in \{1, \dots, n_{\gamma l}\}$ , что связано с распадением представления на неприводимые блоки, имеющие внутреннюю независимую нумерацию.

Для множеств  $\sigma_\gamma(\hat{\pi}^i) = \{t_\gamma^1(\hat{\pi}^i), \dots, t_\gamma^{n_\gamma(\hat{\pi}^i)}(\hat{\pi}^i)\}$  согласно (5.21) имеем:

$$\bigcup_{i=1}^{m_0^l} \sigma_\gamma(\hat{\pi}^i) = \{\tau_{\gamma l}^1(0), \dots, \tau_{\gamma l}^{n_{\gamma l}}(0)\}. \quad (5.24)$$

Для координатных отображений  $\mu_\gamma$  выполнено *ровно одно* из следующих равенств:

$$\mu_\gamma(t_\gamma^k(\hat{\pi}^i)) = \begin{cases} \{\hat{\pi}^i\}; \\ \{\hat{\pi}^i, \hat{\pi}^{i'}\}, \quad \hat{\pi}^{i'} \in \mathcal{K}_0^l; \\ \{\hat{\pi}^i, \hat{\pi}^{i'}\}, \quad \hat{\pi}^{i'} \in \mathcal{K}_r^{l'}, \quad r \in \{0, \varepsilon_{l'}\}. \end{cases} \quad (5.25)$$

Это опять следует из свойств функций  $\tau_{\gamma l}^k$  из канонического представления: при  $r \rightarrow 0$  одинаковые предельные значения могут принять максимум две различные функции  $\tau_{\gamma l}^k$ . Третья строка в (5.25) отвечает случаю

$$t_\gamma^k(\hat{\pi}^i) = \tau_{\gamma l}^k(0) = \tau_{\gamma l'}^{k'}(r), \quad r \in \{0, \varepsilon_{l'}\}, \quad (5.26)$$

когда совпадают значения функций, относящихся к *разным* сегментам спектра  $\mathcal{S}_l$  и  $\mathcal{S}_{l'}$ .

Для множества  $\mathcal{K}_{\varepsilon_l}^l$  результаты вполне аналогичны. Отметим также, что все полученные результаты справедливы и для случая, когда  $\mathcal{K}_r^{l'}$  состоит из одной точки ( $m_r^{l'} = 1$ ) и не является кластером.

### 5.3 Функциональная модель алгебры эйконалов

Для каждого элемента алгебры  $a \in \mathfrak{E}_\Sigma^T$  и представителя точки спектра  $\pi \in \hat{\pi} \in \widehat{\mathfrak{E}}_\Sigma^T$  определим элемент алгебры  $\hat{a}(\pi) \in \mathbb{M}^{\varkappa(\hat{\pi})}$  равенством

$$\hat{a}(\pi) := \pi(a). \quad (5.27)$$

Подробно рассмотрим случаи, когда  $\hat{\pi}$  есть внутренняя точка спектра и когда  $\hat{\pi}$  лежит в кластере.

### 5.3.1 Значения $\hat{a}$ во внутренних точках

Для интервала спектра  $S_l$ , в каждом классе эквивалентности  $\hat{\pi}_l(r)$  выберем по представителю  $\pi_r$ ,  $r \in (0, \varepsilon_l)$ . Представление (5.13) с учетом равенств (5.16) принимает вид

$$\hat{E}_\gamma^T(\pi_r) = \sum_{k=1}^{n_{\gamma l}} \tau_{\gamma l}^k(r) \mathcal{R}_\gamma^k(\pi_r), \quad \gamma \in \Sigma. \quad (5.28)$$

Пусть  $r_0 \in (0, \varepsilon_l)$  фиксированно; определим проекторы  $\mathcal{R}_{\gamma l}^k$  равенствами

$$\mathcal{R}_{\gamma l}^k := \mathcal{R}_\gamma^k(\pi_{r_0}). \quad (5.29)$$

Выберем для каждого  $r \in (0, \varepsilon_l)$  по представителю  $\pi_r \in \hat{\pi}_l(r) \in S_l$  так, чтобы были выполнены равенства

$$\mathcal{R}_\gamma^k(\pi_r) = \mathcal{R}_{\gamma l}^k, \quad r \in (0, \varepsilon_l) \quad (5.30)$$

для всех возможных  $k$  и  $\gamma$ .

Для каждого  $a \in \mathfrak{E}_\Sigma^T$  определим на  $S_l$  функцию

$$\hat{a}(\hat{\pi}_l(r)) := \pi_r(a), \quad r \in (0, \varepsilon_l). \quad (5.31)$$

Повторяя процедуру для всех  $S_l$ , определим функцию  $\hat{a}(\cdot)$  во всех внутренних точках спектра.

### 5.3.2 Значения $\hat{a}$ в точках кластеров

Рассмотрим точки кластера  $\mathcal{K}_0^l = \{\hat{\pi}^1, \dots, \hat{\pi}^{m_0^l}\}$ . В каждой точке выберем по представителю  $\pi^i \in \hat{\pi}^i$ . Напомним, что проекторы  $\mathcal{R}_{\gamma l}^k$  определены в (5.29). При подходящем выборе оператора  $V$  в (5.21), этому представлению можно придать вид

$$V \left( \bigoplus \sum_{i=1}^{m_0^l} \hat{E}_\gamma^T(\pi^i) \right) V^{-1} = \sum_{k=1}^{n_{\gamma l}} \tau_{\gamma l}^k(0) \mathcal{R}_{\gamma l}^k, \quad \gamma \in \Sigma. \quad (5.32)$$

Наконец, для  $a \in \mathfrak{E}_\Sigma^T$  определим в точках кластера функцию

$$\hat{a}(\hat{\pi}^i) := V(O_1 \oplus \cdots \oplus \pi^i(a) \oplus \cdots \oplus O_{m_l^0})V^{-1} \in \mathbb{M}^{\mathcal{K}_l}, \quad (5.33)$$

где  $O_k$  – нулевые элементы в  $\mathbb{M}^{\mathcal{K}(\hat{\pi}^k)}$ .

Проведя аналогичные рассуждения для всех кластеров в спектре, доопределим на них функцию  $\hat{a}$ . Ее значения в точках множеств  $\mathcal{K}_r^l$ , не являющихся кластерами, определяются тоже по (5.33) при  $m_r^l = 1$ . В этом случае, значение  $\hat{a}$  в каждой такой точке совпадает с пределом по непрерывности при  $r \rightarrow 0$  или  $r \rightarrow \varepsilon_l$ .

Образованная алгебра матричнозначных функций, оснащенная операциями сложения, умножения на число и поточечного умножения элементов, есть *функциональная модель* алгебры эйконалов. Как легко видеть, она определена с точностью до унитарного преобразования на каждом сегменте спектра  $\mathcal{S}_l$ .

## 5.4 Координаты на спектре

Приведем известный факт [35]. Пусть  $\mathfrak{A}$  есть *коммутативная* банахова алгебра с конечным числом образующих  $E_1, \dots, E_n$ ,  $\widehat{\mathfrak{A}}$  – ее спектр, состоящий из гомоморфизмов (характеров)  $\pi : \mathfrak{A} \rightarrow \mathbb{C}$ . Тогда соответствие

$$\widehat{\mathfrak{A}} \ni \pi \mapsto \{\pi(E_1), \dots, \pi(E_n)\} \in \mathbb{C}^n \quad (5.34)$$

доставляет координатизацию спектра. Здесь мы приведем аналог таких координат на спектре алгебры эйконалов. Технически он более сложен, что вполне ожидаемо, поскольку  $\mathfrak{E}_\Sigma^T$  *некоммутативна*.

Напомним, что множества  $\sigma_\gamma$  определены в (5.9) и (5.11). В предлагаемой ниже координатизации  $\widehat{\mathfrak{E}_\Sigma^T}$  они используются в качестве аналогов компонент в правой части (5.34).

Как видно из (5.13), для каждой точки  $\hat{\pi} \in \widehat{\mathfrak{E}_\Sigma^T}$  справедливы равенства

$$\sigma_\gamma(\hat{\pi}) = \sigma^+(\hat{E}_\gamma^T(\pi)), \quad \pi \in \hat{\pi}, \gamma \in \Sigma, \quad (5.35)$$

где  $\sigma^+(\cdot)$  – множество положительных собственных значений матрицы. Соответствие

$$\widehat{\mathfrak{E}_\Sigma^T} \ni \hat{\pi} \mapsto \{\sigma_{\gamma_1}(\hat{\pi}), \dots, \sigma_{\gamma_{\#\Sigma}}(\hat{\pi})\} \quad (5.36)$$

предлагается в качестве обобщения (5.34) на случай *некоммутативной* алгебры эйконалов.

Следует оговорить, что наборы в правой части соответствия (5.36) не являются координатами в строгом смысле слова: они различают все *внутренние* точки, но могут не различать точки *кластеров*.

## 5.5 Восстановление канонического представления

Каноническое представление (5.1) было получено "перезаформатированием" параметрического представления (4.4). Покажем, как прийти к (5.1), отправляясь от любой изометрической копии алгебры эйконалов.

Напомним, что эйконалы  $E_\gamma^T$  суть операторы действующие в  $\mathcal{H} = L_2(\Omega)$ . Пусть  $\mathcal{H}$  – гильбертово пространство,  $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  – унитарный оператор,  $\mathcal{E}_\gamma^T := UE_\gamma^TU^{-1}$ ,  $\gamma \in \Sigma$ . Пусть также  $\mathfrak{E} := U\mathfrak{E}_\Sigma^TU^{-1}$  есть изометрическая копия алгебры эйконалов. Покажем, как привести ее к канонической форме.

**Шаг 1.** Найдем спектр  $\widehat{\mathfrak{E}}$ , оснастим топологией (Джекобсона) и выделим в нем сегменты и их компоненты согласно (5.5).

**Шаг 2.** Выбирая  $\pi \in \widehat{\pi}$ , найдем  $\pi(\mathcal{E}_\gamma^T)$  и определим  $\sigma_\gamma(\widehat{\pi}) = \sigma^+(\pi(\mathcal{E}_\gamma^T))$ . Варьируя точки  $\widehat{\pi}$  внутри интервалов  $S_l$  (максимальных открытых компонент спектра), определим клетки  $\psi_{\gamma l}^k$  из равенства (5.19). Для каждого  $S_l$  выберем произвольно по клетке  $\psi_{\gamma l}^k$  и параметризуем ее одним из двух возможных способов. После этого, воспользовавшись равенством (5.18), параметризуем каждый интервал  $S_l$ . Вместе с  $S_l$  автоматически параметризуются все оставшиеся клетки: см. (5.17). В результате, клетки  $\psi_{\gamma l}^k$  для всех  $\gamma, k, l$  оказываются параметризованными. По ним определяются все функции  $\tau_{\gamma l}^k$ .

**Шаг 3.** Для каждого  $l$  фиксируем  $r \in (0, \varepsilon_l)$  и представление  $\pi \in \widehat{\pi}_l(r) \in S_l$ . Определим собственные проекторы  $\mathcal{R}_{\gamma l}^k$ , отвечающие функциям  $\tau_{\gamma l}^k(r)$ , из представления

$$\pi(\mathcal{E}_\gamma^T) = \sum_{k=1}^{n_{\gamma l}} \tau_{\gamma l}^k(r) \mathcal{R}_{\gamma l}^k \quad (5.37)$$

(см. (5.13)).

**Шаг 4.** Доопределим значения функций  $\tau_{\gamma l}^k(r)$  в точках  $r = 0, \varepsilon_l$  по непрерывности. Зададим отображение

$$\mathbf{I} : \mathcal{E}_\gamma^T \mapsto \bigoplus \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{k=1}^{n_{\gamma l}} \tau_{\gamma l}^k(\cdot) \mathcal{R}_{\gamma l}^k \in \bigoplus_{l=1}^{\mathcal{L}} \dot{C}([0, \varepsilon_l]; \mathbb{M}^{z_{\varepsilon_l}}), \quad \gamma \in \Sigma \quad (5.38)$$

и продолжим его с образующих-эйконалов до изометрии алгебр

$$\mathbf{I} : \mathfrak{E} \rightarrow \bigoplus_{l=1}^{\mathcal{L}} \dot{C}([0, \varepsilon_l]; \mathbb{M}^{z_{\varepsilon_l}}). \quad (5.39)$$

Отображение  $\mathbf{I}$  приводит  $\mathfrak{E}$  к канонической форме (точнее, к одной из ее версий: см. замечание после Теоремы 3).

Отметим, что переход к каноническому представлению по процедуре 1. - 4. возможен в ситуации обратных задач. В них по данным (динамическим или спектральным) можно определить адекватное пространство  $\mathcal{H}$  и действующие в нем копии эйконалов  $\mathcal{E}_\gamma^T$  [5; 6]. Это дает надежду на полезность алгебры  $\mathfrak{E}_\Sigma^T$  для решения обратных задач на графах.

## 5.6 Факторизация спектра

### 5.6.1 Отношение эквивалентности

Здесь мы введем некоторое отношение эквивалентности для точек  $\widehat{\mathfrak{E}}_\Sigma^T$ . Далее выяснится, что факторизованный (склеенный) по этому отношению спектр тесно связан с геометрией графа.

Определим на  $\widehat{\mathfrak{E}}_\Sigma^T$  отношение  $\sim_0$  по следующему правилу:  $\hat{\pi} \sim_0 \hat{\pi}'$ , если существует вершина  $\gamma \in \Sigma$  такая, что  $\sigma_\gamma(\hat{\pi}) \cap \sigma_\gamma(\hat{\pi}') \neq \emptyset$ . Это же отношение можно задать по-другому:  $\hat{\pi} \sim_0 \hat{\pi}'$ , если существуют вершина  $\gamma \in \Sigma$  и точка  $t \in \sigma_{\text{ac}}(E_\gamma^T)$  такие, что  $\hat{\pi}, \hat{\pi}' \in \mu_\gamma(t)$ . Пусть  $\sim$  есть транзитивное замыкание  $\sim_0$ , а  $[\hat{\pi}]$  – класс эквивалентности точки спектра  $\hat{\pi}$ . Справедлива лемма:

**Лемма 5.6.1.** Пусть  $\hat{\pi} \in \widehat{\mathfrak{E}}_\Sigma^T$  есть точка спектра,  $[\hat{\pi}]$  – ее класс эквивалентности. Тогда

- если  $\hat{\pi} \in \text{int} \widehat{\mathfrak{E}}_\Sigma^T$  – внутренняя точка, то  $[\hat{\pi}] = \{\hat{\pi}\}$ , то ее класс эквивалентности исчерпывается самой точкой;
- если  $\hat{\pi} \in \mathcal{K}_r^l$  – точка граничного множества (возможно, кластера), то имеет место вложение  $\mathcal{K}_r^l \subset [\hat{\pi}]$ .

*Доказательство.* Первое утверждение непосредственно вытекает из равенства (5.18).

Второе, в случае, если  $\mathcal{K}_r^l$  состоит из одной точки, очевидно. Рассмотрим теперь случай, когда  $\mathcal{K}_r^l$  – кластер.

Напомним, что интервалу спектра  $S_l$  отвечает матричная алгебра  $\mathbb{M}^{n_l}$ , причем выполнено равенство  $\mathbb{M}^{n_l} = \vee \mathbb{P}$ , где  $\mathbb{P} = \{P_{\gamma l}^k \mid k = 1, \dots, n_{\gamma l}, \gamma \in \Sigma\}$  – набор одномерных проекторов (см. (5.1)). Алгебра  $\mathfrak{Q}_r^l = \vee \mathfrak{Q}_r^l \subset \mathbb{M}^{n_l}$ , где  $\mathfrak{Q}_r^l := \{Q_{\gamma l}^k \mid k = 1, \dots, n_{\gamma l}, \gamma \in \Sigma\}$ , в граничной алгебре (4.29), отвечающая кластеру  $\mathcal{K}_r^l$ , является алгеброй типа  $\mathfrak{Q}^{II}$  (см. Замечание 2). Ее образующие, в соответствии с Предложением 7 и равенством (3.71), могут быть одного из трех типов:

- $Q_{\gamma l}^k = P_{\gamma l}^k$ , если не существует такого набора  $(l', k', r')$ , что  $\tau_{\gamma l}^k(r) = \tau_{\gamma l'}^{k'}(r')$ ;
- $Q_{\gamma l}^k = P_{\gamma l}^k + P_{\gamma l'}^{k'}$ , если существует такой номер  $k'$ , что  $\tau_{\gamma l}^k(r) = \tau_{\gamma l'}^{k'}(r')$ ;
- $Q_{\gamma l}^k = P_{\gamma l}^k$ , если существует такой набор  $(l', k', r')$ ,  $l, \neq l'$ , что  $\tau_{\gamma l}^k(r) = \tau_{\gamma l'}^{k'}(r')$ .

Рассмотрим множества  $[\hat{\pi}] \cap \mathcal{K}_r^l$  для всех точек  $\hat{\pi}$ , входящих в кластер  $\mathcal{K}_r^l$ . Предположим, что кластер есть дизъюнктивное объединение по крайней мере двух таких множеств. Покажем, что это невозможно.

Каждому проектору  $Q_{\gamma l}^k$  отвечает значение  $\tau_{\gamma l}^k(r)$ . Из равенства (5.25) следует, что каждому  $Q_{\gamma l}^k$  отвечают одна или две точки кластера  $\mathcal{K}_r^l$ , причем, в случае двух различных точек  $\hat{\pi}$  и  $\hat{\pi}'$ , выполнено равенство  $[\hat{\pi}] = [\hat{\pi}']$ . Тем самым, каждому проектору  $Q_{\gamma l}^k$  сопоставляется ровно один класс  $[\hat{\pi}]$  и множество  $[\hat{\pi}] \cap \mathcal{K}_r^l$ . Из этого следует, что разбиению кластера на множества  $[\hat{\pi}] \cap \mathcal{K}_r^l$  отвечает разбиение набора проекторов  $\mathfrak{Q}_r^l$  на *непересекающиеся* поднаборы  $\mathfrak{Q}_{[\hat{\pi}]}$ , причем такие поднаборы оказываются взаимно ортогональными:  $QQ' = 0$  для любых  $Q \in \mathfrak{Q}_{[\hat{\pi}]}$ ,  $Q' \in \mathfrak{Q}_{[\hat{\pi}']}$ , если только  $[\hat{\pi}] \neq [\hat{\pi}']$ . Это означает, что исходный набор  $\mathbb{P}$  также разбивался на классы взаимно ортогональных проекторов. Но набор проекторов  $\mathbb{P}$  является классом эквивалентности по отношению  $\sim'$ , которое задается, как транзитивное замыкание отношения  $\sim_0$ :  $P \sim_0 P'$ , если  $PP' \neq 0$ .



Это так, поскольку алгебра  $\mathbb{M}^{\mathcal{A}} = \mathbb{V}\mathbb{P}$  неприводима. Полученное противоречие доказывает утверждение леммы. □

Пусть  $\mathfrak{S}_\Sigma^T := \widehat{\mathfrak{E}}_\Sigma^T / \sim$  есть фактор-пространство по отношению  $\sim$ . Спектр  $\widehat{\mathfrak{E}}_\Sigma^T$  оснащен топологией Джекобсона и, следовательно, на  $\mathfrak{S}_\Sigma^T$  имеется каноническая фактор-топология. Из Леммы 5.6.1 следует, что переход от спектра  $\widehat{\mathfrak{E}}_\Sigma^T$  к фактору  $\mathfrak{S}_\Sigma^T$  сводится к склейке граничных множеств и, возможно, отождествлению склеенных границ сегментов  $\mathcal{A}$ . В результате, пространство  $\mathfrak{S}_\Sigma^T$  оказывается хаусдорфовым, а каждая его компонента связности гомеоморфна некоторому графу.

### 5.6.2 Координаты на факторе

Определим аналоги отображений  $\mu_\gamma$  и множеств  $\sigma_\gamma$  для фактора  $\mathfrak{S}_\Sigma^T$ . Пусть  $\boldsymbol{\mu}_\gamma$  и  $\boldsymbol{\sigma}_\gamma$  заданы равенствами:

$$\boldsymbol{\mu}_\gamma : \sigma_{\text{ac}}(E_\gamma^T) \rightarrow \mathfrak{S}_\Sigma^T, \quad \boldsymbol{\mu}_\gamma(t) := [\hat{\pi}], \quad \hat{\pi} \in \mu_\gamma(t), \quad (5.40)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_\gamma([\hat{\pi}]) := \{t \in \sigma_{\text{ac}}(E_\gamma^T) \mid t \in \sigma_\gamma(\hat{\pi}'), \hat{\pi}' \in [\hat{\pi}]\}. \quad (5.41)$$

Из Леммы 5.6.1 следует, что данные определения являются корректными. Отображения  $\boldsymbol{\mu}_\gamma$  оказываются однозначными и непрерывными, а множества  $\boldsymbol{\sigma}_\gamma$  становятся полноценными координатами на факторе  $\mathfrak{S}_\Sigma^T$ , различающими точки:

$$\boldsymbol{\sigma}_\gamma([\hat{\pi}]) \cap \boldsymbol{\sigma}_\gamma([\hat{\pi}']) = \begin{cases} \emptyset, & [\hat{\pi}] \neq [\hat{\pi}'] \\ \boldsymbol{\sigma}_\gamma([\hat{\pi}]), & [\hat{\pi}] = [\hat{\pi}'] \end{cases}, \quad [\hat{\pi}], [\hat{\pi}'] \in \mathfrak{S}_\Sigma^T, \gamma \in \Sigma. \quad (5.42)$$

В связи с этим, в дальнейшем множества  $\boldsymbol{\sigma}_\gamma$  будут называться  $\gamma$ -координатами, а  $\boldsymbol{\mu}_\gamma$  – координатными отображениями. Связь структуры  $\mathfrak{S}_\Sigma^T$  с геометрией оригинального графа  $\Omega$  будет описана в следующей главе.

## Глава 6. Геометрическая интерпретация спектра

Ниже будет показано, что каноническому представлению (4.62), при выполнении определенных условий, отвечает некоторое разбиение графа, а факторизованный спектр  $\mathfrak{S}_\Sigma^T$  оказывается гомеоморфным некоторой факторизации графа.

### 6.1 Минимальные множества

Рассмотрим множества  $\Lambda_\Sigma[x]$ , определенные в разделе 1.8 для гидры  $H_\Sigma^T$ . На них заданы  $\beta$ -наборы векторов. Для каждого такого множества, непрерывной функции  $y$  на графе и вершины  $\gamma \in \Sigma$  справедливо представление

$$(E_\gamma^T y)|_{\Lambda_\Sigma[x]}(x_k) = \sum_{i=1}^{n_\gamma[x]} \tau_\gamma^i(x_k) \langle y|_{\Lambda_\Sigma[x]}, \beta_\gamma^i \rangle \beta_\gamma^i(x_k), \quad k = 1, \dots, m[x], \quad (6.1)$$

где  $m[x] = \#\Lambda_\Sigma[x]$ , а  $n_\gamma[x] = n_{\gamma'}[x]$  для любых  $\gamma, \gamma' \in \Sigma$ . Из него следует, что равенства  $y|_{\Lambda_\Sigma[x]} \equiv 0$  ведет к  $(E_\gamma^T y)|_{\Lambda_\Sigma[x]} \equiv 0$  для каждого  $\gamma \in \Sigma$ .

Определим множество  $\tilde{\Lambda}_\Sigma[x]$  условиями:

1. пусть  $y \in C(\Omega)$  и  $y|_{\tilde{\Lambda}_\Sigma[x]} \equiv 0$ , тогда  $(E_\gamma^T y)|_{\tilde{\Lambda}_\Sigma[x]} \equiv 0$  для каждого  $\gamma \in \Sigma$ ;
2.  $\tilde{\Lambda}_\Sigma[x]$  есть *минимальное* множество, содержащее  $x$  и обладающее свойством 1.

Очевидно, что каждое  $\Lambda_\Sigma[x]$  есть дизъюнктивное объединение таких множеств:

$$\Lambda_\Sigma[x] = \tilde{\Lambda}_\Sigma[x_1] \cup \dots \cup \tilde{\Lambda}_\Sigma[x_p], \quad x_i \in \Lambda_\Sigma[x], \quad (6.2)$$

$$\tilde{\Lambda}_\Sigma[x_i] \cap \tilde{\Lambda}_\Sigma[x_{i'}] = \emptyset, \quad i \neq i'. \quad (6.3)$$

### 6.2 Отношение на $\beta$ -наборе

Определим

$$\text{supp } \beta_\gamma^i := \{x' \in \Lambda_\Sigma[x] \mid \beta_\gamma^i(x') \neq 0\} \quad (6.4)$$

– носитель амплитудного вектора  $\beta_\gamma^i$  на множестве  $\Lambda_\Sigma[x]$ . На  $\beta$ –наборе, отвечающем множеству  $\Lambda_\Sigma[x]$ , введем отношение  $\sim_0$ :

$$\beta_\gamma^i \sim_0 \beta_{\gamma'}^{i'} \Leftrightarrow \text{supp } \beta_\gamma^i \cap \text{supp } \beta_{\gamma'}^{i'} \neq \emptyset, \quad \gamma, \gamma' \in \Sigma, \quad (6.5)$$

и рассмотрим  $\sim$  – его транзитивное замыкание. Пусть  $[\beta]$  есть класс эквивалентности вектора  $\beta$  по этому отношению.

Напомним, что множества  $\Lambda_\Sigma[x]$  определены для каждого  $x \in \overline{\Omega^T[\Sigma]}$ . Фиксируем  $x \in \Lambda_\Sigma[x]$ . Рассмотрим класс  $[\beta]$ , такой, что в нем лежит вектор  $\beta'$ , для которого выполнено  $x \in \text{supp } \beta'$ . Определим множество  $\dot{\Lambda}_\Sigma[x]$  равенством:

$$\dot{\Lambda}_\Sigma[x] := \bigcup_{\beta' \in [\beta]} \text{supp } \beta' \subset \Lambda_\Sigma[x]. \quad (6.6)$$

Несложно заметить, что для  $\dot{\Lambda}_\Sigma[x]$  справедливы представления, аналогичные (6.1):

$$(E_\gamma^T y) |_{\dot{\Lambda}_\Sigma[x]}(x_k) = \sum_{i=1}^{\dot{n}_\gamma[x]} \check{\tau}_\gamma^i(x_k) \langle y |_{\dot{\Lambda}_\Sigma[x]}, \check{\beta}_\gamma^i \rangle \check{\beta}_\gamma^i(x_k), \quad k = 1, \dots, \dot{m}[x], \quad (6.7)$$

где  $\dot{m}[x] = \#\dot{\Lambda}_\Sigma[x]$ , а равенства  $\dot{n}_\gamma[x] = \dot{n}_{\gamma'}[x]$  вообще говоря не выполняется. Векторы  $\check{\beta}_\gamma^i$  и функции  $\check{\tau}_\gamma^i$  являются сужениями векторов  $\beta_\gamma^i$  и функций  $\tau_\gamma^i$  на множество  $\dot{\Lambda}_\Sigma[x]$ . Отметим, что в представление (6.7) входят только те векторы  $\check{\beta}_\gamma^i$  и отвечающие им функции  $\check{\tau}_\gamma^i$ , которые содержатся в классе  $[\beta]$ .

Справедлива лемма:

**Лемма 6.2.1.** Пусть  $x \in \overline{\Omega^T[\Sigma]}$ . Тогда выполняется равенство

$$\tilde{\Lambda}_\Sigma[x] = \dot{\Lambda}_\Sigma[x]. \quad (6.8)$$

*Доказательство.* Предположим, что множество  $\dot{\Lambda}_\Sigma[x]$  не минимальное. Тогда существуют точки  $x_1, x_2 \in \dot{\Lambda}_\Sigma[x]$  такие, что  $\tilde{\Lambda}_\Sigma[x_1] \cap \tilde{\Lambda}_\Sigma[x_2] = \emptyset$ . Пусть для  $\dot{\Lambda}_\Sigma[x]$  справедливо представление

$$\dot{\Lambda}_\Sigma[x] = \tilde{\Lambda}_\Sigma[x_1] \cup \tilde{\Lambda}_\Sigma[x_2]. \quad (6.9)$$

В этом случае, из определения множества  $\dot{\Lambda}_\Sigma[x]$  следует, что найдутся вершина  $\gamma \in \Sigma$  и вектор  $\check{\beta}_\gamma^i$  такие, что

$$\text{supp } \check{\beta}_\gamma^i \cap \tilde{\Lambda}_\Sigma[x_1] \neq \emptyset, \quad \text{supp } \check{\beta}_\gamma^i \cap \tilde{\Lambda}_\Sigma[x_2] \neq \emptyset. \quad (6.10)$$

Но тогда из условия  $y|_{\tilde{\Lambda}_\Sigma[x_1]} \equiv 0$  не будет следовать  $(E_\gamma^T y)|_{\tilde{\Lambda}_\Sigma[x_0]} \equiv 0$  для этой вершины  $\gamma$ . В случае распада  $\dot{\Lambda}_\Sigma[x]$  на большее количество множеств  $\tilde{\Lambda}_\Sigma[x_i]$  рассуждения аналогичны. Полученное противоречие доказывает утверждение леммы.  $\square$

Тем самым, в дальнейшем мы будем рассматривать множества  $\dot{\Lambda}_\Sigma[x]$  в качестве минимальных множеств, позволяющих описывать действие одновременно всех эйконалов.

### 6.3 Оптимальное разбиение графа

Рассмотрим разбиение захваченной волнами части графа  $\overline{\Omega^T[\Sigma]}$ , определяемое минимальными множествами  $\dot{\Lambda}_\Sigma[x]$ . Фиксируем точку  $\dot{x} \in \overline{\Omega^T[\Sigma]}$ , не являющуюся вершиной, и рассмотрим ее открытую метрическую окрестность  $\omega$ , гомеоморфную интервалу. Параметризуем данную окрестность расстоянием от одного из ее концов:  $x = x(r) \in \omega$ ,  $r = \tau(x', x) \in (0, \varepsilon)$ ,  $x' \in \partial\omega$ . В случае, если для всех  $x(r)$  выполнено  $\dot{m}[x(r)] = \dot{m}[\dot{x}]$ , данная параметризация продолжается до параметризации точек  $x_k(r)$  окрестностей всех точек  $x_k \in \dot{\Lambda}_\Sigma[\dot{x}]$ .

Будем расширять окрестность, увеличивая  $\varepsilon$  до тех пор, пока выполняются равенства

$$\dot{\beta}_\gamma^i(x_k(r)) = \text{const}, \quad r \in (0, \varepsilon) \quad (6.11)$$

для всех возможных номеров  $i, k$  и вершин  $\gamma \in \Sigma$ . Пусть  $\varepsilon_{\max}$  – точная верхняя грань таких  $\varepsilon$ . Назовем *семейством*  $\dot{\Phi}$  множество

$$\dot{\Phi} := \bigcup_{r \in (0, \varepsilon_{\max})} \dot{\Lambda}_\Sigma[x(r)] = \bigcup_{k=1}^{\dot{m}[\dot{x}]} \omega_k, \quad (6.12)$$

где  $\omega_k$  – дизъюнкты максимальные компоненты  $\dot{\Phi}$ , гомеоморфные интервалам (клетки).

Повторяя данную процедуру, определим семейства  $\dot{\Phi}^j$ ,  $j = 1, \dots, J$ ,  $\dot{\Phi}^j \cap \dot{\Phi}^{j'} = \emptyset$  для  $j \neq j'$ , такие, что для множества

$$\dot{\Pi}_\Sigma := \bigcup_{j=1}^J \dot{\Phi}^j \quad (6.13)$$

выполнено равенство

$$\overline{\dot{\Pi}}_\Sigma = \overline{\Omega^T[\Sigma]}. \quad (6.14)$$

Точки  $\dot{\Theta}_\Sigma := \overline{\Omega^T[\Sigma]} \setminus \dot{\Pi}_\Sigma$  назовем критическими.

Объекты, относящиеся к семействам  $\dot{\Phi}$  будем обозначать следующим образом:  $\dot{m}_\Phi, \dot{n}_{\gamma\Phi}, \dot{\epsilon}_\Phi, \dot{\beta}_{\gamma\Phi}^i, \dot{\tau}_{\gamma\Phi}^i(r)$ .

## 6.4 Параметрическое представление

Все семейства  $\dot{\Phi}^j, j = 1, \dots, J$  параметризованны. Это позволяет перейти к параметрическому представлению алгебры эйконалов, вполне аналогичному (4.2):

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_\Sigma^T &\cong \dot{U} \mathfrak{E}_\Sigma^T \dot{U}^{-1} = \\ &= \vee \left\{ \bigoplus_{\dot{\Phi} \subset \dot{\Pi}_\Sigma} \sum_{i=1}^{\dot{n}_{\gamma\Phi}} \dot{\tau}_{\gamma\Phi}^i(\cdot) \dot{P}_{\gamma\Phi}^i \mid \gamma \in \Sigma \right\} \subset \bigoplus_{\dot{\Phi} \subset \dot{\Pi}_\Sigma} C([0, \dot{\epsilon}_\Phi], \mathbb{M}^{\dot{m}_\Phi}), \end{aligned} \quad (6.15)$$

где  $\dot{P}_{\gamma\Phi}^i := \langle \cdot, \dot{\beta}_{\gamma\Phi}^i \rangle \dot{\beta}_{\gamma\Phi}^i$  - одномерные проекторы на амплитудные векторы  $\dot{\beta}_{\gamma\Phi}^i$ . Представление (6.15) уточняется до вложения

$$\dot{U} \mathfrak{E}_\Sigma^T \dot{U}^{-1} \subset \bigoplus_{j=1}^J C([0, \dot{\epsilon}_j]; \mathfrak{P}_{\dot{\Phi}^j}), \quad (6.16)$$

где

$$\mathfrak{P}_{\dot{\Phi}^j} := \vee \dot{\mathfrak{P}}_{\dot{\Phi}^j} := \vee \{ \dot{P}_{\gamma\dot{\Phi}^j}^i \mid i = 1, \dots, \dot{n}_{\gamma\dot{\Phi}^j}; \gamma \in \Sigma \} \subseteq \mathbb{M}^{\dot{m}_{\dot{\Phi}^j}}. \quad (6.17)$$

Далее, для упрощения записи, будем опускать точки у векторов  $\dot{\beta}_{\gamma\dot{\Phi}^j}^i$  и писать  $\beta_{\gamma\dot{\Phi}^j}^i$ .

Итак, мы имеем три различных представления: новое представление (6.16), старое представление (4.2) и каноническое представление, определенное Теоремой 3. Они выделены следующими свойствами:

- Представление (4.2) – некоторое параметрическое представление, не являющееся оптимальным ни с геометрической (множества  $\Lambda_\Sigma[x]$  не минимальны), ни с алгебраической (алгебры  $\mathfrak{P}_{\dot{\Phi}^j}$ , введенные в (4.5), приводимы) точки зрения.

- Представление (6.16) – геометрически оптимальное параметрическое представление.
- Каноническое представление из Теоремы 3 – алгебраически оптимальное параметрическое представление.

В оставшейся части работы исследуется связь между ними.

## 6.5 Остов

Пусть  $\overline{\Omega^T[\Sigma]}$  – область, захваченная волнами, идущими от вершин  $\gamma \in \Sigma$ , к моменту времени  $T$ . Введем на ней отношение эквивалентности  $\sim$ , порождаемое множествами :  $x \sim x'$ , если  $\dot{\Lambda}_\Sigma[x] = \dot{\Lambda}_\Sigma[x']$ . Фактор-множество

$$\dot{\mathfrak{S}}_\Sigma^T := \overline{\Omega^T[\Sigma]} / \sim \quad (6.18)$$

назовем *остовом* области  $\overline{\Omega^T[\Sigma]}$ . Остов снабжен канонической фактор-топологией. Точки остова (классы эквивалентности  $\dot{\Lambda}_\Sigma[x]$ ) будем обозначать  $\lambda_x$ .

Каждому  $\lambda_x$  соответствует свой  $\beta$ -набор

$$B[\lambda_x] = \left\{ \beta_\gamma^1[\lambda_x], \dots, \beta_\gamma^{n_\gamma(\lambda_x)}[\lambda_x] \mid \gamma \in \Sigma \right\}. \quad (6.19)$$

Если  $x \in \dot{\Phi}^j$ , то выполнены равенства

$$B[\lambda_x] = B_{\dot{\Phi}^j}, \quad n_\gamma(\lambda_x) = n_{\gamma\dot{\Phi}^j}, \quad , \quad (6.20)$$

где

$$B_{\dot{\Phi}^j} := \left\{ \beta_{\gamma\dot{\Phi}^j}^1, \dots, \beta_{\gamma\dot{\Phi}^j}^{n_{\gamma\dot{\Phi}^j}} \mid \gamma \in \Sigma \right\}. \quad (6.21)$$

Каждому вектору  $\beta_\gamma^i[\lambda_x]$  однозначно соответствует число  $t_\gamma^i[\lambda_x] := \dot{\tau}_\gamma^i(x)$ .

## 6.6 Координаты на остове

Определим множества  $\dot{\mathfrak{O}}_\gamma$  и отображения  $\dot{\mu}_\gamma$  аналогичные координатам (5.41) и отображениям (5.40) на факторизованном спектре:

$$\dot{\mathfrak{O}}_\gamma(\lambda_x) := \{t_\gamma^1[\lambda_x], \dots, t_\gamma^{n_\gamma(\lambda_x)}[\lambda_x]\}, \quad (6.22)$$

$$\dot{\mu}_\gamma : \sigma_{\text{ac}}(E_\gamma^T) \rightarrow \dot{\mathfrak{S}}_\Sigma^T, \quad \dot{\mu}_\gamma(t) := \lambda_x, \quad t \in \dot{\mathfrak{O}}_\gamma(\lambda_x). \quad (6.23)$$

Опишем топологию остова и свойства  $\dot{\sigma}_\gamma$  и  $\dot{\mu}_\gamma$ . Можно показать, что при переходе к остову, клетки семейства  $\dot{\Phi}^j$  склеиваются и переходят в множество, гомеоморфное интервалу  $(0, \dot{\epsilon}_{\dot{\Phi}^j})$ . Классы эквивалентности критических точек  $x \in \dot{\Theta}_\Sigma$  переходят в точки, соединяющие эти множества. Таким образом, остов  $\dot{\mathfrak{S}}_\Sigma^T$  является хаусдорфовым топологическим пространством, каждая компонента связности которого гомеоморфна графу. При этом количество компонент связности  $\dot{\mathfrak{S}}_\Sigma^T$  совпадает с количеством компонент связности захваченной волнами области графа  $\overline{\Omega^T[\Sigma]}$ . Точки остова, имеющие окрестности, гомеоморфные открытым интервалам, мы будем называть внутренними. Множество таких точек обозначим через  $\text{int}\dot{\mathfrak{S}}_\Sigma^T$ . Отображения  $\dot{\mu}_\gamma$  корректно определены и непрерывны, а для множеств  $\dot{\sigma}_\gamma$  выполнено равенство, аналогичное (5.42)

$$\dot{\sigma}_\gamma(\lambda) \cap \dot{\sigma}_\gamma(\lambda') = \begin{cases} \emptyset, & \lambda \neq \lambda' \\ \dot{\sigma}_\gamma(\lambda), & \lambda = \lambda' \end{cases}, \quad \lambda_x, \lambda'_x \in \dot{\mathfrak{S}}_\Sigma^T, \gamma \in \Sigma. \quad (6.24)$$

В силу свойства (6.24),  $\dot{\sigma}_\gamma$  можно использовать в качестве  $\gamma$ -координат на остове, а  $\dot{\mu}_\gamma$  – как координатные отображения.

К настоящему моменту, факторизованный спектр  $\mathfrak{S}_\Sigma^T$  и остов  $\dot{\mathfrak{S}}_\Sigma^T$  оснащены координатами  $\sigma_\gamma$  и  $\dot{\sigma}_\gamma$  соответственно. Далее будет показано, что при некоторых условиях, адекватное соответствие между координатами определяет гомеоморфизм между  $\mathfrak{S}_\Sigma^T$  и  $\dot{\mathfrak{S}}_\Sigma^T$ .

## 6.7 Связь остова и спектра

На каждом наборе  $B[\lambda]$  рассмотрим два отношения эквивалентности:

1. Для  $\beta_\gamma^i, \beta_{\gamma'}^{i'} \in B[\lambda]$  положим  $\beta_\gamma^i \overset{\text{supp}}{\sim}_0 \beta_{\gamma'}^{i'}$ , если выполнено

$$\text{supp } \beta_\gamma^i \cap \text{supp } \beta_{\gamma'}^{i'} \neq \emptyset. \quad (6.25)$$

Пусть  $\overset{\text{supp}}{\sim}_0$  есть транзитивное замыкание  $\overset{\text{supp}}{\sim}_0$ .

2. Для  $\beta_\gamma^i, \beta_{\gamma'}^{i'} \in B[\lambda]$  положим  $\beta_\gamma^i \overset{\text{nort}}{\sim}_0 \beta_{\gamma'}^{i'}$  (not orthogonal), если выполнено

$$\langle \beta_\gamma^i, \beta_{\gamma'}^{i'} \rangle \neq 0. \quad (6.26)$$

Пусть  $\overset{\text{nort}}{\sim}_0$  есть транзитивное замыкание  $\overset{\text{nort}}{\sim}_0$ .

Из Леммы 6.2.1 следует, что набор  $B[\lambda_x]$  для любого  $x \in \overline{\Omega^T[\Sigma]}$  есть класс эквивалентности по отношению  $\overset{\text{supp}}{\sim}$ . При этом, для того, чтобы каждая алгебра  $\mathfrak{P}_{\dot{\Phi}^j}$  была неприводимой, для всех  $x \in \dot{\Phi}^j$  эти наборы должны быть классами эквивалентности по отношению  $\overset{\text{nort}}{\sim}$  (Предложение 6).

Отметим, что из  $\beta \overset{\text{nort}}{\sim}_0 \beta'$  следует, что  $\beta \overset{\text{supp}}{\sim}_0 \beta'$ . Обратное, вообще говоря, не верно. Как следствие, каждый класс по отношению  $\overset{\text{nort}}{\sim}$  содержится в соответствующем классе по  $\overset{\text{supp}}{\sim}$ .

Приведем итоговый результат, связывающий остов и фактор спектра:

**Теорема 4.** Пусть граф  $\Omega$ , финальный момент времени  $T$  и набор  $\Sigma$  таковы, что соотношение  $\overset{\text{supp}}{\sim} = \overset{\text{nort}}{\sim}$  выполнено на каждом  $B[\lambda]$  для  $\lambda \in \text{int}\dot{\mathfrak{S}}_\Sigma^T$ . Тогда отображение  $\mathfrak{f} : \mathfrak{S}_\Sigma^T \rightarrow \dot{\mathfrak{S}}_\Sigma^T$ , задаваемое одним из двух эквивалентных условий

$$\begin{aligned} - \mathfrak{f}([\hat{\pi}]) &= \lambda \iff \sigma_\gamma([\hat{\pi}]) = \dot{\sigma}_\gamma(\lambda) \\ - \dot{\mu}_\gamma(t) &= \mathfrak{f}(\mu_\gamma(t)), \quad t \in \sigma_{ac}(E_\gamma^T), \gamma \in \Sigma \end{aligned}$$

является гомеоморфизмом.

*Доказательство.* При выполнении равенства  $\overset{\text{supp}}{\sim} = \overset{\text{nort}}{\sim}$  на  $B[\lambda]$  для внутренних точек остова, определена биекция  $\lambda \leftrightarrow \hat{\pi}$ , задаваемая равенством координат  $\dot{\sigma}_\gamma(\lambda) = \sigma_\gamma(\hat{\pi})$ . При этом, точка  $\hat{\pi}$  находится во внутренней части спектра и, следовательно, биективно связана с точкой фактора  $[\hat{\pi}] \in \mathfrak{S}_\Sigma^T$ . Тем самым, устанавливается биекция между внутренними частями остова и факторизованного спектра, переводящая  $\sigma_\gamma([\hat{\pi}])$  в  $\dot{\sigma}_\gamma(\lambda)$ . Соответствие между точками  $\dot{\mathfrak{S}}_\Sigma^T \setminus \text{int}\dot{\mathfrak{S}}_\Sigma^T$  в остове и  $\mathfrak{S}_\Sigma^T \setminus \text{int}\mathfrak{S}_\Sigma^T$  в факторе устанавливается по непрерывности с помощью отображений  $\mu_\gamma$  и  $\dot{\mu}_\gamma$ .  $\square$

Опишем условия, при которых равенство  $\overset{\text{supp}}{\sim} = \overset{\text{nort}}{\sim}$  из Теоремы 4 выполняется. Напомним, что  $\overset{\text{supp}}{\sim}_0$  и  $\overset{\text{nort}}{\sim}_0$  суть отношения, порождающие  $\overset{\text{supp}}{\sim}$  и  $\overset{\text{nort}}{\sim}$ . Отметим, что для всех  $\lambda, \gamma$  и  $i \neq i'$  выполнено  $\langle \beta_\gamma^i, \beta_\gamma^{i'} \rangle = 0$  (то есть  $\beta_\gamma^i[\lambda] \overset{\text{nort}}{\not\sim}_0 \beta_\gamma^{i'}[\lambda]$ ), но при этом возможно соотношение  $\text{supp } \beta_\gamma^i \cap \text{supp } \beta_\gamma^{i'} \neq \emptyset$  (то есть  $\beta_\gamma^i[\lambda] \overset{\text{supp}}{\sim}_0 \beta_\gamma^{i'}[\lambda]$ ).

Скажем, что точка  $\lambda \in \dot{\mathfrak{S}}_\Sigma^T$  является *исключительной*, если найдутся такие  $\gamma \neq \gamma', i$  и  $i'$ , что  $\text{supp } \beta_\gamma^i \cap \text{supp } \beta_{\gamma'}^{i'} \neq \emptyset$  ( $\beta_\gamma^i[\lambda] \overset{\text{supp}}{\sim}_0 \beta_{\gamma'}^{i'}[\lambda]$ ), но при этом  $\langle \beta_\gamma^i, \beta_{\gamma'}^{i'} \rangle = 0$  ( $\beta_\gamma^i[\lambda] \overset{\text{nort}}{\not\sim}_0 \beta_{\gamma'}^{i'}[\lambda]$ ). Здесь отметим, что вопрос о существовании таких точек открыт, а во всех известных нам примерах их нет. Есть основания полагать, что их отсутствие – общий факт.



**Предложение 8.** Пусть множество граничных вершин  $\Sigma$  и время  $T$  таковы, что в множестве  $\text{int } \dot{\mathfrak{S}}_\Sigma^T$  нет исключительных точек, а для каждого  $x \in \overline{\Omega^T[\Sigma]}$  найдется не меньше двух вершин  $\gamma, \gamma' \in \Sigma$  таких, что  $x \in \overline{\Omega^T[\gamma]} \cap \overline{\Omega^T[\gamma']}$ . Тогда  $\overset{\text{supp}}{\sim} = \overset{\text{nort}}{\sim}$  на каждом  $B[\lambda]$  для  $\lambda \in \text{int } \dot{\mathfrak{S}}_\Sigma^T$  и, следовательно, условия Теоремы 4 выполнены.

*Доказательство.* Заметим, что из отсутствия исключительных точек следует, что единственное отличие отношений  $\overset{\text{supp}}{\sim}_0$  и  $\overset{\text{nort}}{\sim}_0$  может возникнуть при выполнении  $\text{supp } \beta_\gamma^i[\lambda] \cap \text{supp } \beta_{\gamma'}^{i'}[\lambda] \neq \emptyset$  для некоторых  $i, i'$  при фиксированной вершине  $\gamma \in \Sigma$ . В этом случае выполнено  $\beta_\gamma^i[\lambda] \overset{\text{supp}}{\sim}_0 \beta_{\gamma'}^{i'}[\lambda]$ , но при этом  $\beta_\gamma^i[\lambda] \not\overset{\text{nort}}{\sim}_0 \beta_{\gamma'}^{i'}[\lambda]$ .

Рассмотрим множество

$$X(\beta_\gamma^i[\lambda], \beta_{\gamma'}^{i'}[\lambda]) := \text{supp } \beta_\gamma^i[\lambda] \cap \text{supp } \beta_{\gamma'}^{i'}[\lambda] \neq \emptyset. \quad (6.27)$$

Тогда для точки  $\tilde{x} \in X(\beta_\gamma^i[\lambda], \beta_{\gamma'}^{i'}[\lambda])$  существует такая вершина  $\gamma' \in \Sigma$ ,  $\gamma \neq \gamma'$  и такой номер  $\tilde{i}$  что  $\tilde{x} \in \text{supp } \beta_{\gamma'}^{\tilde{i}}[\lambda]$ . Но тогда выполнено

$$\beta_{\gamma'}^{\tilde{i}}[\lambda] \overset{\text{nort}}{\sim}_0 \beta_\gamma^i[\lambda], \quad \beta_{\gamma'}^{\tilde{i}}[\lambda] \overset{\text{nort}}{\sim}_0 \beta_{\gamma'}^{i'}[\lambda], \quad (6.28)$$

а значит, после перехода к транзитивному замыканию,  $\beta_\gamma^i[\lambda] \overset{\text{nort}}{\sim} \beta_{\gamma'}^{i'}[\lambda]$ . Тем самым, несмотря на исходное различие отношений  $\overset{\text{supp}}{\sim}_0$  и  $\overset{\text{nort}}{\sim}_0$ , после транзитивного замыкания выполнено  $\overset{\text{supp}}{\sim} = \overset{\text{nort}}{\sim}$ .  $\square$

## Заключение

Основные результаты работы состоят в следующем.

1. Получено каноническое представление алгебры эйконалов, дающее эффективное описание ее спектра.
2. Построена функциональная модель алгебры эйконалов.
3. Исследована структура спектра и установлена ее связь с геометрией исходного графа.

Автор благодарен Белишеву М. И. за научное руководство и помощь в работе.

## Список литературы

1. *Белишев М. И.* Граничное управление и томография римановых многообразий (BC-метод) // *Усп. Мат. Наук.* — 2017. — Т. 72, № 4. — С. 3–66.
2. *Belishev M. I.* Geometrization of Rings as a Method for Solving Inverse Problems // *Sobolev Spaces in Mathematics III: Applications in Mathematical Physics.* — Springer-Verlag Inc., 2004. — Pp. 5–24.
3. *Belishev M. I., Demchenko M. N.* Elements of noncommutative geometry in inverse problems on manifolds // *Journal of Geometry and Physics.* — 2014. — Vol. 78. — Pp. 29–47.
4. *Гельфанд И. М., Райков Д. А., Шилов Г. Е.* Коммутативные нормированные кольца // *Усп. Мат. Наук.* — 1946. — Т. 1, № 2. — С. 48–146.
5. *Belishev M. I.* Boundary spectral inverse problem on a class of graphs (trees) by the BC-method // *Inverse Problems.* — 2004. — Vol. 20, no. 3. — Pp. 647–672.
6. *Belishev M. I., Vakulenko A. F.* Inverse problems on graphs: recovering the tree of strings by the BC-method // *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems.* — 2006. — Vol. 14, no. 1. — Pp. 29–46.
7. *Belishev M. I., Wada N.* On revealing graph cycles via boundary measurements // *Inverse Problems.* — 2009. — Vol. 25, no. 10. — Pp. 1–25.
8. *Belishev M. I., Wada N.* A  $C^*$ -algebra associated with dynamics on a graph of strings // *J. Math. Soc. Japan.* — 2015. — Vol. 67, no. 3. — Pp. 1239–1274.
9. *Belishev M. I., Kaplun A. V.* Eikonal algebra on a graph of simple structure // *Eurasian Journal of Mathematical and Computer Applications.* — 2018. — Vol. 6, no. 3. — Pp. 4–33.
10. *Каплун А. В.* Каноническое представление алгебры эйконалов трехлучевого графа // *Зап. научн. сем. ПОМИ.* — 2021. — Т. 506. — С. 57–78.
11. *Белишев М. И., Каплун А. В.* Каноническое представление  $C^*$ -алгебры эйконалов метрического графа // *Известия Российской академии наук. Серия математическая.* — 2022. — Т. 86, № 4. — С. 3–50.

12. *Avdonin S., Kurasov P.* Inverse problems for quantum trees // *Inverse Problems and Imaging*. — 2008. — Vol. 2, no. 1. — Pp. 1–21.
13. *Avdonin S., Kurasov P., Nowaczyk M.* Inverse problems for quantum trees II: recovering matching conditions for star graphs // *Inverse Problems and Imaging*. — 2010. — Vol. 4, no. 4. — Pp. 579–598.
14. *Avdonin S., Leugering G., Mikhaylov V.* On an inverse problem for tree-like networks of elastic strings // *ZAMM Z. Angew. Math. Mech.* — 2010. — Vol. 90, no. 2. — Pp. 136–150.
15. *Kurasov P., Nowaczyk M.* Inverse spectral problem for quantum graphs // *J. Phys. A*. — 2005. — Vol. 38, no. 22. — Pp. 4901–4915.
16. *Kurasov P., Nowaczyk M.* Geometric properties of quantum graphs and vertex scattering matrices // *Opuscula Math.* — 2010. — Vol. 30, no. 3. — Pp. 295–309.
17. *Yurko V. A.* On recovering Sturm-Liouville operators on graphs. // *Math Notes*. — 2006. — Vol. 79. — Pp. 572–582.
18. *Yurko V. A.* An inverse problem for higher order differential operators on star-type graphs // *Inverse problems*. — 2007. — Vol. 23, no. 3.
19. *Yurko V. A.* Inverse spectral problems for differential operators on arbitrary compact graphs // *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*. — 2010. — Vol. 18, no. 3.
20. *Berkolaiko G., Kuchment P.* Introduction to quantum graphs. — American Mathematical Soc., 2013.
21. *Fell J. M. G.* The structure of algebras of operator fields // *Acta Math.* — 1961. — Vol. 106. — Pp. 233–280.
22. *Tomiyama J., Takesaki M.* Applications of fibre bundles to the certain class of  $C^*$ -algebras // *Tohoku Mathematical Journal, Second Series*. — 1961. — Vol. 13, no. 3. — Pp. 498–522.
23. *Kaplansky I.* The structure of certain operator algebras // *Transactions of the American Mathematical Society*. — 1951. — Vol. 70, no. 2. — Pp. 219–255.

24. *Fell J. M. G.* The dual spaces of  $C^*$ -algebras // *Transactions of the American Mathematical Society*. — 1960. — Vol. 94, no. 3. — Pp. 365–403.
25. *Fell J. M. G.*  $C^*$ -algebras with smooth dual // *Illinois Journal of Mathematics*. — 1960. — Vol. 4, no. 2. — Pp. 221–230.
26. *Effros E. G.* A decomposition theory for representations of  $C^*$ -algebras // *Transactions of the American Mathematical Society*. — 1963. — Vol. 107, no. 1. — Pp. 83–106.
27. *Bunce J. W., Deddens J. A.*  $C^*$ -algebras with Hausdorff spectrum // *Transactions of the American Mathematical Society*. — 1975. — Vol. 212. — Pp. 199–217.
28. *Васильев Н. Б.*  $C^*$ -алгебры с конечномерными представлениями // *Усп. Мат. Наук.* — 1966. — Т. 21, № 1. — С. 135–154.
29. *Niemiec P.* Models for subhomogeneous  $C^*$ -algebras // *Colloquium Mathematicum*. — 2021. — Vol. 166. — Pp. 75–106.
30. *Бирман М. Ш., Соломяк М. З.* Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. — Санкт-Петербург, Москва, Краснодар: Лань, 2010. — 218 с.
31. *Диксмье Ж.*  $C^*$ -алгебры и их представления. — М.: Наука, 1974. — 400 с.
32. *Мерфи Дж.*  $C^*$ -алгебры и теория операторов. — М.: Факториал, 1997. — 336 с.
33. *Кориков Д. В.* Об унитарных инвариантах семейства одномерных подпространств // *ПРЕПРИНТ ПОМИ*. — 2022. — № 02.
34. *Arveson W.* An Invitation to  $C^*$ -Algebras. — New York, Berlin: Springer-Verlag Inc., 1976. — 106 pp.
35. *Наймарк М. А.* Нормированные кольца. — М.: Наука, 1968. — 664 с.