Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Санкт-Петербургский государственный университет»
(СПбГУ)

На правах рукописи

Дородный Марк Александрович

Усреднение нестационарных периодических уравнений

Специальность 01.01.03 —
«Математическая физика»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, доцент
Суслина Татьяна Александровна

Санкт-Петербург — 2021

Оглавление

Стр.

Стр.

Введение

Работа относится к теории усреднения (гомогенизации). Цель теории усреднения — описание макроскопических процессов в микроскопически неоднородных средах. Процессы в таких средах, как правило, описываются дифференциальными уравнениями с периодическими быстро осциллирующими коэффициентами. Аналитическое или численное решение таких задач затруднительно или вообще невозможно. Возникает вопрос о построении моделей для быстро осциллирующих сред, приводящих к более простым дифференциальным уравнениям, которые называются *усреднёнными*. Это означает, что неоднородная среда заменяется некоторой фиктивной “усреднённой” средой, глобальные характеристики которой являются хорошей аппроксимацией для изучаемой среды. Примерами микроскопически неоднородных сред являются композитные материалы, кристаллы и полимеры.

Задачи, которые сейчас относят к теории усреднения, изучались ещё классиками естествознания. Так, С. Д. Пуассон создал теорию намагниченности неоднородных сред, состоящих из сферических или эллипсоидных зёрен и материала, заполняющего пространство между зёрнами. Дж. К. Максвеллом была получена приближённая формула для эффективной проводимости тела с шаровыми включениями, оценка остатка дана Дж. У. Стреттом (лордом Рэлеем). Рэлей использовал эти результаты в знаменитых работах по рассеянию света в атмосфере.

Математическая теория усреднения начала формироваться в 60-х годах XX века, когда В. А. Марченко и Е. Я. Хруслов [1] рассмотрели модельную задачу с мелкозернистой границей, а С. Спаньоло и Э. де Джорджи [2; 3] ввели понятие G-сходимости. В дальнейшем данная тематика интенсивно развивалась; сейчас математической теории усреднения посвящена обширная литература, укажем, в частности, книги [4—9]. При рассмотрении математических моделей микронеоднородных сред их локальные характеристики зачастую описываются функциями вида $a(\varepsilon^{-1}\mathbf{x})$, где $\varepsilon > 0$ — малый параметр, который служит мерой неоднородности среды, a — периодическая функция. Требуется определить поведение при $\varepsilon \to 0$ решений таких дифференциальных уравнений и построить усреднённое уравнение.

Существуют различные методы доказательства сходимости решений к решению усреднённого уравнения: метод асимптотических разложений [4; 5], метод Л. Тартара осциллирующих пробных функций [10] (см. также [9, глава 8]), метод двухмасштабной сходимости, предложенный Г. Нгуетсенгом [11] и развитый в работах Г. Аллера [12] (см. также [6, глава 9], [9, глава 9]) и т. д.

Пример задачи усреднения: изучение поведения решения u_ε задачи Дирихле для эллиптического уравнения при $\varepsilon \to 0$:

$$\begin{cases} -\operatorname{div} g^\varepsilon(\mathbf{x})\nabla u_\varepsilon(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \mathcal{O}, \\ u_\varepsilon(\mathbf{x}) = 0, & \mathbf{x} \in \partial\mathcal{O}, \end{cases}$$

где $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченное открытое множество, $F \in H^{-1}(\mathcal{O})$, $g(\mathbf{x})$ — ограниченная и положительно определённая $(d \times d)$-матрица-функция, периодическая относительно некоторой решётки периодов Γ. Здесь и далее для Γ-периодических функций в $\mathbb{R}^d$ мы будем использовать обозначение $\varphi^\varepsilon(\mathbf{x}) := \varphi(\varepsilon^{-1}\mathbf{x})$, $\varepsilon > 0$. Классический результат в теории усреднения (см., например, [8, гл. I, §3, теорема 1]): $u_\varepsilon \rightharpoonup u_0$ слабо в $H^1_0(\mathcal{O})$, $g^\varepsilon \nabla u_\varepsilon \rightharpoonup g^0 \nabla u_0$ слабо в $L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^d)$. Функция u_0 является решением аналогичной задачи

$$\begin{cases} -\operatorname{div} g^0\nabla u_0(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \mathcal{O}, \\ u_0(\mathbf{x}) = 0, & \mathbf{x} \in \partial\mathcal{O}, \end{cases}$$

с постоянной *эффективной* матрицей g^0.

Помимо доказательства сходимости, интерес представляет следующий вопрос: *насколько хорошо решение предельной задачи приближает решение исходной*? Внимание к результатам подобного рода привлекла работа М. Ш. Бирмана и Т. А. Суслиной [13]. Остановимся на ней подробнее.

Пусть Γ — решётка в $\mathbb{R}^d$, Ω — элементарная ячейка решётки Γ. В $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ рассматриваются самосопряжённые эллиптические матричные дифференциальные операторы (ДО) второго порядка следующего вида

$$\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon = b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}). \tag{1}$$

Здесь $b(\mathbf{D})$ — однородный матричный ДО первого порядка, $g(\mathbf{x})$ — Γ-периодическая ограниченная и положительно определённая $(m \times m)$-матрица-функция. Изучается поведение при $\varepsilon \to 0$ решения $\mathbf{u}_\varepsilon$ уравнения

$$b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}) + \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d.$$

Здесь $\mathbf{F} \in L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. Пусть $\mathbf{u}_0$ — решение эффективной задачи

$$b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0(\mathbf{x}) + \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d.$$

В [13] была доказана оценка $\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}$, причём постоянная C не зависит ни от ε, ни от $\mathbf{F}$. В силу произвольности $\mathbf{F}$ данный результат можно переформулировать следующим образом: при $\varepsilon \to 0$ резольвента $(\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon + I)^{-1}$ сходится к резольвенте $(\widehat{\mathcal{A}}^0 + I)^{-1}$ по операторной L_2-норме, где $\widehat{\mathcal{A}}^0 = b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D})$ — эффективный оператор с постоянной эффективной матрицей g^0, и справедлива оценка

$$\|(\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon + I)^{-1} - (\widehat{\mathcal{A}}^0 + I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon. \tag{2}$$

Далее, в работах [14; 15] была найдена аппроксимация резольвенты оператора $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon$ по $(L_2 \to L_2)$-норме с погрешностью $O(\varepsilon^2)$, а в [16] найдена аппроксимация той же резольвенты по $(L_2 \to H^1)$-норме с погрешностью $O(\varepsilon)$. В этих аппроксимациях учитываются корректоры. В работах [13—16] был развит теоретико-операторный подход к эллиптическим задачам усреднения в $\mathbb{R}^d$ (вариант спектрального метода), основанный на масштабном преобразовании, теории Флоке–Блоха и аналитической теории возмущений. Отметим, что спектральный подход применялся к задачам усреднения и раньше: см., например, [5, глава 4], [8, глава 2], [17—20]. Однако важной особенностью работ М. Ш. Бирмана и Т. А. Суслиной является то, что авторы имеют дело с системой уравнений, поэтому теорию возмущений приходится строить по многомерному параметру.

Теоретико-операторный подход применялся к параболическим задачам в работах [21—26]. В [21; 22] получена следующая оценка

$$\|e^{-s\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon} - e^{-s\widehat{\mathcal{A}}^0}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon(s+\varepsilon^2)^{-1/2}, \quad s > 0. \tag{3}$$

Аппроксимация оператора $e^{-s\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon}$ по $(L_2 \to L_2)$-норме с погрешностью $O(\varepsilon^2)$ получена в [23], а аппроксимация экспоненты по $(L_2 \to H^1)$-норме с погрешностью $O(\varepsilon)$ найдена в [24]. Ещё более точные аппроксимации экспоненты и резольвенты при учёте первого и второго корректоров найдены в работах [25; 26]. Оценки погрешности типа (2), (3) называют *операторными оценками погрешности* в теории усреднения.

Другой подход (так называемый “модифицированный метод первого приближения” или “метод сдвига”) к получению операторных оценок погрешности был предложен В. В. Жиковым и развит им совместно с С. Е. Пастуховой. В работах [27; 28] были получены аппроксимации резольвенты по норме в L_2 с погрешностью $O(\varepsilon)$ и по норме операторов, действующих из L_2 в H^1, с погрешностью $O(\varepsilon)$ для операторов акустики и теории упругости (которые относятся к классу операторов вида (1)). В [29] была получена оценка вида (3) для оператора $-\operatorname{div} g^\varepsilon(\mathbf{x})\nabla$.

Аналогичные результаты были установлены и для более общего класса операторов, включающих младшие члены:

$$\widehat{\mathcal{B}}_\varepsilon = \widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon + \sum_{j=1}^{d} \left(a_j^\varepsilon(\mathbf{x}) D_j + D_j a_j^\varepsilon(\mathbf{x})^* \right) + \mathcal{Q}^\varepsilon(\mathbf{x}) + \lambda \mathcal{Q}_0^\varepsilon(\mathbf{x}), \tag{4}$$

где $a_j(\mathbf{x})$, $j = 1, \ldots, d$, — Γ-периодические $(n \times n)$-матрицы-функции, вообще говоря, неограниченные; потенциал $\mathcal{Q}(\mathbf{x})$ — обобщённая матрица-функция, порождённая некоторой матричнозначной мерой и, наконец, $\mathcal{Q}_0(\mathbf{x})$ — Γ-периодическая положительно определённая и ограниченная $(n \times n)$-матрица-функция. Делаются предположения, гарантирующие сильную эллиптичность оператора. На параметр λ накладывается ограничение, обеспечивающее положительную определённость оператора (4). Эллиптическая задача усреднения для оператора (4) изучалась в работах Д. И. Борисова [30] и Т. А. Суслиной [31]. Там была установлена оценка

$$\|(\widehat{\mathcal{B}}_\varepsilon)^{-1} - (\widehat{\mathcal{B}}^0)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon,$$

а также найдена аппроксимация оператора $(\widehat{\mathcal{B}}_\varepsilon)^{-1}$ по $(L_2 \to H^1)$-норме с погрешностью $O(\varepsilon)$. Здесь $\widehat{\mathcal{B}}^0$ — соответствующий *эффективный оператор* с постоянными коэффициентами. В [30] предполагалось, что коэффициенты оператора зависят не только от быстрой, но и от медленной переменной, но коэффициенты оператора считались достаточно гладкими. В [31] эти оценки доказаны при широких предположениях. В работе [32] была найдена более точная аппроксимация оператора $(\widehat{\mathcal{B}}_\varepsilon)^{-1}$ по $(L_2 \to L_2)$-норме с погрешностью $O(\varepsilon^2)$. Параболические задачи с оператором $\widehat{\mathcal{B}}_\varepsilon$ изучались в работе [33].

Отметим, что в работах [13—16; 23; 24; 33] аналоги указанных выше результатов были получены для "окаймлённых" операторов

$$\mathcal{A}_\varepsilon = (f^\varepsilon)^* \widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon f^\varepsilon, \qquad \mathcal{B}_\varepsilon = (f^\varepsilon)^* \widehat{\mathcal{B}}_\varepsilon f^\varepsilon, \tag{5}$$

где $f(\mathbf{x})$ — Γ-периодическая $(n \times n)$-матрица-функция, $f, f^{-1} \in L_\infty$.

В настоящий момент операторные оценки погрешности (и близкие результаты) — активно развивающаяся область теории усреднения (см., например, обзор [34]), причём не только для операторов с периодическими коэффициентами. Продвижения для высококонтрастных сред получены К. Д. Чередниченко и Ш. Купером [35], К. Д. Чередниченко, Ю. Ю. Ершовой, А. В. Киселёвым и С. Н. Набоко [36; 37], для локально-периодических операторов — С. Е. Пастуховой и Р. Н. Тихомировым [38; 39], Н. Н. Сеником [40—42]. Операторные оценки погрешности для эллиптических и параболических задач усреднения в ограниченной области изучались многими авторами. Упомянем работы Г. Гризо [43; 44], В. В. Жикова и С. Е. Пастуховой [27; 28], К. Кенига, Ф. Лина и Ж. Шена [45], М. А. Пахнина и Т. А. Суслиной [46], Т. А. Суслиной [47; 48], К. Ху [49; 50], Ю. М. Мешковой и Т. А. Суслиной [51; 52], Ж. Генга и Ж. Шена [53].

Опишем теперь известные результаты об усреднении нестационарных уравнений типа Шрёдингера и гиперболического типа. Следующее утверждение является классическим (см. [7, глава 5], [9, глава 12]). Пусть $u_\varepsilon(\mathbf{x}, s)$ — решение волнового уравнения с граничными условиями Дирихле:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_\varepsilon(\mathbf{x}, s)}{\partial s^2} - \operatorname{div} g^\varepsilon(\mathbf{x})\nabla u_\varepsilon(\mathbf{x}, s) = F(\mathbf{x}, s), & (\mathbf{x},s) \in \mathcal{O} \times (0,T), \\ u_\varepsilon(\mathbf{x}, s) = 0, & (\mathbf{x},s) \in \partial\mathcal{O} \times (0,T), \\ u_\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = \varphi(\mathbf{x}), \ \dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial s}(\mathbf{x}, 0) = \psi(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \mathcal{O}, \end{cases}$$

где $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область, $F \in L_2(\mathcal{O} \times (0,T))$, $\varphi \in H^1_0(\mathcal{O})$, $\psi \in L_2(\mathcal{O})$; а $u_0(\mathbf{x}, s)$ — решение усреднённой задачи:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_0(\mathbf{x}, s)}{\partial s^2} - \operatorname{div} g^0\nabla u_0(\mathbf{x}, s) = F(\mathbf{x}, s), & (\mathbf{x},s) \in \mathcal{O} \times (0,T), \\ u_0(\mathbf{x}, s) = 0, & (\mathbf{x},s) \in \partial\mathcal{O} \times (0,T), \\ u_0(\mathbf{x}, 0) = \varphi(\mathbf{x}), \ \dfrac{\partial u_0}{\partial s}(\mathbf{x}, 0) = \psi(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \mathcal{O}. \end{cases}$$

Тогда $u_\varepsilon \rightharpoonup u_0$ $*$-слабо в $L_\infty((0,T); H^1_0(\mathcal{O}))$, $\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial s} \rightharpoonup \frac{\partial u_0}{\partial s}$ $*$-слабо в $L_\infty((0,T); L_2(\mathcal{O}))$.

Операторные оценки погрешности при усреднении нестационарных уравнений типа Шрёдингера и гиперболического типа были исследованы в меньшей степени. Им была посвящена статья М. Ш. Бирмана и Т. А. Суслиной [54]. В операторных терминах речь идёт о поведении при малом ε оператор-функций $e^{-is\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon}$ и $\cos(s\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2})$, $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{-1/2}\sin(s\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2})$, где $s \in \mathbb{R}$. Для этих оператор-функций уже не удаётся получить аппроксимации по операторной норме в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, а приходится рассматривать норму операторов, действующих из пространства Соболева $H^q(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ (с подходящим q) в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. В [54] были получены оценки

$$\|e^{-is\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon} - e^{-is\widehat{\mathcal{A}}^0}\|_{H^3(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1+|s|)\varepsilon, \tag{6}$$

$$\|\cos(s\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2}) - \cos(s(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2})\|_{H^2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1+|s|)\varepsilon. \tag{7}$$

Поясним метод на примере вывода оценки (7). Обозначим $\mathcal{H}_0 := -\Delta$. Ясно, что оценка (7) эквивалентна неравенству

$$\big\|\big(\cos(s\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2}) - \cos(s(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2})\big)(\mathcal{H}_0+I)^{-1}\big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1+|s|)\varepsilon. \tag{8}$$

За счёт масштабного преобразования (8) эквивалентно оценке

$$\begin{aligned}\big\|\big(\cos(\varepsilon^{-1}s\widehat{\mathcal{A}}^{1/2}) - \cos(\varepsilon^{-1}s(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2})\big)\varepsilon^2(\mathcal{H}_0+\varepsilon^2 I)^{-1}\big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}&\\ \leqslant C(1+|s|)\varepsilon.&\end{aligned} \tag{9}$$

Далее, в силу теории Флоке–Блоха оператор $\widehat{\mathcal{A}}$ раскладывается в прямой интеграл по операторам $\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$, действующим в $L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)$ (где Ω — ячейка решётки Γ) и задаваемым выражением $b(\mathbf{D}+\mathbf{k})^*g(\mathbf{x})b(\mathbf{D}+\mathbf{k})$ с периодическими граничными условиями. Операторы $\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$ имеют дискретный спектр. Семейство операторов $\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$ изучается методами аналитической теории возмущений (относительно одномерного параметра $t=|\mathbf{k}|$). Для операторов $\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$ удаётся получить аналог неравенства (9) с постоянной, не зависящей от $\mathbf{k}$. Это приводит к оценке (9).

Далее, в работе Ю. М. Мешковой [55] (см. также [56]) был получен результат для оператора $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{-1/2}\sin(s\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2})$:

$$\|\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{-1/2}\sin(s\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2}) - (\widehat{\mathcal{A}}^0)^{-1/2}\sin(s(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2})\|_{H^1(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1+|s|)\varepsilon. \tag{10}$$

С помощью интерполяции можно получить оценку разности экспонент из (6) по $(H^q\to L_2)$–норме с погрешностью $O(\varepsilon^{q/3})$ (при $0\leqslant q\leqslant 3$), оценку разности операторных косинусов из (7) по $(H^q\to L_2)$–норме с погрешностью $O(\varepsilon^{q/2})$ (при $0\leqslant q\leqslant 2$), а также оценку разности операторов из (10) по $(H^q\to L_2)$–норме с погрешностью $O(\varepsilon^{(q+1)/2})$ (при $-1\leqslant q\leqslant 1$). Кроме того, в [55; 56] получена аппроксимация оператора $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{-1/2}\sin(s\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2})$ при учёте корректора $K_\varepsilon(s)$ по $(H^2\to H^1)$-норме с погрешностью $O(\varepsilon)$ при фиксированном s:

$$\begin{aligned}\|\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{-1/2}\sin(s\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2}) - (\widehat{\mathcal{A}}^0)^{-1/2}\sin(s(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2}) - \varepsilon K_\varepsilon(s)\|_{H^2(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)}&\\ \leqslant C(1+|s|)\varepsilon.&\end{aligned} \tag{11}$$

Наконец, в работе Т. А. Суслиной [57] (см. также [58]) была подтверждена точность оценки (6) относительно типа операторной нормы. С другой стороны, были найдены достаточные условия на оператор, позволяющие усилить результат и получить оценку

$$\|e^{-is\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon} - e^{-is\widehat{\mathcal{A}}^0}\|_{H^2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1+|s|)\varepsilon. \tag{12}$$

В работах [54—58] также были получены результаты для операторов $\mathcal{A}_\varepsilon$ вида (5).

Целью диссертации является исследование усреднения уравнений гиперболического типа и нестационарных уравнений типа Шрёдингера.

В соответствии с общей целью были поставлены следующие **задачи**:

1. Исследовать поведение операторов $\cos(s\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})$, $\mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2}\sin(s\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})$ при малом ε: изучить вопрос о точности оценок (7), (10) относительно типа нормы и зависимости от s.
2. Исследовать поведение оператора $e^{-is\mathcal{A}_\varepsilon}$ при малом ε: изучить вопрос о точности результатов (6), (12) относительно зависимости от s и точности оценки (12) относительно типа нормы.
3. Исследовать поведение оператора $e^{-is\mathcal{B}_\varepsilon}$ при малом ε.

Формулировка основных результатов. Основные результаты работы приведены в **третьей** главе. Опишем их.

Мы показываем, что оценки (7), (10) точны относительно типа операторной нормы: указано условие на оператор, при котором оценки

$$\|\cos(s\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2}) - \cos(s(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2})\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(s)\varepsilon,$$
$$\|\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{-1/2}\sin(s\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2}) - (\widehat{\mathcal{A}}^0)^{-1/2}\sin(s(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2})\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(s)\varepsilon$$

заведомо неверны, если $q_1 < 2$ и $q_2 < 1$, соответственно. Также мы подтверждаем точность оценок относительно зависимости от s (при большом s): множители $(1+|s|)$ в правых частях оценок (6), (7), (10) нельзя заменить на $(1+|s|)^\alpha$ с $\alpha < 1$. Упомянутое условие формулируется в спектральных терминах.

Рассмотрим операторное семейство $\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$ и положим $\mathbf{k} = t\boldsymbol{\theta}$, $t = |\mathbf{k}|$, $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$. Это семейство аналитично по параметру t. При $t = 0$ число $\lambda_0 = 0$ является n-кратным собственным значением “невозмущённого” оператора $\widehat{\mathcal{A}}(0)$. Тогда при малом t существуют вещественно аналитические ветви собственных значений $\lambda_l(t,\boldsymbol{\theta})$ ($l = 1,\dots,n$) оператора $\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$ (первые n собственных значений).

При малом t справедливы сходящиеся степенные разложения

$$\lambda_l(t,\theta) = \gamma_l(\theta)t^2 + \mu_l(\theta)t^3 + \nu_l(\theta)t^4 + \dots, \qquad l = 1,\dots,n,$$

где $\gamma_l(\theta) > 0$ и $\mu_l(\theta), \nu_l(\theta) \in \mathbb{R}$. Условие, при котором оценки (6), (7), (10) нельзя усилить, состоит в том, что $\mu_l(\theta_0) \neq 0$ при некоторых l и $\theta_0 \in \mathbb{S}^{d-1}$.

С другой стороны, при некоторых дополнительных предположениях мы усиливаем результаты и получаем оценки

$$\| \cos(s\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2}) - \cos(s(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2})\|_{H^{3/2}(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1+|s|)^{1/2}\varepsilon, \quad (13)$$

$$\|\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{-1/2}\sin(s\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2}) - (\widehat{\mathcal{A}}^0)^{-1/2}\sin(s(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2})\|_{H^{1/2}(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1+|s|)^{1/2}\varepsilon, \quad (14)$$

$$\|e^{-is\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon} - e^{-is\widehat{\mathcal{A}}^0}\|_{H^2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1+|s|)^{1/2}\varepsilon. \quad (15)$$

При $n = 1$ достаточное условие, которое гарантирует справедливость оценок (13)–(15), состоит в том, что $\mu(\theta) = \mu_1(\theta) = 0$ при всех $\theta \in \mathbb{S}^{d-1}$. В частности, это условие выполнено для оператора $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon = \mathbf{D}^* g^\varepsilon(\mathbf{x})\mathbf{D}$, если $g(\mathbf{x})$ — симметричная матрица с вещественными элементами. При $n \geqslant 2$ помимо условия равенства нулю всех коэффициентов $\mu_l(\theta)$ мы накладываем ещё одно условие в терминах коэффициентов $\gamma_l(\theta)$. Простейший вариант этого условия состоит в том, что различные ветви $\gamma_l(\theta)$ не пересекаются друг с другом.

Далее, мы показываем, что оценки (13)–(15) тоже точны: в случае, когда все коэффициенты $\mu_l(\theta)$ равны нулю, но $\nu_j(\theta_0) \neq 0$ (при некоторых j и θ_0), оценки (13)–(15) нельзя улучшить ни относительно типа нормы, ни относительно зависимости от s.

Получены также результаты для экспоненты от оператора (4), включающего младшие члены. Мы доказываем оценку

$$\|e^{-is\widehat{\mathcal{B}}_\varepsilon} - e^{-is\widehat{\mathcal{B}}^0}\|_{H^3(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1+|s|)\varepsilon \quad (16)$$

и подтверждаем её точность в следующем смысле: указываем условие на оператор, при котором оценка $\|e^{-is\widehat{\mathcal{B}}_\varepsilon} - e^{-is\widehat{\mathcal{B}}^0}\|_{H^q(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(s)\varepsilon$ заведомо неверна, если $q < 3$.

С другой стороны, при некоторых дополнительных предположениях (которые формулируются в терминах спектральных характеристик оператора на краю спектра) мы усиливаем результат и доказываем оценку

$$\|e^{-is\widehat{\mathcal{B}}_\varepsilon} - e^{-is\widehat{\mathcal{B}}^0}\|_{H^2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1+|s|)\varepsilon. \quad (17)$$

С помощью интерполяции мы выводим также оценки в $(H^q \to L_2)$-норме. Получаются квалифицированные оценки погрешности при малом ε и большом s: в общей ситуации можно рассматривать $s = O(\varepsilon^{-\alpha})$ при $0 < \alpha < 1$, а в случае усиления (относительно зависимости от s) можно рассматривать $s = O(\varepsilon^{-\alpha})$ при $0 < \alpha < 2$.

В случае более общих операторов (5) аналоги этих результатов получены для операторов $\cos(s\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})$, $\mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2}\sin(s\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})$, $e^{-is\mathcal{A}_\varepsilon}$ и $e^{-is\mathcal{B}_\varepsilon}$, окаймлённых подходящими множителями (например, для $f^\varepsilon \cos(s\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})(f^\varepsilon)^{-1}$). Результаты, сформулированные в операторных терминах, применяются к усреднению решений задач Коши для гиперболических уравнений и для нестационарных уравнений типа Шрёдингера. Полученные общие результаты применяются к конкретным уравнениям математической физики: уравнению акустики, системе теории упругости, нестационарному магнитному уравнению Шрёдингера и двумерному уравнению Паули с сингулярными быстро осциллирующими потенциалами.

Научная новизна: все выносимые на защиту результаты являются новыми.

Практическая значимость. Работа имеет теоретический характер. Результаты диссертации могут быть использованы при изучении математических моделей физических процессов в микронеоднородных средах.

Методология и методы исследования.

Результаты получены с помощью дальнейшего развития теоретико-операторного подхода. Мы действуем по плану, описанному выше при пояснении вывода оценки (7). Применяя масштабное преобразование и теорию Флоке–Блоха, мы сводим изучение оператор-функций от $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon$, $\widehat{\mathcal{B}}_\varepsilon$ к изучению оператор-функций от операторов, действующих в $L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)$ и заданных выражениями

$$\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k}) = b(\mathbf{D}+\mathbf{k})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}+\mathbf{k}),$$

$$\widehat{\mathcal{B}}(\mathbf{k},\varepsilon) = \widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k}) + \varepsilon \sum_{j=1}^{d} \big(a_j(\mathbf{x})(D_j+k_j) + (D_j+k_j)a_j(\mathbf{x})^*\big) + \varepsilon^2 \mathcal{Q}(\mathbf{x}) + \varepsilon^2 \lambda \mathcal{Q}_0(\mathbf{x})$$

с периодическими граничными условиями.

В основе рассмотрений лежит абстрактная теоретико-операторная схема, которой посвящена **первая глава**. Остановимся на ней подробнее. Изучаются операторные семейства $A(t)$ и $\mathfrak{B}(t,\varepsilon)$, действующие в некотором гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. (Эти семейства моделируют операторы $\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k}) = \widehat{\mathcal{A}}(t\boldsymbol{\theta})$ и $\widehat{\mathcal{B}}(\mathbf{k},\varepsilon) = \widehat{\mathcal{B}}(t\boldsymbol{\theta},\varepsilon)$, но параметр $\boldsymbol{\theta}$ в абстрактной схеме отсутствует.) Предполагается, что для оператора $A(0)$ точка $\lambda_0 = 0$ является собственным значением конечной кратности n. Тогда у возмущённого оператора $A(t)$ при $|t| \leqslant t^0$ на промежутке $[0,\delta_{\mathfrak{a}}]$ имеется ровно n собственных значений с учётом кратности (числа $\delta_{\mathfrak{a}}$ и t^0 контролируются явно). Эти собственные значения и отвечающие им собственные векторы аналитичны по t. Коэффициенты степенных разложений для них мы называем пороговыми характеристиками оператора на краю спектра. Выделяется оператор S конечного ранга (так называемый *спектральный росток* операторного семейства $A(t)$), действующий в пространстве $\mathfrak{N} = \operatorname{Ker} A(0)$. Спектральный росток несёт информацию о пороговых характеристиках старшего порядка. Пусть $F(t)$ — спектральный проектор оператора $A(t)$ для промежутка $[0,\delta_{\mathfrak{a}}]$. Мы опираемся на пороговые аппроксимации для проектора $F(t)$ и для оператора $A(t)F(t)$, полученные в работах [13, гл. 1] и [14]. Поясним, что в [54] использовались лишь пороговые аппроксимации старшего порядка из работы [13]. Проектор $F(t)$ приближался проектором P на подпространство $\mathfrak{N}$, а оператор $A(t)F(t)$ приближался оператором t^2SP. Но оказалось, что этого недостаточно для получения более тонких результатов, описанных выше. Для этой цели мы применяем более точные пороговые аппроксимации, найденные в [14]. Более того, нам понадобилось разбиение собственных значений оператора $A(t)$ на кластеры и более детальные пороговые аппроксимации, связанные с этим разбиением.

В случае семейства $\mathfrak{B}(t,\varepsilon)$ аналогичные построения проводятся при помощи аналитической теории возмущений по параметру $\tau = \sqrt{t^2+\varepsilon^2}$. Мы используем пороговые аппроксимации из [31] и [59].

В терминах спектральных ростков соответствующих семейств удаётся получить аппроксимации для операторов $\cos(\varepsilon^{-1}sA(t)^{1/2})$, $A(t)^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}sA(t)^{1/2})$, $e^{-i\varepsilon^{-2}sA(t)}$ и $e^{-i\varepsilon^{-2}s\mathfrak{B}(t,\varepsilon)}$, домноженных на подходящий “сглаживающий множитель”. Применение абстрактных результатов во **второй главе** приводит к искомым оценкам для дифференциальных операторов. Однако возникают дополнительные осложнения при доказательстве более сильных результатов для операторов $\cos(\varepsilon^{-1}sA(t)^{1/2})$, $A(t)^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}sA(t)^{1/2})$, $e^{-i\varepsilon^{-2}sA(t)}$ в случае, когда все коэффициенты $\mu_l(\boldsymbol{\theta})$ равны нулю. Эти осложнения связаны с тем, что в общем случае не всегда удаётся провести построения и оценки равномерно по параметру θ и приходится накладывать дополнительное условие изолированности ветвей $\gamma_l(\theta)$.

Отметим, что при доказательстве ряда результатов возникают различные технические трудности. Наиболее сложным и трудоёмким является доказательство точности оценки (16). Осложнения возникают из-за того, что операторное семейство $\mathfrak{B}(t,\varepsilon)$ зависит от двух параметров. Чтобы обойти эту трудность, мы рассматриваем операторный пучок $\mathfrak{B}(\varkappa) := \mathfrak{B}(t,\varepsilon)$ при $t = c\varkappa^2$, $\varepsilon = \varkappa^3$ и пользуемся методами аналитической теории возмущений сначала относительно одномерного параметра $\varkappa$, а потом относительно параметра $\upsilon = c^{-3}$.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Для операторов $\cos(s\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2})$, $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{-1/2}\sin(s\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2})$ показано, что в общем случае оценки (7), (10) являются точными как относительно типа нормы, так и относительно зависимости от времени. С другой стороны, выделены достаточные условия, при которых эти оценки допускают улучшение; подтверждена точность улучшенных оценок (13), (14) в обоих смыслах. Аналогичные результаты получены для окаймлённых операторов $\cos(s\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})$, $\mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2}\sin(s\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})$.
2. Для оператора $e^{-is\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon}$ доказана точность оценки (6) относительно зависимости от времени. Доказано, что выполненная при дополнительных условиях оценка (12) допускает улучшение по времени (при тех же условиях); подтверждена точность улучшенной оценки (15) в обоих смыслах. Аналогичные результаты получены для окаймлённого оператора $e^{-is\mathcal{A}_\varepsilon}$.
3. Для оператора $e^{-is\widehat{\mathcal{B}}_\varepsilon}$ получена аппроксимация (16), подтверждена точность полученной оценки относительно типа нормы. Доказано, что при дополнительном условии оценка допускает улучшение (17) по типу нормы. Аналогичные результаты получены для окаймлённого оператора $e^{-is\mathcal{B}_\varepsilon}$.

Достоверность полученных результатов обеспечивается строгими математическими доказательствами.

Апробация работы. Результаты по теме диссертации докладывались автором на семинаре кафедры Высшей математики и математической физики СПбГУ, на Петербургском семинаре по математической физике им. В. И. Смирнова, на EIMI Spectral Theory and Related Topics Seminar, а также на международных конференциях: Modern Methods, Problems and Applications of Operator

Theory and Harmonic Analysis (Ростов-на-Дону, Россия, 2016, 2018 и 2019 гг.), Days on Diffraction (Санкт-Петербург, Россия, 2016, 2018 и 2019 гг.), A trilateral German–Russian–Ukrainian summer school “Spectral Theory, Differential Equations and Probability” (Майнц, Германия, 2016 г.), International Conference on Mathematical Modeling in Physical Sciences (Москва, Россия, 2018 г.), St. Petersburg Conference in Spectral Theory (Санкт-Петербург, Россия, 2019 г.), Санкт-Петербургская зимняя молодёжная конференция по теории вероятностей и математической физике (Санкт-Петербург, Россия, 2019 г.), Conference on Spectral Theory and Mathematical Physics (Сочи, Россия, 2020 г.).

Личный вклад. Результаты диссертации, относящиеся к операторам $\cos(s\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})$, $\mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2}\sin(s\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})$, изложены в совместных с Т. А. Суслиной работах. Определяющий вклад в эти работы принадлежит диссертанту. Автором были получены пороговые аппроксимации для соответствующих оператор-функций и построены подтверждающие примеры. Результаты, касающиеся операторов $e^{-is\mathcal{A}_\varepsilon}$ и $e^{-is\mathcal{B}_\varepsilon}$, получены диссертантом лично.

Публикации. Результаты по теме диссертации изложены в шести статьях в рецензируемых научных журналах [60—65]. Все публикации входят в реферативные базы данных Web of Science и Scopus. Отметим, что в работах [64; 65] были получены также результаты о точности оценки (11) в общем случае и об усилении этой оценки при дополнительных предположениях. Эти результаты не были включены в диссертацию (по причине большого объёма). Ещё упомянем работы [66; 67], в которых полученные общие результаты применяются к усреднению нестационарной системы Максвелла. Материал этих работ тоже не вошёл в диссертацию.

Благодарности. Автор искренне благодарит своего научного руководителя Т. А. Суслину за руководство работой, полезные обсуждения и ценные советы.

Объём и структура работы. Диссертация состоит из введения, 3 глав и заключения. Полный объём диссертации составляет 166 страниц. Список литературы содержит 70 наименований.

Глава 1. Абстрактная теоретико-операторная схема

1.1 Квадратичные операторные семейства

Материал этого пункта заимствован из [13; 14; 25; 31; 57; 59].

1.1.1 Операторы $X(t)$ и $A(t)$

Пусть $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{H}_*$ — комплексные сепарабельные гильбертовы пространства. Предположим, что $X_0\colon \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}_*$ — плотно определённый и замкнутый оператор, а $X_1\colon \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}_*$ — ограниченный оператор. Введём замкнутый на $\operatorname{Dom} X_0$ оператор $X(t) = X_0 + tX_1$, $t \in \mathbb{R}$. Рассмотрим семейство самосопряжённых операторов $A(t) = X(t)^* X(t)$ в $\mathfrak{H}$. Оператор $A(t)$ порождается замкнутой квадратичной формой $\|X(t)u\|^2_{\mathfrak{H}_*}$, $u \in \operatorname{Dom} X_0$. Обозначим $A_0 := A(0)$; $\mathfrak{N} := \operatorname{Ker} A_0 = \operatorname{Ker} X_0$; $\mathfrak{N}_* := \operatorname{Ker} X_0^*$.

Предполагается, что точка $\lambda_0 = 0$ — *изолированная точка спектра оператора* A_0 *и* $0 < n := \dim \mathfrak{N} < \infty$, $n \leqslant n_* := \dim \mathfrak{N}_* \leqslant \infty$.

Пусть d^0 — расстояние от точки $\lambda_0 = 0$ до остального спектра оператора A_0. Через P и P_* обозначаются ортопроекторы пространства $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{N}$ и пространства $\mathfrak{H}_*$ на $\mathfrak{N}_*$, соответственно. Обозначим через $F(t;[a,b])$ спектральный проектор оператора $A(t)$ для промежутка $[a,b]$ и положим $\mathfrak{F}(t;[a,b]) := F(t;[a,b])\mathfrak{H}$. Фиксируем число $\delta_{\mathfrak{a}} > 0$ такое, что $8\delta_{\mathfrak{a}} < d^0$. Выберем число $t^0 > 0$ так, чтобы

$$t^0 \leqslant \delta_{\mathfrak{a}}^{1/2} \|X_1\|^{-1}. \tag{1.1}$$

Как показано в [13, гл. 1, (1.3)], $F(t;[0,\delta_{\mathfrak{a}}]) = F(t;[0,3\delta_{\mathfrak{a}}])$ и $\operatorname{rank} F(t;[0,\delta_{\mathfrak{a}}]) = n$ при $|t| \leqslant t^0$. Будем писать $F(t)$ вместо $F(t;[0,\delta_{\mathfrak{a}}])$.

1.1.2 Операторы $Y(t)$ и Y_2

Пусть $\widetilde{\mathfrak{H}}$ — ещё одно сепарабельное гильбертово пространство. Пусть $Y_0\colon \mathfrak{H} \to \widetilde{\mathfrak{H}}$ — плотно определённый оператор такой, что $\operatorname{Dom} X_0 \subset \operatorname{Dom} Y_0$. Пусть Y_1 — ограниченный оператор в $\mathfrak{H}$. Положим $Y(t) := Y_0 + tY_1$, $\operatorname{Dom} Y(t) = \operatorname{Dom} Y_0$. Мы накладываем следующее условие.

Условие 1.1.1. *Для некоторого* $c_1 > 0$ *выполнено*

$$\|Y(t)u\|_{\widetilde{\mathfrak{H}}} \leqslant c_1 \|X(t)u\|_{\mathfrak{H}_*}, \quad u \in \operatorname{Dom} X_0,\ t \in \mathbb{R}. \tag{1.2}$$

Из (1.2) при $t = 0$ следует, что $\mathfrak{N} \subset \operatorname{Ker} Y_0$.

Пусть $Y_2\colon \mathfrak{H} \to \widetilde{\mathfrak{H}}$ — плотно определённый линейный оператор такой, что $\operatorname{Dom} X_0 \subset \operatorname{Dom} Y_2$. Предполагается выполненным

Условие 1.1.2. *Для любого* $\nu_* > 0$ *существует такое число* $C(\nu_*) > 0$*, что*

$$\|Y_2 u\|^2_{\widetilde{\mathfrak{H}}} \leqslant \nu_* \|X(t)u\|^2_{\mathfrak{H}_*} + C(\nu_*)\|u\|^2_{\mathfrak{H}}, \quad u \in \operatorname{Dom} X_0,\ t \in \mathbb{R}. \tag{1.3}$$

1.1.3 Форма $\mathfrak{q}$

Пусть в пространстве $\mathfrak{H}$ задана плотно определённая эрмитова полуторалинейная форма $\mathfrak{q}[u,v]$, причём $\operatorname{Dom} X_0 \subset \operatorname{Dom} \mathfrak{q}$. На форму $\mathfrak{q}$ накладывается следующее условие.

Условие 1.1.3. *Найдутся постоянные* $0 < \kappa \leqslant 1$, $c_0 \in \mathbb{R}$, $c_2 \geqslant 0$, $c_3 \geqslant 0$, *такие, что*

$$\begin{gathered} |\mathfrak{q}[u,v]| \leqslant \left(c_2\|X(t)u\|^2_{\mathfrak{H}_*} + c_3\|u\|^2_{\mathfrak{H}}\right)^{1/2} \left(c_2\|X(t)v\|^2_{\mathfrak{H}_*} + c_3\|v\|^2_{\mathfrak{H}}\right)^{1/2}, \\ \mathfrak{q}[u,u] \geqslant -(1-\kappa)\|X(t)u\|^2_{\mathfrak{H}_*} - c_0\|u\|^2_{\mathfrak{H}}, \quad u,v \in \operatorname{Dom} X_0,\ t \in \mathbb{R}. \end{gathered} \tag{1.4}$$

1.1.4 Оператор $\mathfrak{B}(t,\varepsilon)$

В пространстве $\mathfrak{H}$ рассмотрим квадратичную форму

$$\begin{aligned}\mathfrak{b}(t,\varepsilon)[u,u] = \|X(t)u\|^2_{\mathfrak{H}_*} + 2\varepsilon\,\mathrm{Re}(Y(t)u, Y_2u)_{\widetilde{\mathfrak{H}}} \\ + \varepsilon^2\mathfrak{q}[u,u] + \lambda\varepsilon^2(Q_0u,u)_{\mathfrak{H}}, \quad u \in \mathrm{Dom}\,X_0.\end{aligned} \tag{1.5}$$

Здесь $Q_0\colon \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ — ограниченный положительно определённый оператор. *На параметр* $\lambda \in \mathbb{R}$ *накладывается ограничение*:

$$\begin{aligned}&\lambda > \|Q_0^{-1}\|(c_0 + c_4), \quad \text{если } \lambda \geqslant 0,\\ &\lambda > \|Q_0\|^{-1}(c_0 + c_4), \quad \text{если } \lambda < 0 \text{ и } c_0 + c_4 < 0,\end{aligned} \tag{1.6}$$

где c_0 — постоянная из условия 1.1.3, а $c_4 = 4\kappa^{-1}c_1^2C(\nu_*)$ при $\nu_* = \kappa^2(16c_1^2)^{-1}$.

Используя (1.2), (1.3), (1.4), можно проверить (см. [59, п. 1.4]) справедливость следующих оценок:

$$\begin{aligned}&\mathfrak{b}(t,\varepsilon)[u,u] \leqslant (2 + c_1^2 + c_2)\|X(t)u\|^2_{\mathfrak{H}_*} + (C(1) + c_3 + |\lambda|\|Q_0\|)\varepsilon^2\|u\|^2_{\mathfrak{H}},\\ &\mathfrak{b}(t,\varepsilon)[u,u] \geqslant \frac{\kappa}{2}\|X(t)u\|^2_{\mathfrak{H}_*} + \beta\varepsilon^2\|u\|^2_{\mathfrak{H}}, \quad u \in \mathrm{Dom}\,X_0,\end{aligned}$$

где $\beta > 0$ определено по числу λ следующим образом:

$$\begin{aligned}&\beta = \lambda\|Q_0^{-1}\|^{-1} - c_0 - c_4, \quad \text{если } \lambda \geqslant 0,\\ &\beta = \lambda\|Q_0\| - c_0 - c_4, \qquad \text{если } \lambda < 0 \text{ и } c_0 + c_4 < 0.\end{aligned} \tag{1.7}$$

Таким образом, форма $\mathfrak{b}(t,\varepsilon)[u,u]$ замкнута и положительно определена.

Самосопряжённый оператор в пространстве $\mathfrak{H}$, порождённый формой (1.5), обозначим через $\mathfrak{B}(t,\varepsilon)$. Формально можно записать

$$\mathfrak{B}(t,\varepsilon) = A(t) + \varepsilon(Y_2^*Y(t) + Y(t)^*Y_2) + \varepsilon^2Q + \lambda\varepsilon^2Q_0. \tag{1.8}$$

Здесь Q — формальный объект, который мы сопоставляем форме $\mathfrak{q}$.

1.1.5 Введение параметра τ

Семейство $\mathfrak{B}(t,\varepsilon)$ аналитически зависит от параметров t и ε. Если $t = 0$ и $\varepsilon = 0$, то $\mathfrak{B}(0,0) = A_0$ имеет изолированное собственное значение $\lambda_0 = 0$ кратности n. Мы хотим использовать аппарат аналитической теории возмущений.

Однако, если $n > 1$, то аналитическая теория возмущений не работает, поскольку мы имеем дело с многомерным параметром и кратным собственным значением. Чтобы преодолеть эту трудность, мы, следуя [31], вводим *одномерный параметр*

$$\tau = \sqrt{t^2 + \varepsilon^2}$$

и дополнительные параметры $\vartheta_1 = t\tau^{-1}$, $\vartheta_2 = \varepsilon\tau^{-1}, \vartheta = (\vartheta_1, \vartheta_2)$. Оператор $\mathfrak{B}(t, \varepsilon)$ будем обозначать через $\mathfrak{B}(\tau; \vartheta)$. Соответствующая квадратичная форма запишется в виде

$$\begin{aligned}\mathfrak{b}(\tau;\vartheta)[u,u] &= \|(X_0 + \tau\vartheta_1 X_1)u\|^2_{\mathfrak{H}_*} + 2\tau\vartheta_2 \operatorname{Re}(Y_0 u, Y_2 u)_{\widetilde{\mathfrak{H}}} \\ &+2\tau^2\vartheta_1\vartheta_2 \operatorname{Re}(Y_1 u, Y_2 u)_{\widetilde{\mathfrak{H}}} + \tau^2\vartheta_2^2 \left(\mathfrak{q}[u,u] + \lambda(Q_0 u, u)_{\mathfrak{H}}\right), \quad u \in \operatorname{Dom} X_0.\end{aligned}$$

Отвечающий ей оператор формально можно записать в виде

$$\begin{aligned}\mathfrak{B}(\tau;\vartheta) = (X_0^* + \tau\vartheta_1 X_1^*)(X_0 + \tau\vartheta_1 X_1) + \tau\vartheta_2(Y_2^* Y_0 + Y_0^* Y_2) \\ +\tau^2\vartheta_1\vartheta_2(Y_2^* Y_1 + Y_1^* Y_2) + \tau^2\vartheta_2^2(Q + \lambda Q_0).\end{aligned} \tag{1.9}$$

Мы изучаем оператор $\mathfrak{B}(\tau; \vartheta)$, как квадратичный пучок по одномерному параметру τ, средствами аналитической теории возмущений. В то же время мы должны следить за равномерностью оценок по параметру ϑ, принимая во внимание, что $\vartheta_1^2 + \vartheta_2^2 = 1$. В записи (1.9) можно считать, что $\tau \in \mathbb{R}$.

Обозначим через $F(\tau; \vartheta; \sigma)$ спектральный проектор оператора $\mathfrak{B}(\tau; \vartheta)$ для интервала $[0, \sigma]$ и положим $\mathfrak{F}(\tau; \vartheta; \sigma) := F(\tau; \vartheta; \sigma)\mathfrak{H}$. Фиксируем число $\delta_{\mathfrak{b}} \in (0, \kappa d^0/13)$ и выберем число $\tau^0 > 0$ так, чтобы

$$\tau^0 \leqslant \delta_{\mathfrak{b}}^{1/2} \left((2 + c_1^2 + c_2)\|X_1\|^2 + C(1) + c_3 + |\lambda|\|Q_0\|\right)^{-1/2}. \tag{1.10}$$

Как установлено в [31, предложение 1.5] $F(\tau; \vartheta; \delta_{\mathfrak{b}}) = F(\tau; \vartheta; 3\delta_{\mathfrak{b}})$, $\operatorname{rank} F(\tau; \vartheta; \delta_{\mathfrak{b}}) = n$ при $|\tau| \leqslant \tau^0$. Мы часто будем писать $F(\tau; \vartheta)$ вместо $F(\tau; \vartheta; \delta_{\mathfrak{b}})$ и $\mathfrak{F}(\tau; \vartheta)$ вместо $\mathfrak{F}(\tau; \vartheta; \delta_{\mathfrak{b}})$.

1.1.6 Операторы Z, $\widetilde{Z}$, R, S, Z_2 и R_2

Следуя [13, гл. 1, §1], [14, §1] и [59, §1], введём операторы, которые возникают при рассмотрениях в духе теории возмущений.

Пусть $\omega \in \mathfrak{N}$ и пусть $\varphi = \varphi(\omega) \in \operatorname{Dom} X_0 \cap \mathfrak{N}^\perp$ — (слабое) решение уравнения $X_0^*(X_0\varphi + X_1\omega) = 0$. Определим оператор $Z\colon \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ соотношением $Zu = \varphi(Pu)$, $u \in \mathfrak{H}$. Затем определим оператор $R\colon \mathfrak{N} \to \mathfrak{N}_*$ формулой

$$R \coloneqq X_0 Z + X_1. \tag{1.11}$$

Тогда $R = P_* X_1|_{\mathfrak{N}}$.

Аналогично, рассмотрим уравнение на $\widetilde{\varphi} \in \operatorname{Dom} X_0 \cap \mathfrak{N}^\perp$ для заданного $\omega \in \mathfrak{N}$: $X_0^* X_0 \widetilde{\varphi} + Y_0^* Y_2 \omega = 0$. Введём оператор $\widetilde{Z}\colon \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ формулой $\widetilde{Z}u = \widetilde{\varphi}(Pu)$, $u \in \mathfrak{H}$.

Справедливы оценки

$$\|X_0 Z\| \leqslant \|X_1\|, \tag{1.12}$$
$$\|Z\| \leqslant (8\delta_{\mathfrak{a}})^{-1/2}\|X_1\|, \tag{1.13}$$
$$\|Z\| \leqslant \kappa^{1/2}(13\delta_{\mathfrak{b}})^{-1/2}\|X_1\|, \tag{1.14}$$
$$\|X_0\widetilde{Z}\| \leqslant c_1 C(1)^{1/2}, \tag{1.15}$$
$$\|\widetilde{Z}\| \leqslant c_1(\kappa C(1))^{1/2}(13\delta)^{-1/2}. \tag{1.16}$$

Оператор $S \coloneqq R^*R\colon \mathfrak{N} \to \mathfrak{N}$ назовём *спектральным ростком* семейства $A(t)$ при $t = 0$. Справедливо равенство

$$S = P X_1^* P_* X_1|_{\mathfrak{N}}. \tag{1.17}$$

Спектральный росток называется *невырожденным*, если $\operatorname{Ker} S = \{0\}$. Отметим оценку

$$\|S\| \leqslant \|X_1\|^2. \tag{1.18}$$

Нам также потребуется ввести операторы Z_2 и R_2, определённые в [25, §1]. Пусть $\omega \in \mathfrak{N}$ и пусть $\psi = \psi(\omega) \in \operatorname{Dom} X_0 \cap \mathfrak{N}^\perp$ — (слабое) решение уравнения

$$X_0^*(X_0\psi + X_1 Z\omega) = -P^\perp X_1^* R\omega.$$

Правая часть этого уравнения принадлежит $\mathfrak{N}^\perp = \operatorname{Ran} X_0^*$, поэтому условие разрешимости выполнено. Определим оператор $Z_2\colon \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ соотношением $Z_2 u = \psi(Pu)$, $u \in \mathfrak{H}$. Наконец, введём оператор $R_2\colon \mathfrak{N} \to \mathfrak{H}_*$ формулой $R_2 \coloneqq X_0 Z_2 + X_1 Z$.

1.1.7 Аналитические ветви собственных значений и собственных векторов оператора $A(t)$

Согласно общей аналитической теории возмущений (см. [68]), при $|t| \leqslant t^0$ существуют вещественно аналитические функции $\lambda_l^{\mathfrak{a}}(t)$ (ветви собственных значений) и вещественно аналитические $\mathfrak{H}$-значные функции $\varphi_l^{\mathfrak{a}}(t)$ (ветви собственных векторов), такие что $A(t)\varphi_l^{\mathfrak{a}}(t) = \lambda_l^{\mathfrak{a}}(t)\varphi_l^{\mathfrak{a}}(t)$, $l = 1, \ldots, n$, $|t| \leqslant t^0$, причём набор $\varphi_l^{\mathfrak{a}}(t)$, $l = 1, \ldots, n$, образует *ортонормированный базис* в $\mathfrak{F}(t; [0, \delta_{\mathfrak{a}}])$. Для *достаточно малого* t_* (где $0 < t_* \leqslant t^0$) при $|t| \leqslant t_*$ имеют место сходящиеся степенные разложения

$$\lambda_l^{\mathfrak{a}}(t) = \gamma_l^{\mathfrak{a}} t^2 + \mu_l^{\mathfrak{a}} t^3 + \nu_l^{\mathfrak{a}} t^4 + \ldots, \quad \gamma_l^{\mathfrak{a}} \geqslant 0, \ \mu_l^{\mathfrak{a}}, \nu_l^{\mathfrak{a}} \in \mathbb{R}, \qquad l = 1, \ldots, n, \tag{1.19}$$

$$\varphi_l^{\mathfrak{a}}(t) = \omega_l^{\mathfrak{a}} + t\psi_l^{\mathfrak{a},(1)} + \ldots, \qquad l = 1, \ldots, n. \tag{1.20}$$

Будем считать нумерацию такой, что $\gamma_1^{\mathfrak{a}} \leqslant \gamma_2^{\mathfrak{a}} \leqslant \ldots \leqslant \gamma_n^{\mathfrak{a}}$. Элементы $\omega_l^{\mathfrak{a}} = \varphi_l^{\mathfrak{a}}(0)$, $l = 1, \ldots, n$, образуют ортонормированный базис в подпространстве $\mathfrak{N}$. В [13, гл. 1, §1] и [14, §1] было проверено, что $\widetilde{\omega}_l^{\mathfrak{a}} := \psi_l^{\mathfrak{a},(1)} - Z\omega_l^{\mathfrak{a}} \in \mathfrak{N}$, $l = 1, \ldots, n$,

$$S\omega_l^{\mathfrak{a}} = \gamma_l^{\mathfrak{a}}\omega_l^{\mathfrak{a}}, \qquad l = 1, \ldots, n, \tag{1.21}$$

$$(\widetilde{\omega}_j^{\mathfrak{a}}, \omega_k^{\mathfrak{a}}) + (\omega_j^{\mathfrak{a}}, \widetilde{\omega}_k^{\mathfrak{a}}) = 0, \qquad j, k = 1, \ldots, n. \tag{1.22}$$

Таким образом, *числа* $\gamma_l^{\mathfrak{a}}$ *и элементы* $\omega_l^{\mathfrak{a}}$*, определённые в* (1.19) *и* (1.20)*, являются собственными для ростка* S. Справедливы представления

$$P = \sum_{l=1}^{n} (\cdot, \omega_l^{\mathfrak{a}})\omega_l^{\mathfrak{a}}, \qquad SP = \sum_{l=1}^{n} \gamma_l^{\mathfrak{a}} (\cdot, \omega_l^{\mathfrak{a}})\omega_l^{\mathfrak{a}}. \tag{1.23}$$

1.1.8 Ветви собственных значений и собственных векторов оператора $\mathfrak{B}(\tau; \vartheta)$. Спектральный росток оператора $\mathfrak{B}(\tau; \vartheta)$

Согласно общей аналитической теории возмущений (см. [68]), при $|\tau| \leqslant \tau^0$ существуют вещественно аналитические (по τ) функции $\lambda_l^{\mathfrak{b}}(\tau; \vartheta)$ (ветви собственных значений) и вещественно аналитические $\mathfrak{H}$-значные функции $\varphi_l^{\mathfrak{b}}(\tau; \vartheta)$ (ветви собственных векторов), такие что

$$\mathfrak{B}(\tau; \vartheta)\varphi_l^{\mathfrak{b}}(\tau; \vartheta) = \lambda_l^{\mathfrak{b}}(\tau; \vartheta)\varphi_l^{\mathfrak{b}}(\tau; \vartheta), \quad |\tau| \leqslant \tau^0, \quad l = 1, \ldots, n,$$

причём $\varphi_l^\flat(\tau;\vartheta)$, $l=1,\dots,n$, образуют ортонормированный базис в $\mathfrak{F}(\tau;\vartheta)$. Для достаточно малого $\tau_*(\vartheta)\leqslant\tau^0$ справедливы сходящиеся степенные разложения:

$$\lambda_l^\flat(\tau;\vartheta)=\gamma_l^\flat(\vartheta)\tau^2+\mu_l^\flat(\vartheta)\tau^3+\dots,\qquad \gamma_l^\flat(\vartheta)>0,\ \mu_l^\flat(\vartheta)\in\mathbb{R},\ |\tau|\leqslant\tau_*(\vartheta),$$
$$\varphi_l^\flat(\tau;\vartheta)=\omega_l^\flat(\vartheta)+\tau\varphi_l^{\flat,(1)}(\vartheta)+\dots,\qquad |\tau|\leqslant\tau_*(\vartheta).$$

Векторы $\omega_l^\flat(\vartheta)$, $l=1,\dots,n$, образуют ортонормированный базис в $\mathfrak{N}$.

Следуя [31], введём оператор

$$\begin{aligned}\mathcal{S}(\vartheta)=\vartheta_1^2S-\vartheta_1\vartheta_2(X_0Z)^*(X_0\widetilde{Z})|_{\mathfrak{N}}-\vartheta_1\vartheta_2(X_0\widetilde{Z})^*(X_0Z)|_{\mathfrak{N}}\\ -\vartheta_2^2(X_0\widetilde{Z})^*(X_0\widetilde{Z})|_{\mathfrak{N}}+\vartheta_1\vartheta_2P(Y_2^*Y_1+Y_1^*Y_2)|_{\mathfrak{N}}+\vartheta_2^2(Q_{\mathfrak{N}}+\lambda Q_{0\mathfrak{N}}),\end{aligned}\tag{1.24}$$

который называется *спектральным ростком семейства* $\mathfrak{B}(\tau;\vartheta)$ *при* $\tau=0$. Здесь $Q_{\mathfrak{N}}$ — самосопряжённый оператор, порождённый квадратичной формой $\mathfrak{q}[\omega,\omega]$, $\omega\in\mathfrak{N}$, а $Q_{0\mathfrak{N}}:=PQ_0|_{\mathfrak{N}}$.

Как показано в [31, предложение 1.6], числа $\gamma_l^\flat(\vartheta)$ и векторы $\omega_l^\flat(\vartheta)$ являются собственными для $\mathcal{S}(\vartheta)$:

$$\mathcal{S}(\vartheta)\omega_l^\flat(\vartheta)=\gamma_l^\flat(\vartheta)\omega_l^\flat(\vartheta),\quad l=1,\dots,n.$$

Имеют место представления

$$P=\sum_{l=1}^n(\,\cdot\,,\omega_l^\flat(\vartheta))\omega_l^\flat(\vartheta),\qquad \mathcal{S}(\vartheta)P=\sum_{l=1}^n\gamma_l^\flat(\vartheta)(\,\cdot\,,\omega_l^\flat(\vartheta))\omega_l^\flat(\vartheta).$$

Оценим норму оператора $\mathcal{S}(\vartheta)$, используя (1.12), (1.15), (1.18), (1.3) при $t=0$ и $\nu_*=1$, а также (1.4) при $t=0$:

$$\begin{aligned}\|\mathcal{S}(\vartheta)\|_{\mathfrak{N}\to\mathfrak{N}}\leqslant\|X_1\|^2+2c_1C(1)^{1/2}\|X_1\|+c_1^2C(1)\\ +2C(1)^{1/2}\|Y_1\|+c_3+|\lambda|\|Q_0\|=:C_{\mathcal{S}}.\end{aligned}\tag{1.25}$$

В заключение этого пункта введём оператор

$$\begin{aligned}L(t,\varepsilon):=\tau^2\mathcal{S}(\vartheta)=t^2S-t\varepsilon\big((X_0Z)^*(X_0\widetilde{Z})|_{\mathfrak{N}}+(X_0\widetilde{Z})^*(X_0Z)|_{\mathfrak{N}}\big)\\ +t\varepsilon P(Y_2^*Y_1+Y_1^*Y_2)|_{\mathfrak{N}}+\varepsilon^2\big(-(X_0\widetilde{Z})^*(X_0\widetilde{Z})|_{\mathfrak{N}}+Q_{\mathfrak{N}}+\lambda Q_{0\mathfrak{N}}\big).\end{aligned}\tag{1.26}$$

1.1.9 Пороговые аппроксимации

Нам понадобятся аппроксимации для спектрального проектора $F(t)$ и оператора $A(t)F(t)$ на промежутке $[0,t^0]$. Следующее утверждение было получено в [13, гл. 1, теоремы 4.1 и 4.3]. Ниже через β_j обозначаем *абсолютные константы*, причём *считаем* $\beta_j \geqslant 1$.

Предложение 1.1.4 ([13]). *В условиях п. 1.1.1 справедливы оценки*

$$\|F(t) - P\| \leqslant C_1|t|, \quad |t| \leqslant t^0; \qquad C_1 = \beta_1 \delta_{\mathfrak{a}}^{-1/2}\|X_1\|, \tag{1.27}$$

$$\|A(t)F(t) - t^2 SP\| \leqslant C_2|t|^3, \quad |t| \leqslant t^0; \qquad C_2 = \beta_2 \delta_{\mathfrak{a}}^{-1/2}\|X_1\|^3. \tag{1.28}$$

Отметим также, что из (1.1), (1.18) и (1.28) вытекает оценка

$$\|A(t)F(t)\| \leqslant (1 + \beta_2)\|X_1\|^2 t^2, \qquad |t| \leqslant t^0. \tag{1.29}$$

Нам понадобится также более точная аппроксимация; см. [14, теорема 4.1].

Предложение 1.1.5 ([14]). *В условиях п. 1.1.1 справедливо соотношение*

$$A(t)F(t) = t^2 SP + t^3 K + \Psi(t), \qquad \|\Psi(t)\| \leqslant C_3 t^4, \quad |t| \leqslant t^0, \tag{1.30}$$

где $C_3 = \beta_3 \delta_{\mathfrak{a}}^{-1}\|X_1\|^4$. *Оператор* K *допускает представление*

$$K = K_0 + N = K_0 + N_0 + N_*,$$

где K_0 *переводит* $\mathfrak{N}$ *в* $\mathfrak{N}^\perp$ *и* $\mathfrak{N}^\perp$ *в* $\mathfrak{N}$, *а* $N = N_0 + N_*$ *переводит* $\mathfrak{N}$ *в себя и* $\mathfrak{N}^\perp$ *в* $\{0\}$. *В терминах коэффициентов степенных разложений*

$$K_0 = \sum_{l=1}^{n} \gamma_l^{\mathfrak{a}} \left((\cdot, Z\omega_l^{\mathfrak{a}})\omega_l^{\mathfrak{a}} + (\cdot, \omega_l^{\mathfrak{a}})Z\omega_l^{\mathfrak{a}} \right),$$

$$N_0 = \sum_{l=1}^{n} \mu_l^{\mathfrak{a}} (\cdot, \omega_l^{\mathfrak{a}})\omega_l^{\mathfrak{a}}, \quad N_* = \sum_{l=1}^{n} \gamma_l^{\mathfrak{a}} \left((\cdot, \widetilde{\omega}_l^{\mathfrak{a}})\omega_l^{\mathfrak{a}} + (\cdot, \omega_l^{\mathfrak{a}})\widetilde{\omega}_l^{\mathfrak{a}} \right). \tag{1.31}$$

В инвариантных терминах справедливы представления $K_0 = ZSP + SPZ^*$,

$$N = Z^* X_1^* RP + (RP)^* X_1 Z. \tag{1.32}$$

Операторы N *и* K *удовлетворяют оценкам*

$$\|N\| \leqslant (2\delta_{\mathfrak{a}})^{-1/2}\|X_1\|^3, \qquad \|K\| \leqslant 2(2\delta_{\mathfrak{a}})^{-1/2}\|X_1\|^3. \tag{1.33}$$

Замечание 1.1.6. *В базисе* $\{\omega_l^{\mathfrak{a}}\}_{l=1}^n$ *операторы* N, N_0, N_* (*суженные на* $\mathfrak{N}$) *задаются матрицами размера* $n \times n$. *При этом оператор* N_0 *диагонален*:

$$(N_0\omega_j^{\mathfrak{a}}, \omega_k^{\mathfrak{a}}) = \mu_j^{\mathfrak{a}} \delta_{jk}, \qquad j, k = 1, \ldots, n. \tag{1.34}$$

Матричные элементы оператора N_* имеют вид

$$(N_*\omega_j^{\mathfrak a},\omega_k^{\mathfrak a}) = \gamma_k^{\mathfrak a}(\omega_j^{\mathfrak a},\widetilde{\omega}_k^{\mathfrak a}) + \gamma_j^{\mathfrak a}(\widetilde{\omega}_j^{\mathfrak a},\omega_k^{\mathfrak a}) = (\gamma_j^{\mathfrak a}-\gamma_k^{\mathfrak a})(\widetilde{\omega}_j^{\mathfrak a},\omega_k^{\mathfrak a}), \qquad j,k=1,\dots,n.$$

Видно, что диагональные элементы для N_* обращаются в ноль: $(N_*\omega_j^{\mathfrak a},\omega_j^{\mathfrak a})=0$, $j=1,\dots,n$. *Более того,* $(N_*\omega_j^{\mathfrak a},\omega_k^{\mathfrak a})=0$, *если* $\gamma_j^{\mathfrak a}=\gamma_k^{\mathfrak a}$.

Нам также будут нужны аппроксимации для спектрального проектора $F(\tau;\vartheta)$ и оператора $\mathfrak{B}(\tau;\vartheta)F(\tau;\vartheta)$ на промежутке $[0,\tau^0]$. Следующее утверждение было получено в [31, теорема 2.2].

Теорема 1.1.7 ([31]). *Справедливы оценки*

$$F(\tau;\vartheta)-P=\Phi(\tau;\vartheta), \quad \|\Phi(\tau;\vartheta)\|\leqslant C_4|\tau|, \quad |\tau|\leqslant\tau^0; \tag{1.35}$$
$$\mathfrak{B}(\tau;\vartheta)F(\tau;\vartheta)-\tau^2\mathcal{S}(\vartheta)P=\Psi(\tau;\vartheta), \quad \|\Psi(\tau;\vartheta)\|\leqslant C_5|\tau|^3, \quad |\tau|\leqslant\tau^0. \tag{1.36}$$

Более точная аппроксимация была получена в [59, теорема 3.3].

Теорема 1.1.8 ([59]). *Справедливы представление*

$$\mathfrak{B}(\tau;\vartheta)F(\tau;\vartheta)=\tau^2\mathcal{S}(\vartheta)P+\tau^3K(\vartheta)+\Psi_2(\tau;\vartheta), \quad |\tau|\leqslant\tau^0, \tag{1.37}$$

и оценка

$$\|\Psi_2(\tau;\vartheta)\|\leqslant C_6\tau^4, \quad |\tau|\leqslant\tau^0. \tag{1.38}$$

Оператор $K(\vartheta)$ определён ниже соотношениями (1.39)–(1.44).

Как показано в [59, п. 3.4],

$$K(\vartheta)=K_0(\vartheta)+N(\vartheta), \tag{1.39}$$

где $K_0(\vartheta)$ переводит $\mathfrak{N}$ в $\mathfrak{N}^\perp$ и $\mathfrak{N}^\perp$ в $\mathfrak{N}$, а $N(\vartheta)$ переводит $\mathfrak{N}$ в себя и $\mathfrak{N}^\perp$ в $\{0\}$. В терминах коэффициентов степенных разложений имеем

$$K_0(\vartheta)=\sum_{l=1}^{n}\gamma_l^{\mathfrak b}(\vartheta)\big((\,\cdot\,,\omega_l^{\mathfrak b}(\vartheta))(\vartheta_1 Z\omega_l^{\mathfrak b}(\vartheta)+\vartheta_2\widetilde{Z}\omega_l^{\mathfrak b}(\vartheta)) \\ +(\,\cdot\,,\vartheta_1 Z\omega_l^{\mathfrak b}(\vartheta)+\vartheta_2\widetilde{Z}\omega_l^{\mathfrak b}(\vartheta))\omega_l^{\mathfrak b}(\vartheta)\big),$$

$$N(\vartheta)=\sum_{l=1}^{n}\mu_l^{\mathfrak b}(\vartheta)(\,\cdot\,,\omega_l^{\mathfrak b}(\vartheta))\omega_l^{\mathfrak b}(\vartheta) \\ +\sum_{l=1}^{n}\gamma_l^{\mathfrak b}(\vartheta)\big((\,\cdot\,,\widetilde{\omega}_l^{\mathfrak b}(\vartheta))\omega_l^{\mathfrak b}(\vartheta)+(\,\cdot\,,\omega_l^{\mathfrak b}(\vartheta))\widetilde{\omega}_l^{\mathfrak b}(\vartheta)\big),$$

где $\widetilde{\omega}_l^{\mathfrak{b}}(\vartheta) = P\varphi_l^{\mathfrak{b},(1)}(\vartheta)$. В инвариантных терминах справедливы представления

$$\begin{aligned} K_0(\vartheta) &= \vartheta_1\big(Z\mathcal{S}(\vartheta)P + \mathcal{S}(\vartheta)PZ^*\big) + \vartheta_2\big(\widetilde{Z}\mathcal{S}(\vartheta)P + \mathcal{S}(\vartheta)P\widetilde{Z}^*\big), \\ N(\vartheta) &= \vartheta_1^3 N_{11} + \vartheta_1^2\vartheta_2 N_{12} + \vartheta_1\vartheta_2^2 N_{21} + \vartheta_2^3 N_{22}, \end{aligned} \tag{1.40}$$

где

$$N_{11} = N = (X_1Z)^*RP + (RP)^*X_1Z, \tag{1.41}$$

$$\begin{aligned} N_{12} = (X_1\widetilde{Z})^*RP + (RP)^*X_1\widetilde{Z} + (X_1Z)^*X_0\widetilde{Z} + (X_0\widetilde{Z})^*X_1Z \\ +(Y_2Z)^*Y_0Z + (Y_0Z)^*Y_2Z + (Y_2Z)^*Y_1P + (Y_1P)^*Y_2Z \\ + (Y_2P)^*Y_1Z + (Y_1Z)^*Y_2P, \end{aligned} \tag{1.42}$$

$$\begin{aligned} N_{21} = (X_0\widetilde{Z})^*X_1\widetilde{Z} + (X_1\widetilde{Z})^*X_0\widetilde{Z} + (Y_2Z)^*Y_0\widetilde{Z} \\ +(Y_0\widetilde{Z})^*Y_2Z + (Y_2\widetilde{Z})^*Y_0Z + (Y_0Z)^*Y_2\widetilde{Z} + (Y_2\widetilde{Z})^*Y_1P \\ +(Y_1P)^*Y_2\widetilde{Z}+(Y_1\widetilde{Z})^*Y_2P + (Y_2P)^*Y_1\widetilde{Z} \\ +Z^*QP + PQZ + \lambda(Z^*Q_0P + PQ_0Z), \end{aligned} \tag{1.43}$$

$$\begin{aligned} N_{22} = (Y_0\widetilde{Z})^*Y_2\widetilde{Z} + (Y_2\widetilde{Z})^*Y_0\widetilde{Z} + \widetilde{Z}^*QP + PQ\widetilde{Z} \\ + \lambda(\widetilde{Z}^*Q_0P + PQ_0\widetilde{Z}). \end{aligned} \tag{1.44}$$

Поясним, что в (1.43) под формальной записью $Z^*QP + PQZ$ подразумевается ограниченный самосопряжённый оператор в $\mathfrak{H}$, порождённый формой $\mathfrak{q}[Pu,Zu] + \mathfrak{q}[Zu,Pu]$, $u \in \mathfrak{H}$. Аналогично в (1.44) под $\widetilde{Z}^*QP + PQ\widetilde{Z}$ понимается оператор в $\mathfrak{H}$, порождённый формой $\mathfrak{q}[Pu,\widetilde{Z}u] + \mathfrak{q}[\widetilde{Z}u,Pu]$, $u \in \mathfrak{H}$. В [59, п. 3.5] были установлены оценки $\|N_{12}\| \leqslant C_{1,2}$, $\|N_{2,1}\| \leqslant C_{2,1}$, $\|N_{22}\| \leqslant C_{2,2}$. В дальнейшем главную роль будет играть оператор N_{11}.

Замечание 1.1.9. *Постоянные C_4, C_5, C_6, $C_{1,2}$, $C_{2,1}$, $C_{2,2}$ полиномиально зависят от следующих величин (“данных задачи”)*:

$$\delta_{\mathfrak{b}}, \delta_{\mathfrak{b}}^{-1/2}, \kappa^{1/2}, \kappa^{-1/2}, \|X_1\|, \|Y_1\|, c_1, C(1)^{1/2}, c_2^{1/2}, c_3^{1/2}, |\lambda|\|Q_0\|, \tau^0, \tag{1.45}$$

причём коэффициенты соответствующих многочленов — некоторые положительные абсолютные постоянные. Это прослежено в [31; 59]*; мы не будем приводить явные выражения ввиду их громоздкости.*

1.1.10 Условие невырожденности

Ниже мы будем предполагать выполненным следующее дополнительное условие (ср. [13, гл. 1, п. 5.1]).

Условие 1.1.10. *При некотором $c_* > 0$ выполнено неравенство*

$$A(t) \geqslant c_* t^2 I, \qquad |t| \leqslant t^0. \tag{1.46}$$

Из условия 1.1.10 следует, что $\lambda_l^{\mathfrak{a}}(t) \geqslant c_* t^2$, $l = 1, \ldots, n$, при $|t| \leqslant t^0$. В силу (1.19) это влечёт $\gamma_l^{\mathfrak{a}} \geqslant c_* > 0$, $l = 1, \ldots, n$. Таким образом, росток невырожден (см. (1.21)):

$$S \geqslant c_* I_{\mathfrak{N}}. \tag{1.47}$$

1.1.11 Разбиение собственных значений оператора $A(t)$ на кластеры

Материал этого пункта заимствован из [57, §2]. Он содержателен при $n \geqslant 2$.

Предположим, что выполнено условие 1.1.10. Сейчас нам будет удобно изменить обозначения, отслеживая кратности собственных значений ростка S. Обозначим количество различных собственных значений ростка через p. Занумеруем эти собственные значения в порядке возрастания и обозначим их через $\gamma_j^{\mathfrak{a},\circ}$, $j = 1, \ldots, p$. Их кратности обозначим через $k_1, \ldots, k_p$ (разумеется, $k_1 + \ldots + k_p = n$). Введём обозначения для собственных подпространств: $\mathfrak{N}_j = \operatorname{Ker}(S - \gamma_j^{\mathfrak{a},\circ} I_{\mathfrak{N}})$, $j = 1, \ldots, p$. Тогда $\mathfrak{N} = \sum_{j=1}^{p} \oplus \mathfrak{N}_j$. Пусть P_j — ортопроектор пространства $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{N}_j$. Тогда

$$P = \sum_{j=1}^{p} P_j, \qquad P_j P_l = 0 \quad \text{при} \quad j \neq l. \tag{1.48}$$

Соответственно изменим и обозначения собственных векторов ростка (тех самых, которые являются “зародышами” в (1.20)), разделяя их на p частей, так что $\omega_1^{\mathfrak{a},(j)}, \ldots, \omega_{k_j}^{\mathfrak{a},(j)}$ отвечают собственному значению $\gamma_j^{\mathfrak{a},\circ}$ и образуют ортонормированный базис в $\mathfrak{N}_j$. Также изменим обозначения для собственных чисел и собственных векторов оператора $A(t)$. Собственное число и собственное значение, разложения (1.19), (1.20) для которых начинаются с $\gamma_j^{\mathfrak{a},\circ} t^2$ и $\omega_q^{\mathfrak{a},(j)}$, обозначаются через $\lambda_q^{\mathfrak{a},(j)}(t)$ and $\varphi_q^{\mathfrak{a},(j)}(t)$.

Замечание 1.1.11. *Согласно замечанию 1.1.6*

$$P_j N_* P_j = 0, \quad j = 1, \dots, p; \qquad P_l N_0 P_j = 0 \qquad \textit{при} \quad l \neq j. \tag{1.49}$$

Отсюда следуют инвариантные представления операторов N_0 и N_*:

$$N_0 = \sum_{j=1}^{p} P_j N P_j, \quad N_* = \sum_{1 \leqslant j,l \leqslant p:\, j \neq l} P_j N P_l. \tag{1.50}$$

Для каждой пары индексов (j,l), $1 \leqslant j,l \leqslant p$, $j \neq l$, введём обозначение

$$c_{jl}^{\circ} := \min\{c_*, n^{-1} |\gamma_l^{\mathfrak{a},\circ} - \gamma_j^{\mathfrak{a},\circ}|\}. \tag{1.51}$$

Ясно, что найдётся номер $i_0 = i_0(j,l)$, где $j \leqslant i_0 \leqslant l-1$ при $j < l$ и $l \leqslant i_0 \leqslant j-1$ при $l < j$, такой что $\gamma_{i_0+1}^{\mathfrak{a},\circ} - \gamma_{i_0}^{\mathfrak{a},\circ} \geqslant c_{jl}^{\circ}$. Выберем число $t_{jl}^{00} \leqslant t^0$ так, чтобы

$$t_{jl}^{00} \leqslant (4C_2)^{-1} c_{jl}^{\circ} = (4\beta_2)^{-1} \delta_{\mathfrak{a}}^{1/2} \|X_1\|^{-3} c_{jl}^{\circ}. \tag{1.52}$$

Положим $\Delta_{jl}^{(1)} := [\gamma_1^{\mathfrak{a},\circ} - c_{jl}^{\circ}/4, \gamma_{i_0}^{\mathfrak{a},\circ} + c_{jl}^{\circ}/4]$ и $\Delta_{jl}^{(2)} := [\gamma_{i_0+1}^{\mathfrak{a},\circ} - c_{jl}^{\circ}/4, \gamma_p^{\mathfrak{a},\circ} + c_{jl}^{\circ}/4]$. Спектральные проекторы оператора $A(t)$, отвечающие промежуткам $t^2 \Delta_{jl}^{(1)}$ и $t^2 \Delta_{jl}^{(2)}$, обозначим через $F_{jl}^{(1)}(t)$ и $F_{jl}^{(2)}(t)$, соответственно. Очевидно

$$F(t) = F_{jl}^{(1)}(t) + F_{jl}^{(2)}(t), \qquad |t| \leqslant t_{jl}^{00}. \tag{1.53}$$

Следующее утверждение было установлено в [57, §2].

Предложение 1.1.12 ([57]). *При $|t| \leqslant t_{jl}^{00}$ справедливы оценки*

$$\begin{aligned} \|F_{jl}^{(1)}(t) - (P_1 + \dots + P_{i_0})\| &\leqslant C_{7,jl} |t|, \\ \|F_{jl}^{(2)}(t) - (P_{i_0+1} + \dots + P_p)\| &\leqslant C_{7,jl} |t|. \end{aligned} \tag{1.54}$$

Постоянная $C_{7,jl}$ задана соотношением

$$C_{7,jl} = \beta_7 \delta_{\mathfrak{a}}^{-1/2} \|X_1\|^5 (c_{jl}^{\circ})^{-2}. \tag{1.55}$$

1.1.12 Коэффициенты $\nu_l^{\mathfrak{a}}$, $l = 1,\ldots,n$

Нам потребуется указать связь коэффициентов $\nu_l^{\mathfrak{a}}$, $l = 1,\ldots,n$, с некоторой задачей на собственные числа.

В [25, (1.34), (1.37)] было установлено, что

$$\psi_l^{\mathfrak{a},(2)} - Z\widetilde{\omega}_l^{\mathfrak{a}} - Z_2\omega_l^{\mathfrak{a}} =: \widetilde{\omega}_l^{\mathfrak{a},(2)} \in \mathfrak{N}, \quad l = 1,\ldots,n,$$

$$(\widetilde{\omega}_l^{\mathfrak{a},(2)}, \omega_k^{\mathfrak{a}}) + (Z\omega_l^{\mathfrak{a}}, Z\omega_k^{\mathfrak{a}}) + (\widetilde{\omega}_l^{\mathfrak{a}}, \widetilde{\omega}_k^{\mathfrak{a}}) + (\omega_l^{\mathfrak{a}}, \widetilde{\omega}_k^{\mathfrak{a},(2)}) = 0, \quad l,k = 1,\ldots,n. \quad (1.56)$$

Далее, из [25, (2.47), формула после (2.46)] получаем

$$\begin{aligned}(N_1\omega_l^{\mathfrak{a}}, \omega_k^{\mathfrak{a}}) &- \mu_l^{\mathfrak{a}}(\widetilde{\omega}_l^{\mathfrak{a}}, \omega_k^{\mathfrak{a}}) - \mu_k^{\mathfrak{a}}(\omega_l^{\mathfrak{a}}, \widetilde{\omega}_k^{\mathfrak{a}}) \\ &- \gamma_l^{\mathfrak{a}}(\widetilde{\omega}_l^{\mathfrak{a},(2)}, \omega_k^{\mathfrak{a}}) - \gamma_k^{\mathfrak{a}}(\omega_l^{\mathfrak{a}}, \widetilde{\omega}_k^{\mathfrak{a},(2)}) - (S\widetilde{\omega}_l^{\mathfrak{a}}, \widetilde{\omega}_k^{\mathfrak{a}}) = \nu_l^{\mathfrak{a}}\delta_{lk}, \qquad l,k = 1,\ldots,n,\end{aligned} \quad (1.57)$$

где $N_1 := N_1^0 - Z^*ZSP - SPZ^*Z$, $N_1^0 := Z_2^*X_1^*RP + (RP)^*X_1Z_2 + R_2^*R_2P$.

Пусть $\gamma_q^{\mathfrak{a},\circ}$ — собственное значение задачи (1.21) кратности k_q (т. е. $\gamma_q^{\mathfrak{a},\circ} = \gamma_i^{\mathfrak{a}} = \ldots = \gamma_{i+k_q-1}^{\mathfrak{a}}$, $i = i(q) = k_1 + \ldots + k_{q-1} + 1$). Рассмотрим задачу на собственные числа (см. замечание 1.1.6)

$$P_qN\omega_l^{\mathfrak{a}} = \mu_l^{\mathfrak{a}}\omega_l^{\mathfrak{a}}, \qquad l = i,\ldots,i+k_q-1. \quad (1.58)$$

Будем считать, что $\mu_l^{\mathfrak{a}}$, $l = i,\ldots,i+k_q-1$, занумерованы в порядке неубывания. Обозначим количество различных собственных значений через $p'(q)$ и обозначим их кратности через $k_{1,q},\ldots,k_{p'(q),q}$ (разумеется, $k_{1,q} + \ldots + k_{p'(q),q} = k_q$). Переобозначим различные собственные значения через $\mu_{j,q}^{\mathfrak{a},\circ}$, $j = 1,\ldots,p'(q)$, и введём следующие обозначения для собственных подпространств: $\mathfrak{N}_{j,q}^{\mathfrak{a}} = \operatorname{Ker}(P_qN|_{\mathfrak{N}_q} - \mu_{j,q}^{\mathfrak{a},\circ}I_{\mathfrak{N}_q})$, $j = 1,\ldots,p'(q)$. Тогда $\mathfrak{N}_q = \sum_{j=1}^{p'(q)} \oplus\mathfrak{N}_{j,q}^{\mathfrak{a}}$. Пусть $P_{j,q}^{\mathfrak{a}}$ — ортопроектор пространства $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{N}_{j,q}^{\mathfrak{a}}$. Тогда $P_q = \sum_{j=1}^{p'(q)} P_{j,q}^{\mathfrak{a}}$ и $P_{j,q}^{\mathfrak{a}}P_{r,q}^{\mathfrak{a}} = 0$ при $j \neq r$.

Далее, пусть $\mu_{q',q}^{\mathfrak{a},\circ}$ — $k_{q',q}$-кратное собственное значение задачи (1.58): $\mu_{q',q}^{\mathfrak{a},\circ} = \mu_{i'}^{\mathfrak{a}} = \ldots = \mu_{i'+k_{q',q}-1}^{\mathfrak{a}}$, где $i' = i'(q',q) = i(q) + k_{1,q} + \ldots + k_{q'-1,q}$. Используя соотношения (1.22), (1.56) и учитывая, что $\gamma_l^{\mathfrak{a}} = \gamma_k^{\mathfrak{a}} = \gamma_q^{\mathfrak{a},\circ}$, $\mu_l^{\mathfrak{a}} = \mu_k^{\mathfrak{a}} = \mu_{q',q}^{\mathfrak{a},\circ}$, $l,k = i',\ldots,i'+k_{q',q}-1$, из (1.57) получаем

$$(N_1\omega_l^{\mathfrak{a}}, \omega_k^{\mathfrak{a}}) + \gamma_l^{\mathfrak{a}}(Z\omega_l^{\mathfrak{a}}, Z\omega_k^{\mathfrak{a}}) + \gamma_l^{\mathfrak{a}}(\widetilde{\omega}_l^{\mathfrak{a}}, \widetilde{\omega}_k^{\mathfrak{a}}) - (S\widetilde{\omega}_l^{\mathfrak{a}}, \widetilde{\omega}_k^{\mathfrak{a}}) = \nu_l^{\mathfrak{a}}\delta_{lk},$$
$$l,k = i',\ldots,i'+k_{q',q}-1. \quad (1.59)$$

В силу замечания 1.1.6 имеем

$$\gamma_l^{\mathfrak{a}}(\widetilde{\omega}_l^{\mathfrak{a}}, \widetilde{\omega}_k^{\mathfrak{a}}) - (S\widetilde{\omega}_l^{\mathfrak{a}}, \widetilde{\omega}_k^{\mathfrak{a}}) = \sum_{l'=1}^{n} (\gamma_l^{\mathfrak{a}} - \gamma_{l'}^{\mathfrak{a}})(\widetilde{\omega}_l^{\mathfrak{a}}, \omega_{l'}^{\mathfrak{a}})(\omega_{l'}^{\mathfrak{a}}, \widetilde{\omega}_k^{\mathfrak{a}})$$
$$= \sum_{\substack{l' \in \{1,\dots,n\} \\ l' \neq i,\dots,i+k_q-1}} \frac{(N\omega_l^{\mathfrak{a}}, \omega_{l'}^{\mathfrak{a}})(\omega_{l'}^{\mathfrak{a}}, N\omega_k^{\mathfrak{a}})}{\gamma_q^{\mathfrak{a},\circ} - \gamma_{l'}^{\mathfrak{a}}} = \sum_{\substack{j \in \{1,\dots,p\} \\ j \neq q}} \frac{(P_j N\omega_l^{\mathfrak{a}}, N\omega_k^{\mathfrak{a}})}{\gamma_q^{\mathfrak{a},\circ} - \gamma_j^{\mathfrak{a},\circ}}$$
$$=: \mathfrak{n}_0^{(q',q)}[\omega_l^{\mathfrak{a}}, \omega_k^{\mathfrak{a}}], \qquad l,k = i', \dots, i' + k_{q',q} - 1.$$

Уравнения (1.59) можно трактовать как задачу на собственные числа для оператора $\mathcal{N}^{(q',q)}$:

$$\mathcal{N}^{(q',q)} \omega_l^{\mathfrak{a}} = \nu_l^{\mathfrak{a}} \omega_l^{\mathfrak{a}}, \qquad l = i', \dots, i' + k_{q',q} - 1, \tag{1.60}$$

где $\mathcal{N}^{(q',q)} := P_{q',q}^{\mathfrak{a}} \left(N_1^0 - \frac{1}{2} Z^* Z S P - \frac{1}{2} S P Z^* Z \right)\big|_{\mathfrak{N}_{q',q}^{\mathfrak{a}}} + \mathcal{N}_0^{(q',q)}$, а $\mathcal{N}_0^{(q',q)}$ — оператор в $\mathfrak{N}_{q',q}^{\mathfrak{a}}$, порождённый формой $\mathfrak{n}_0^{(q',q)}[\cdot,\cdot]$.

Замечание 1.1.13. *Пусть $N_0 = 0$. В силу (1.31) это условие равносильно $\mu_l^{\mathfrak{a}} = 0$ для всех $l = 1, \dots, n$. Тогда имеет место равенство $\mathfrak{N}_{1,q}^{\mathfrak{a}} = \mathfrak{N}_q$, $q = 1, \dots, p$. В таком случае вместо $\mathcal{N}^{(1,q)}$ мы будем писать $\mathcal{N}^{(q)}$. Предположим также, что $\mathcal{N}^{(q)} \neq 0$ при некотором $q \in \{1, \dots, p\}$. С учётом (1.60) это означает, что $\nu_j^{\mathfrak{a}} \neq 0$ при некотором $j \in \{1, \dots, n\}$.*

1.2 Приближение для операторов $\cos(\varepsilon^{-1} s A(t)^{1/2}) P$, $A(t)^{-1/2} \sin(\varepsilon^{-1} s A(t)^{1/2}) P$ и $e^{-i\varepsilon^{-2} s A(t)} P$

1.2.1 Приближение оператора $A(t)^{1/2} F(t)$

В [54, теорема 2.4] было доказано следующее утверждение.

Теорема 1.2.1 ([54]). *Справедлива оценка*

$$\|A(t)^{1/2} F(t) - (t^2 S)^{1/2} P\| \leqslant C_8 t^2, \quad |t| \leqslant t^0; \tag{1.61}$$
$$C_8 = \beta_8 \delta_{\mathfrak{a}}^{-1/2} \left(\|X_1\|^2 + c_*^{-1/2} \|X_1\|^3 \right).$$

Уточним этот результат. Для этого используем представление для дробных степеней (см., например, [69, гл. III, §3, п. 3])

$$A(t)^{1/2}F(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \zeta^{-1/2}(A(t)+\zeta I)^{-1}A(t)F(t)\,d\zeta, \qquad 0<|t|\leqslant t^0. \tag{1.62}$$

Также нам потребуется пороговая аппроксимация для резольвенты $(A(t)+\zeta I)^{-1}$, полученная в [14, (5.19)]:

$$\begin{aligned}(A(t)+\zeta I)^{-1}F(t) = \Xi(t,\zeta) + t(Z\Xi(t,\zeta)+\Xi(t,\zeta)Z^*)\\ - t^3\Xi(t,\zeta)N\Xi(t,\zeta) + \mathcal{J}(t,\zeta), \qquad |t|\leqslant t^0,\ \zeta>0.\end{aligned} \tag{1.63}$$

Здесь $\Xi(t,\zeta) := (t^2SP+\zeta I)^{-1}P$, а оператор-функция $\mathcal{J}(t,\zeta)$ допускает оценку (см. [14, п. 5.2])

$$\|\mathcal{J}(t,\zeta)\| \leqslant C_9 t^4(c_*t^2+\zeta)^{-2} + C_{10}t^2(c_*t^2+\zeta)^{-1}, \qquad |t|\leqslant t^0,\ \zeta>0; \tag{1.64}$$

$$C_9 = \beta_9\delta_{\mathfrak{a}}^{-1}\left(\|X_1\|^4 + c_*^{-1}\|X_1\|^6\right), \quad C_{10} = \beta_{10}\delta_{\mathfrak{a}}^{-1}\left(\|X_1\|^2 + c_*^{-1}\|X_1\|^4\right). \tag{1.65}$$

В силу (1.30) и (1.63) имеем

$$\begin{aligned}(A(t)+\zeta I)^{-1}A(t)F(t) = t^2\Xi(t,\zeta)SP + t^3Z\Xi(t,\zeta)SP + t^3\Xi(t,\zeta)K\\ - t^5\Xi(t,\zeta)N\Xi(t,\zeta)SP + Y(t,\zeta),\end{aligned} \tag{1.66}$$

где

$$\begin{aligned}Y(t,\zeta) := \Xi(t,\zeta)\Psi(t) + t(Z\Xi(t,\zeta)+\Xi(t,\zeta)Z^*)(t^3K+\Psi(t))\\ - t^3\Xi(t,\zeta)N\Xi(t,\zeta)(t^3K+\Psi(t)) + \mathcal{J}(t,\zeta)\left(t^2SP+t^3K+\Psi(t)\right).\end{aligned} \tag{1.67}$$

Мы здесь учли равенство $Z^*P=0$. Подставляя (1.66) в (1.62) и учитывая, что $N = N_0 + N_*$, получаем:

$$A(t)^{1/2}F(t) = \sum_{j=1}^{3} I_j(t) + I_0(t) + I_*(t) + \Phi(t), \qquad |t|\leqslant t^0, \tag{1.68}$$

$$\begin{aligned}I_1(t) &:= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \zeta^{-1/2}t^2\Xi(t,\zeta)SP\,d\zeta, \\ I_2(t) &:= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \zeta^{-1/2}t^3Z\Xi(t,\zeta)SP\,d\zeta = tZI_1(t), \\ I_3(t) &:= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \zeta^{-1/2}t^3\Xi(t,\zeta)K\,d\zeta = tI_1(t)S^{-1}PK,\end{aligned} \tag{1.69}$$

$$
\begin{aligned}
I_0(t) &:= -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \zeta^{-1/2} t^5 \Xi(t,\zeta) N_0 \Xi(t,\zeta) SP\, d\zeta, \\
I_*(t) &:= -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \zeta^{-1/2} t^5 \Xi(t,\zeta) N_* \Xi(t,\zeta) SP\, d\zeta, \qquad (1.70)\\
\Phi(t) &:= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \zeta^{-1/2} Y(t,\zeta)\, d\zeta. \qquad (1.71)
\end{aligned}
$$

Для $t = 0$ мы положим $I_j(0) := 0$, $j = 1,2,3$, и $I_0(0) = I_*(0) = \Phi(0) := 0$. Тогда (1.68) при $t = 0$, очевидно, выполнено.

Используя представление вида (1.62) для оператора $(t^2SP)^{1/2}P = |t|S^{1/2}P$, получаем

$$
I_1(t) = |t|S^{1/2}P, \qquad I_2(t) = t|t|ZS^{1/2}P, \qquad I_3(t) = t|t|S^{-1/2}PK. \qquad (1.72)
$$

Вычислим оператор $I_0(t)$ в базисе $\{\omega_l^{\mathfrak{a}}\}_{l=1}^n$. Поскольку $N_0S = SN_0$, то

$$
I_0(t)\omega_l = -\frac{t^5}{\pi}\int_0^\infty \zeta^{-1/2}\frac{\gamma_l^{\mathfrak{a}}}{(\gamma_l^{\mathfrak{a}}t^2+\zeta)^2} N_0\omega_l^{\mathfrak{a}}\, d\zeta = -\frac{1}{2}t|t|(\gamma_l^{\mathfrak{a}})^{-1/2}N_0\omega_l^{\mathfrak{a}}.
$$

В инвариантных терминах имеем

$$
I_0(t) = -\frac{1}{2}t|t|N_0S^{-1/2}P. \qquad (1.73)
$$

Подставляя (1.72) и (1.73) в (1.68) и принимая во внимание равенство $K = ZSP + SPZ^* + N_0 + N_*$, получаем

$$
\begin{aligned}
A(t)^{1/2}F(t) = |t|S^{1/2}P + t|t|\left(ZS^{1/2}P + S^{1/2}PZ^*\right) + \frac{1}{2}t|t|N_0S^{-1/2}P& \\
+ t|t|S^{-1/2}PN_* + I_*(t) + \Phi(t).& \qquad (1.74)
\end{aligned}
$$

Здесь мы учли, что $PZ = 0$. Рассмотрим оператор

$$
\mathcal{I}_*(t) := I_*(t) - t|t|N_*S^{-1/2}P. \qquad (1.75)
$$

Поскольку $|t|S^{-1/2}P = S^{-1}I_1(t)$, из (1.69) и (1.70) получаем

$$
\mathcal{I}_*(t) = -\frac{t^3}{\pi}\int_0^\infty \zeta^{-1/2}(\Xi(t,\zeta)N_* + N_*\Xi(t,\zeta) - \zeta\Xi(t,\zeta)N_*\Xi(t,\zeta))\, d\zeta. \qquad (1.76)
$$

Из представления (1.76) видно, что оператор $\mathcal{I}_*(t)$ самосопряжённый. Нетрудно проверить равенство $\mathcal{I}_*(t) = t|t|\mathcal{I}_*(1)$. Соотношения (1.47) и (1.76) с учётом (1.33) дают следующую оценку

$$
\begin{aligned}
\|\mathcal{I}_*(1)\| \leqslant \frac{1}{\pi}\|N\|\int_0^\infty \zeta^{-1/2}\left(2(\zeta+c_*)^{-1} + \zeta(\zeta+c_*)^{-2}\right) d\zeta& \\
\leqslant \frac{5}{2}(2\delta_{\mathfrak{a}})^{-1/2}c_*^{-1/2}\|X_1\|^3.& \qquad (1.77)
\end{aligned}
$$

Используя (1.1), (1.13), (1.18), (1.30), (1.33), (1.47), (1.64), (1.65), (1.67), легко проверить, что член (1.71) удовлетворяет оценке

$$\|\Phi(t)\| \leqslant C_{11}|t|^3, \quad |t| \leqslant t^0; \tag{1.78}$$
$$C_{11} = \beta_{11}\delta_{\mathfrak{a}}^{-1}\left(\|X_1\|^4 c_*^{-1/2} + \|X_1\|^6 c_*^{-3/2} + \|X_1\|^8 c_*^{-5/2}\right).$$

Объединяя (1.74), (1.75) и (1.78), мы приходим к следующему результату.

Предложение 1.2.2. *Справедливо представление*

$$A(t)^{1/2}F(t) = |t|S^{1/2}P + t|t|G + \Phi(t), \qquad |t| \leqslant t^0, \tag{1.79}$$
$$G := ZS^{1/2}P + S^{1/2}PZ^* + \frac{1}{2}N_0 S^{-1/2}P + S^{-1/2}N_*P + N_*S^{-1/2}P + \mathcal{I}_*(1). \tag{1.80}$$

Оператор $\Phi(t)$ *удовлетворяет оценке* (1.78).

1.2.2 Приближение для оператора $e^{-isA(t)^{1/2}}P$

Рассмотрим оператор

$$E(t,s) := e^{-isA(t)^{1/2}}P - e^{-is(t^2S)^{1/2}P}P. \tag{1.81}$$

Имеем

$$E(t,s) = E_1(t,s) + E_2(t,s), \tag{1.82}$$
$$E_1(t,s) := e^{-isA(t)^{1/2}}F(t)^{\perp}P - F(t)^{\perp}e^{-is(t^2S)^{1/2}P}P, \tag{1.83}$$
$$E_2(t,s) := e^{-isA(t)^{1/2}}F(t)P - F(t)e^{-is(t^2S)^{1/2}P}P. \tag{1.84}$$

Поскольку $F(t)^{\perp}P = (P - F(t))P$, то из (1.27) вытекает оценка оператора (1.83):

$$\|E_1(t,s)\| \leqslant 2C_1|t|, \qquad |t| \leqslant t^0. \tag{1.85}$$

Перейдём к рассмотрению оператора (1.84), который запишем как (ср. [54, §2])

$$E_2(t,s) = -i\int_0^s e^{i(\tilde{s}-s)A(t)^{1/2}}F(t)\left(A(t)^{1/2}F(t) - (t^2S)^{1/2}P\right)e^{-i\tilde{s}(t^2S)^{1/2}P}P\,d\tilde{s}. \tag{1.86}$$

Из (1.61) и (1.86) следует оценка $\|E_2(t,s)\| \leqslant C_8|s|t^2$ при $|t| \leqslant t^0$. Отсюда с учётом (1.82), (1.85) получаем

$$\|E(t,s)\| \leqslant 2C_1|t| + C_8|s|t^2, \qquad |t| \leqslant t^0. \tag{1.87}$$

Мы, однако, проведём более кропотливые рассмотрения, которые позволят нам усилить этот результат при дополнительных предположениях. Применяя представление (1.79), из (1.86) получаем

$$E_2(t,s) = -i\int_0^s e^{i(\tilde{s}-s)A(t)^{1/2}}F(t)\,(t|t|G + \Phi(t))\,e^{-i\tilde{s}(t^2S)^{1/2}P}P\,d\tilde{s}. \tag{1.88}$$

Учитывая (1.80) и соотношение $Z^*P = 0$, запишем оператор (1.88) в виде

$$E_2(t,s) = \widetilde{E}_2(t,s) + E_0(t,s) + E_*(t,s), \tag{1.89}$$

$$\widetilde{E}_2(t,s) := -i\int_0^s e^{i(\tilde{s}-s)A(t)^{1/2}}F(t)\left(t|t|ZS^{1/2}P + \Phi(t)\right)e^{-i\tilde{s}(t^2S)^{1/2}P}P\,d\tilde{s}, \tag{1.90}$$

$$E_0(t,s) := -\frac{i}{2}t|t|\int_0^s e^{i(\tilde{s}-s)A(t)^{1/2}}F(t)S^{-1/2}N_0e^{-i\tilde{s}(t^2S)^{1/2}P}P\,d\tilde{s}, \tag{1.91}$$

$$E_*(t,s) := -it|t|\int_0^s e^{i(\tilde{s}-s)A(t)^{1/2}}F(t)G_*e^{-i\tilde{s}(t^2S)^{1/2}P}P\,d\tilde{s}, \tag{1.92}$$

$$G_* := S^{-1/2}N_*P + N_*S^{-1/2}P + \mathcal{I}_*(1). \tag{1.93}$$

Поскольку $PZ = 0$, то $F(t)ZS^{1/2}P = (F(t) - P)ZS^{1/2}P$. Тогда из (1.13), (1.18), (1.27), (1.78) следует оценка для оператора (1.90):

$$\|\widetilde{E}_2(t,s)\| \leqslant C_{12}|s||t|^3, \quad |t| \leqslant t^0; \qquad C_{12} = C_1(8\delta_{\mathfrak{a}})^{-1/2}\|X_1\|^2 + C_{11}. \tag{1.94}$$

Отметим, что если $N = 0$, то тогда $N_0 = N_* = 0$, $\mathcal{I}_*(1) = 0$ и, следовательно, $E_0(t,s) = E_*(t,s) = 0$. Таким образом, из (1.82), (1.85), (1.89) и (1.94) следует оценка

$$\|E(t,s)\| \leqslant 2C_1|t| + C_{12}|s||t|^3, \quad |t| \leqslant t^0, \qquad \text{если } N = 0. \tag{1.95}$$

1.2.3 Оценка члена $E_*(t,s)$

Материал этого пункта содержателен при $n \geqslant 2$. Будем использовать обозначения и результаты п. 1.1.11.

В этом пункте мы получим аналог оценки (1.95) при более слабом предположении $N_0 = 0$. Для этого мы должны оценить оператор (1.92). Однако, нам придётся уменьшить промежуток изменения параметра t. Из (1.48), (1.49), (1.76) и (1.93) следует равенство $G_* = \sum_{1\leqslant j,l\leqslant p:\, j\neq l} P_j G_* P_l$. Поэтому оператор (1.92) может быть представлен в виде

$$E_*(t,s) = -ie^{-isA(t)^{1/2}} \sum_{1\leqslant j,l\leqslant p:\, j\neq l} J_{jl}(t,s), \tag{1.96}$$

$$J_{jl}(t,s) := t|t| \int_0^s e^{i\tilde{s}A(t)^{1/2}} F(t) P_j G_* P_l e^{-i\tilde{s}(t^2 S)^{1/2} P} P \, d\tilde{s}. \tag{1.97}$$

Оцениванию подлежат только те слагаемые в (1.96), для которых $P_j N P_l \neq 0$. Итак, пусть $j \neq l$ и $P_j N P_l \neq 0$. Предположим, что число c_{jl}° определено в (1.51), а t_{jl}^{00} выбрано согласно (1.52). Применяя (1.53), представим оператор (1.97) в виде

$$J_{jl}(t,s) = J_{jl}^{(1)}(t,s) + J_{jl}^{(2)}(t,s), \tag{1.98}$$

$$J_{jl}^{(r)}(t,s) := t|t| \int_0^s e^{i\tilde{s}A(t)^{1/2}} F_{jl}^{(r)}(t) P_j G_* P_l e^{-i\tilde{s}(t^2 S)^{1/2} P} P \, d\tilde{s}, \qquad r = 1{,}2. \tag{1.99}$$

Предположим для определённости, что $j < l$. Тогда заведомо $j < i_0 + 1$ и в силу (1.48) и (1.54)

$$\| F_{jl}^{(2)}(t) P_j \| = \| (F_{jl}^{(2)}(t) - (P_{i_0+1} + \ldots + P_p)) P_j \| \leqslant C_{7,jl} |t|, \qquad |t| \leqslant t_{jl}^{00}. \tag{1.100}$$

Из (1.93), (1.99) и (1.100) с учётом (1.33), (1.47), (1.55) и (1.77) вытекает оценка

$$\| J_{jl}^{(2)}(t,s) \| \leqslant C_{7,jl} |t|^3 |s| (2c_*^{-1/2} \|N\| + \|\mathcal{I}_*(1)\|) \leqslant C_{13,jl} |s| |t|^3, \quad |t| \leqslant t_{jl}^{00}, \tag{1.101}$$

где $C_{13,jl} = \beta_{13} \delta_{\mathfrak{a}}^{-1} c_*^{-1/2} \|X_1\|^8 (c_{jl}^\circ)^{-2}$.

Остаётся рассмотреть член $J_{jl}^{(1)}(t,s)$. Очевидно, $P_l e^{-i\tilde{s}(t^2 S)^{1/2} P} P = e^{-i\tilde{s}|t|\sqrt{\gamma_l^{\mathfrak{a},\circ}}} P_l$. Далее, справедливо представление

$$e^{i\tilde{s}A(t)^{1/2}} F_{jl}^{(1)}(t) = \sum_{r=1}^{i_0} \sum_{q=1}^{k_r} e^{i\tilde{s}\sqrt{\lambda_q^{\mathfrak{a},(r)}(t)}} (\cdot, \varphi_q^{\mathfrak{a},(r)}(t)) \varphi_q^{\mathfrak{a},(r)}(t).$$

Таким образом, оператор $J_{jl}^{(1)}(t,s)$ можно записать в виде

$$J_{jl}^{(1)}(t,s) = t|t| \sum_{r=1}^{i_0} \sum_{q=1}^{k_r} \left(\int_0^s e^{i\tilde{s}\left(\sqrt{\lambda_q^{\mathfrak{a},(r)}(t)} - \sqrt{\gamma_l^{\mathfrak{a},\circ}}|t|\right)} d\tilde{s} \right) (P_j G_* P_l \cdot, \varphi_q^{\mathfrak{a},(r)}(t)) \varphi_q^{\mathfrak{a},(r)}(t). \tag{1.102}$$

Вычисляя интеграл в (1.102) и принимая во внимание оценки $|\lambda_q^{\mathfrak{a},(r)}(t)-\gamma_l^{\mathfrak{a},\circ}t^2| \geqslant \frac{3}{4}c_{jl}^\circ t^2$ и $\left|(\lambda_q^{\mathfrak{a},(r)}(t))^{1/2}-(\gamma_l^{\mathfrak{a},\circ})^{1/2}|t|\right| \geqslant (2\|X_1\||t|)^{-1}|\lambda_q^{\mathfrak{a},(r)}(t)-\gamma_l^{\mathfrak{a},\circ}t^2|$ при $|t| \leqslant t_{jl}^{00}$, получаем

$$\left|\int_0^s e^{i\tilde{s}\left(\sqrt{\lambda_q^{\mathfrak{a},(r)}(t)}-\sqrt{\gamma_l^{\mathfrak{a},\circ}}|t|\right)}\,d\tilde{s}\right| \leqslant 2\left|\sqrt{\lambda_q^{\mathfrak{a},(r)}(t)}-\sqrt{\gamma_l^{\mathfrak{a},\circ}}|t|\right|^{-1} \leqslant 16\|X_1\|(3c_{jl}^\circ)^{-1}|t|^{-1}. \tag{1.103}$$

Теперь из (1.102) и (1.103) с учётом (1.33), (1.47), (1.77) и (1.93) вытекает оценка

$$\|J_{jl}^{(1)}(t,s)\| \leqslant 16\|X_1\|(3c_{jl}^\circ)^{-1}|t|(2c_*^{-1/2}\|N\|+\|\mathcal{I}_*(1)\|) \leqslant C_{14,jl}|t|, \qquad |t| \leqslant t_{jl}^{00}, \tag{1.104}$$

где $C_{14,jl}=\beta_{14}\delta_{\mathfrak{a}}^{-1/2}c_*^{-1/2}\|X_1\|^4(c_{jl}^\circ)^{-1}$. Случай $j>l$ рассматривается аналогично.

Положим

$$c^\circ := \min_{(j,l)\in\mathcal{Z}} c_{jl}^\circ, \qquad \text{где} \quad \mathcal{Z} := \{(j,l)\colon 1\leqslant j,l\leqslant p,\ j\neq l,\ P_jNP_l\neq 0\}, \tag{1.105}$$

и выберем число $t^{00}\leqslant t^0$, удовлетворяющее условию

$$t^{00} \leqslant (4\beta_2)^{-1}\delta_{\mathfrak{a}}^{1/2}\|X_1\|^{-3}c^\circ. \tag{1.106}$$

Тогда можно считать, что $t^{00}\leqslant t_{jl}^{00}$ при всех $(j,l)\in\mathcal{Z}$ (см. (1.52)). Теперь соотношения (1.96), (1.98), (1.101) и (1.104) вместе с выражениями для констант $C_{13,jl}$, $C_{14,jl}$ влекут неравенство

$$\|E_*(t,s)\| \leqslant C_{13}|s||t|^3 + C_{14}|t|, \qquad |t|\leqslant t^{00}, \tag{1.107}$$

где $C_{13}=\beta_{13}n^2\delta_{\mathfrak{a}}^{-1}c_*^{-1/2}\|X_1\|^8(c^\circ)^{-2}$, $C_{14}=\beta_{14}n^2\delta_{\mathfrak{a}}^{-1/2}c_*^{-1/2}\|X_1\|^4(c^\circ)^{-1}$.

Отметим, что если $N_0=0$, тогда $E_0(t,s)=0$ и $E(t,s)=E_1(t,s)+\widetilde{E}_2(t,s)+E_*(t,s)$ (см. (1.82), (1.89), (1.91)). Поэтому оценки (1.85), (1.94), (1.107) приводят к следующему результату:

$$\begin{aligned} &\|E(t,s)\| \leqslant C_{15}|t| + C_{16}|s||t|^3, \quad |t|\leqslant t^{00}, \qquad \text{если } N_0=0;\\ &C_{15}=2C_1+C_{14}, \quad C_{16}=C_{12}+C_{13}. \end{aligned} \tag{1.108}$$

Замечание 1.2.3. *В силу замечания 1.1.6 условие $N_0=0$ равносильно тому, что в разложениях (1.19) выполнено $\mu_l^{\mathfrak{a}}=0$ при всех $l=1,\dots,n$.*

1.2.4 Приближение для оператора $A(t)^{-1/2}e^{-isA(t)^{1/2}}P$

Нам понадобится следующее утверждение.

Предложение 1.2.4. *При* $0 < |t| \leqslant t^0$ *справедлива оценка*

$$\|A(t)^{-1/2}P - (t^2S)^{-1/2}P\| \leqslant C_{17}; \tag{1.109}$$
$$C_{17} = \beta_{17}\delta_{\mathfrak{a}}^{-1/2}c_*^{-1/2}\|X_1\|(1 + c_*^{-1}\|X_1\|^2).$$

Доказательство. В [55, лемма 1.1] было доказано, что

$$\|A(t)^{-1/2}F(t) - (t^2S)^{-1/2}P\| \leqslant \check{C}_{17}, \qquad 0 < |t| \leqslant t^0;$$
$$\check{C}_{17} = \check{\beta}_{17}\delta_{\mathfrak{a}}^{-1/2}c_*^{-1/2}\|X_1\|(1 + c_*^{-1}\|X_1\|^2).$$

Далее, в силу (1.27) и условия 1.1.10, $\|A(t)^{-1/2}(F(t) - P)\| \leqslant C_1 c_*^{-1/2}$. Отсюда следует (1.109) с постоянной $C_{17} = \check{C}_{17} + C_1 c_*^{-1/2}$. □

Рассмотрим оператор

$$\mathcal{E}(t,s) := A(t)^{-1/2}e^{-isA(t)^{1/2}}P - (t^2S)^{-1/2}e^{-is(t^2S)^{1/2}}P. \tag{1.110}$$

Согласно (1.81) и (1.110) имеем

$$\mathcal{E}(t,s) = \mathcal{E}^\circ(t,s) + E(t,s)(t^2S)^{-1/2}P,$$
$$\mathcal{E}^\circ(t,s) := e^{-isA(t)^{1/2}}\left(A(t)^{-1/2}P - (t^2S)^{-1/2}P\right).$$

Оператор $\mathcal{E}^\circ(t,s)$ оцениваем, используя (1.109), а $E(t,s)(t^2S)^{-1/2}P$ — при помощи (1.87) (или (1.95), (1.108), если выполнены дополнительные предположения) и (1.47). Таким образом,

$$\|\mathcal{E}(t,s)\| \leqslant C_{18} + C_{19}|s||t|, \qquad 0 < |t| \leqslant t^0, \qquad \text{(общий случай)}; \tag{1.111}$$
$$\|\mathcal{E}(t,s)\| \leqslant C_{18} + C_{20}|s|t^2, \qquad 0 < |t| \leqslant t^0, \qquad \text{если } N = 0; \tag{1.112}$$
$$\|\mathcal{E}(t,s)\| \leqslant C_{21} + C_{22}|s|t^2, \qquad 0 < |t| \leqslant t^{00}, \qquad \text{если } N_0 = 0; \tag{1.113}$$

где $C_{18} = C_{17} + 2c_*^{-1/2}C_1$, $C_{19} = c_*^{-1/2}C_8$, $C_{20} = c_*^{-1/2}C_{12}$, $C_{21} = C_{17} + c_*^{-1/2}C_{15}$, $C_{22} = c_*^{-1/2}C_{16}$.

1.2.5 Приближение для операторов $\cos(sA(t)^{1/2})P$ и $A(t)^{-1/2}\sin(sA(t)^{1/2})P$

Введём обозначения

$$\mathcal{J}_1(t,s) := \cos(sA(t)^{1/2})P - \cos(s(t^2S)^{1/2}P)P, \tag{1.114}$$
$$\mathcal{J}_2(t,s) := A(t)^{-1/2}\sin(sA(t)^{1/2})P - (t^2S)^{-1/2}\sin(s(t^2S)^{1/2}P)P. \tag{1.115}$$

Следующие утверждения прямо вытекают из оценок (1.87), (1.95), (1.108), (1.111), (1.112), (1.113).

Теорема 1.2.5 ([54], [55]). *При* $s \in \mathbb{R}$ *и* $|t| \leqslant t^0$ *справедливы оценки*

$$\big\|\mathcal{J}_1(t,s)\big\| \leqslant 2C_1|t| + C_8|s|t^2, \tag{1.116}$$

$$\big\|\mathcal{J}_2(t,s)\big\| \leqslant C_{18} + C_{19}|s||t|. \tag{1.117}$$

Теорема 1.2.6. *Пусть оператор* N*, определённый в* (1.32)*, равен нулю*: $N = 0$. *Тогда при* $s \in \mathbb{R}$ *и* $|t| \leqslant t^0$ *справедливы оценки*

$$\big\|\mathcal{J}_1(t,s)\big\| \leqslant 2C_1|t| + C_{12}|s||t|^3, \tag{1.118}$$

$$\big\|\mathcal{J}_2(t,s)\big\| \leqslant C_{18} + C_{20}|s|t^2. \tag{1.119}$$

Теорема 1.2.7. *Пусть оператор* N_0*, определённый в* (1.50)*, равен нулю*: $N_0 = 0$. *Тогда при* $s \in \mathbb{R}$ *и* $|t| \leqslant t^{00}$ *справедливы оценки*

$$\big\|\mathcal{J}_1(t,s)\big\| \leqslant C_{15}|t| + C_{16}|s||t|^3,$$

$$\big\|\mathcal{J}_2(t,s)\big\| \leqslant C_{21} + C_{22}|s|t^2.$$

Отметим, что при $t = 0$ оператор (1.115) понимается как предел при $t \to 0$, который, очевидно, равен нулю. Теорема 1.2.5 была известна ранее (см. [54, теорема 2.5] и [55, предложение 2.1]).

1.2.6 Приближение для оператора $e^{-isA(t)}P$

Введём обозначение

$$\mathcal{J}_3(t,s) := e^{-isA(t)}P - e^{-ist^2SP}P. \tag{1.120}$$

Следующие утверждения были доказаны в [54, теорема 2.1] и [57, следствия 3.3, 3.5].

Теорема 1.2.8 ([54]). *При* $s \in \mathbb{R}$ *и* $|t| \leqslant t^0$ *справедлива оценка*

$$\|\mathcal{J}_3(t,s)\| \leqslant 2C_1|t| + C_2|s||t|^3. \tag{1.121}$$

Теорема 1.2.9 ([57]). *Пусть* $N = 0$. *Тогда при* $s \in \mathbb{R}$ *и* $|t| \leqslant t^0$ *справедлива оценка*

$$\|\mathcal{J}_3(t,s)\| \leqslant 2C_1|t| + C_{23}|s|t^4; \qquad C_{23} = \beta_{23}\delta_{\mathfrak{a}}^{-1}\|X_1\|^4. \tag{1.122}$$

Теорема 1.2.10 ([57]). *Пусть* $N_0 = 0$. *Тогда при* $s \in \mathbb{R}$ *и* $|t| \leqslant t^{00}$ *справедлива оценка*

$$\begin{aligned}
&\|\mathcal{J}_3(t,s)\| \leqslant C_{24}|t| + C_{25}|s|t^4;\\
&C_{24} = \beta_{24}\delta_{\mathfrak{a}}^{-1/2}(\|X_1\| + n^2\|X_1\|^3(c^\circ)^{-1}),\\
&C_{25} = \beta_{25}\delta_{\mathfrak{a}}^{-1}(\|X_1\|^4 + n^2\|X_1\|^8(c^\circ)^{-2}).
\end{aligned}$$

1.2.7 Приближение для экспоненты $e^{-is\mathfrak{B}(\tau;\vartheta)}P$

Положим

$$\mathcal{J}_4(t,\varepsilon,s) = \mathcal{J}_4(\tau;\vartheta;s) := e^{-is\mathfrak{B}(\tau;\vartheta)}P - e^{-is\tau^2\mathcal{S}(\vartheta)P}P. \tag{1.123}$$

Аналогично (1.82), (1.86) имеем

$$\begin{aligned}
&\mathcal{J}_4(\tau;\vartheta;s) = \mathscr{E}_1(\tau;\vartheta;s) + \mathscr{E}_2(\tau;\vartheta;s), \qquad (1.124)\\
&\mathscr{E}_1(\tau;\vartheta;s) := e^{-is\mathfrak{B}(\tau;\vartheta)}F(\tau;\vartheta)^\perp P - F(\tau;\vartheta)^\perp e^{-is\tau^2\mathcal{S}(\vartheta)P}P,\\
&\mathscr{E}_2(\tau;\vartheta;s) := e^{-is\mathfrak{B}(\tau;\vartheta)}F(\tau;\vartheta)P - F(\tau;\vartheta)e^{-is\tau^2\mathcal{S}(\vartheta)P}P\\
&\quad = -i\int_0^s e^{i(\tilde{s}-s)\mathfrak{B}(\tau;\vartheta)}F(\tau;\vartheta)\left(\mathfrak{B}(\tau;\vartheta)F(\tau;\vartheta) - \tau^2\mathcal{S}(\vartheta)P\right)e^{-i\tilde{s}\tau^2\mathcal{S}(\vartheta)P}P\,d\tilde{s}.
\end{aligned}$$

Поскольку $F(\tau;\vartheta)^\perp P = (P - F(\tau;\vartheta))P$, то из (1.35) вытекает оценка

$$\|\mathscr{E}_1(\tau;\vartheta;s)\| \leqslant 2C_4|\tau|, \qquad |\tau| \leqslant \tau^0. \tag{1.125}$$

Из (1.36) следует оценка $\|\mathscr{E}_2(\tau;\vartheta;s)\| \leqslant C_5|s||\tau|^3$, $|\tau| \leqslant \tau^0$. Отсюда с учётом (1.124), (1.125) получаем

$$\|\mathcal{J}_4(\tau;\vartheta;s)\| \leqslant 2C_4|\tau| + C_5|s||\tau|^3, \qquad |\tau| \leqslant \tau^0. \tag{1.126}$$

Мы проведём более кропотливые рассмотрения, которые позволят нам усилить результат при дополнительных предположениях. В силу (1.37)

$$\mathscr{E}_2(\tau;\vartheta;s) = -i\int_0^s e^{i(\tilde{s}-s)\mathfrak{B}(\tau;\vartheta)}F(\tau;\vartheta)\left(\tau^3K(\vartheta) + \Psi_2(\tau;\vartheta)\right)e^{-i\tilde{s}\tau^2\mathcal{S}(\vartheta)P}P\,d\tilde{s}. \tag{1.127}$$

Учитывая (1.39), (1.40), а также соотношения $Z^*P = 0$ и $\widetilde{Z}^*P = 0$, запишем оператор (1.127) в виде

$$\mathscr{E}_2(\tau;\vartheta;s) = \widetilde{\mathscr{E}}_2(\tau;\vartheta;s) + \widehat{\mathscr{E}}_2(\tau;\vartheta;s), \tag{1.128}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathscr{E}}_2(\tau;\vartheta;s) = -i\int_0^s e^{i(\tilde{s}-s)\mathfrak{B}(\tau;\vartheta)}F(\tau;\vartheta)\big(\tau^3\vartheta_1 Z\mathcal{S}(\vartheta)\\ + \tau^3\vartheta_2\widetilde{Z}\mathcal{S}(\vartheta) + \Psi_2(\tau;\vartheta)\big)e^{-i\tilde{s}\tau^2\mathcal{S}(\vartheta)P}P\,d\tilde{s},\end{aligned} \tag{1.129}$$

$$\widehat{\mathscr{E}}_2(\tau;\vartheta;s) = -i\tau^3\int_0^s e^{i(\tilde{s}-s)\mathfrak{B}(\tau;\vartheta)}F(\tau;\vartheta)N(\vartheta)e^{-i\tilde{s}\tau^2\mathcal{S}(\vartheta)P}P\,d\tilde{s}. \tag{1.130}$$

Поскольку $PZ = 0$ и $P\widetilde{Z} = 0$, то

$$F(\tau;\vartheta)Z\mathcal{S}(\vartheta)P = (F(\tau;\vartheta) - P)Z\mathcal{S}(\vartheta)P,$$
$$F(\tau;\vartheta)\widetilde{Z}\mathcal{S}(\vartheta)P = (F(\tau;\vartheta) - P)\widetilde{Z}\mathcal{S}(\vartheta)P.$$

Тогда из (1.14), (1.16), (1.25), (1.35), (1.38) следует оценка для оператора (1.129):

$$\begin{aligned}&\|\widetilde{\mathscr{E}}_2(\tau;\vartheta;s)\| \leqslant C_{26}|s|\tau^4, \quad |\tau| \leqslant \tau^0,\\ &C_{26} = \varkappa^{1/2}(13\delta_{\mathfrak{b}})^{-1/2}\big(\|X_1\| + c_1C(1)^{1/2}\big)C_4C_{\mathcal{S}} + C_6.\end{aligned} \tag{1.131}$$

Соотношения (1.123), (1.124), (1.125), (1.128), (1.131) приводят к следующей теореме.

Теорема 1.2.11. *При $s \in \mathbb{R}$ и $|\tau| \leqslant \tau^0$ справедливо представление*

$$\mathcal{J}_4(\tau;\vartheta;s) = \mathscr{E}_1(\tau;\vartheta;s) + \widetilde{\mathscr{E}}_2(\tau;\vartheta;s) + \widehat{\mathscr{E}}_2(\tau;\vartheta;s),$$

где первые два слагаемых допускают оценки (1.125) *и* (1.131) *соответственно. Третий член допускает представление* (1.130)*, где оператор $N(\vartheta)$ определён в* (1.40)–(1.44)*.*

1.2.8 Приближение для операторов $\cos(\varepsilon^{-1}sA(t)^{1/2})P$, $A(t)^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}sA(t)^{1/2})P$, $e^{-i\varepsilon^{-2}sA(t)}P$ и $e^{-i\varepsilon^{-2}s\mathfrak{B}(t,\varepsilon)}P$

Введём теперь параметр $\varepsilon > 0$. Мы будем исследовать поведение операторов $\cos(\varepsilon^{-1}sA(t)^{1/2})P$, $A(t)^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}sA(t)^{1/2})P$, $e^{-i\varepsilon^{-2}sA(t)}P$ и $e^{-i\varepsilon^{-2}s\mathfrak{B}(t,\varepsilon)}P$ при малом ε. Удобно домножить эти операторы на “сглаживающий множитель”

$\varepsilon^q(t^2+\varepsilon^2)^{-q/2}P$, где $q>0$. (Термин объясняется тем, что в приложениях к ДО такое домножение переходит в сглаживание.) Наша цель — получить аппроксимации для первого, третьего и четвёртого операторов с оценкой погрешности порядка $O(\varepsilon)$ и для второго с погрешностью $O(1)$ при наименьшем возможном q.

Теорема 1.2.12. *Пусть операторы* $\mathcal{J}_j(t,s)$, $j=1,2,3$, $\mathcal{J}_4(t,\varepsilon,s)$ *определены в* (1.114), (1.115), (1.120) *и* (1.123). *При* $\varepsilon>0$ *и* $s\in\mathbb{R}$ *справедливы оценки*

$$\big\|\mathcal{J}_1(t,\varepsilon^{-1}s)\big\|\varepsilon^2(t^2+\varepsilon^2)^{-1}\leqslant(C_1+C_8|s|)\varepsilon,\qquad |t|\leqslant t^0,\tag{1.132}$$

$$\big\|\mathcal{J}_2(t,\varepsilon^{-1}s)\big\|\varepsilon(t^2+\varepsilon^2)^{-1/2}\leqslant C_{18}+C_{19}|s|,\qquad |t|\leqslant t^0,\tag{1.133}$$

$$\big\|\mathcal{J}_3(t,\varepsilon^{-2}s)\big\|\varepsilon^3(t^2+\varepsilon^2)^{-3/2}\leqslant(C_1+C_2|s|)\varepsilon,\qquad |t|\leqslant t^0,\tag{1.134}$$

$$\big\|\mathcal{J}_4(t,\varepsilon,\varepsilon^{-2}s)\big\|\varepsilon^3(t^2+\varepsilon^2)^{-3/2}\leqslant(2C_4+C_5|s|)\varepsilon,\qquad |\tau|\leqslant\tau^0.\tag{1.135}$$

Теорема 1.2.12 вытекает непосредственно из оценок (1.116), (1.117), (1.121) и (1.126). Ранее оценки (1.132), (1.134) были установлены в [54, теоремы 2.7, 2.6], а оценка (1.133) была доказана в [55, теорема 2.3].

При дополнительных предположениях результат допускает усиление.

Теорема 1.2.13. *Пусть оператор* N, *определённый в* (1.32), *равен нулю*: $N=0$. *Тогда при* $\varepsilon>0$ *и* $s\in\mathbb{R}$ *справедливы оценки*

$$\big\|\mathcal{J}_1(t,\varepsilon^{-1}s)\big\|\varepsilon^{3/2}(t^2+\varepsilon^2)^{-3/4}\leqslant(2C_1+C'_{12}|s|^{1/2})\varepsilon,\qquad |t|\leqslant t^0,\tag{1.136}$$

$$\big\|\mathcal{J}_2(t,\varepsilon^{-1}s)\big\|\varepsilon^{1/2}(t^2+\varepsilon^2)^{-1/4}\leqslant C_{18}+C'_{20}|s|^{1/2},\qquad |t|\leqslant t^0,\tag{1.137}$$

$$\big\|\mathcal{J}_3(t,\varepsilon^{-2}s)\big\|\varepsilon^2(t^2+\varepsilon^2)^{-1}\leqslant(C_1+C'_{23}|s|^{1/2})\varepsilon,\qquad |t|\leqslant t^0,\tag{1.138}$$

$$\big\|\mathcal{J}_4(t,\varepsilon,\varepsilon^{-2}s)\big\|\varepsilon^2(t^2+\varepsilon^2)^{-1}\leqslant(2C'_4+C_{28}|s|)\varepsilon,\qquad |\tau|\leqslant\tau^0,\ 0<\varepsilon\leqslant1.\tag{1.139}$$

Здесь $C'_4=\max\{1;C_4\}$, $C'_{12}=\max\{2;C_{12}\}$, $C'_{20}=\max\{2c_*^{-1/2};C_{20}\}$ *и* $C'_{23}=\max\{2;C_{23}\}$; C_{28} *определена ниже в* (1.140).

Доказательство. При $s=0$ оценки (1.136)–(1.138) очевидны. Будем считать, что $s\neq0$. Если $|t|\geqslant\varepsilon^{1/3}|s|^{-1/3}$, то $\varepsilon^{3/2}(t^2+\varepsilon^2)^{-3/4}\leqslant\varepsilon|s|^{1/2}$, а потому левая часть в (1.136) не превосходит $2\varepsilon|s|^{1/2}$.

Пусть теперь $|t|\leqslant t^0$ и $|t|<\varepsilon^{1/3}|s|^{-1/3}$. Воспользуемся неравенством (1.118) с заменой s на $\varepsilon^{-1}s$:

$$\begin{aligned}\big\|\mathcal{J}_1(t,\varepsilon^{-1}s)\big\|\varepsilon^{3/2}(t^2+\varepsilon^2)^{-3/4}&\leqslant(2C_1|t|+C_{12}\varepsilon^{-1}|s||t|^3)\varepsilon^{3/2}(t^2+\varepsilon^2)^{-3/4}\\&\leqslant 2C_1\varepsilon+C_{12}|s|\varepsilon^{1/2}|t|^{3/2}\leqslant2C_1\varepsilon+C_{12}|s|^{1/2}\varepsilon.\end{aligned}$$

В итоге приходим к оценке (1.136).

Аналогично, если $|t| \geqslant \varepsilon^{1/3}|s|^{-1/3}$, то $|t|^{-1}\varepsilon^{1/2}(t^2+\varepsilon^2)^{-1/4} \leqslant |s|^{1/2}$, поэтому с учётом (1.46) и (1.47) левая часть в (1.137) не превосходит $2c_*^{-1/2}|s|^{1/2}$.

При $|t| \leqslant t^0$ и $|t| < \varepsilon^{1/3}|s|^{-1/3}$ в силу (1.119) с заменой s на $\varepsilon^{-1}s$ имеем

$$\begin{aligned}\left\|\mathcal{J}_2(t,\varepsilon^{-1}s)\right\|\varepsilon^{1/2}(t^2+\varepsilon^2)^{-1/4} &\leqslant (C_{18}+C_{20}\varepsilon^{-1}|s|t^2)\varepsilon^{1/2}(t^2+\varepsilon^2)^{-1/4}\\ &\leqslant C_{18}+C_{20}\varepsilon^{-1/2}|s||t|^{3/2} \leqslant C_{18}+C_{20}|s|^{1/2}.\end{aligned}$$

В итоге получаем оценку (1.137).

Докажем теперь оценку (1.138). При $|t| \geqslant \varepsilon^{1/2}/|s|^{1/4}$ выполнено $\varepsilon^2(t^2+\varepsilon^2)^{-1} \leqslant \varepsilon|s|^{1/2}$ поэтому левая часть в (1.138) не превосходит $2|s|^{1/2}\varepsilon$. Таким образом, достаточно считать, что $|t| < \varepsilon^{1/2}/|s|^{1/4}$. Воспользуемся неравенством (1.122) с заменой s на $\varepsilon^{-2}s$. Тогда при $|t| < \varepsilon^{1/2}/|s|^{1/4}$ получаем оценку

$$\begin{aligned}\left\|\mathcal{J}_3(t,\varepsilon^{-2}s)\right\|\varepsilon^2(t^2+\varepsilon^2)^{-1} &\leqslant \left(2C_1|t|+C_{23}\varepsilon^{-2}|s|t^4\right)\varepsilon^2(t^2+\varepsilon^2)^{-1}\\ &\leqslant C_1\varepsilon+C_{23}|s|t^2 \leqslant C_1\varepsilon+C_{23}|s|^{1/2}\varepsilon.\end{aligned}$$

В результате получаем оценку (1.138).

Наконец, докажем (1.139). Заметим, что при $|t| \geqslant \sqrt{\varepsilon}$ выполнено $\varepsilon^2(t^2+\varepsilon^2)^{-1} \leqslant \varepsilon$. Поэтому левая часть в (1.139) не превосходит 2ε. Таким образом, достаточно считать, что $|t| < \sqrt{\varepsilon}$. При условии $N = N_{11} = 0$ выполнено $\tau^3 N(\vartheta) = t^2\varepsilon N_{12} + t\varepsilon^2 N_{21} + \varepsilon^3 N_{22}$; см. (1.40). Воспользуемся теоремой 1.2.11 с заменой s на $\varepsilon^{-2}s$. Тогда при $|t| < \sqrt{\varepsilon}$ получаем оценку

$$\begin{aligned}&\left\|\mathcal{J}_4(t,\varepsilon,\varepsilon^{-2}s)\right\|\varepsilon^2(t^2+\varepsilon^2)^{-1}\\ &\leqslant \Big(2C_4(t^2+\varepsilon^2)^{1/2}+C_{26}\varepsilon^{-2}|s|(t^2+\varepsilon^2)^2+C_{27}\varepsilon^{-2}|s|(t^2\varepsilon+|t|\varepsilon^2+\varepsilon^3)\Big)\varepsilon^2(t^2+\varepsilon^2)^{-1}\\ &\leqslant \left(2C_4+C_{28}|s|\right)\varepsilon, \qquad 0<\varepsilon\leqslant 1.\end{aligned}$$

где $C_{27} = \max\{C_{1,2}, C_{2,1}, C_{2,2}\}$,

$$C_{28} = 2C_{26} + \frac{5}{2}C_{27}. \tag{1.140}$$

Отсюда вытекает (1.139). □

Аналогичным образом из теорем 1.2.7, 1.2.10 выводится следующий результат.

Теорема 1.2.14. *Пусть оператор N_0, определённый в (1.50), равен нулю: $N_0 = 0$. Тогда при $\varepsilon > 0$, $s \in \mathbb{R}$ и $|t| \leqslant t^{00}$ справедливы оценки*

$$\begin{aligned}\big\|\mathcal{J}_1(t, \varepsilon^{-1}s)\big\|\varepsilon^{3/2}(t^2+\varepsilon^2)^{-3/4} &\leqslant (C_{15} + C'_{16}|s|^{1/2})\varepsilon,\\ \big\|\mathcal{J}_2(t, \varepsilon^{-1}s)\big\|\varepsilon^{1/2}(t^2+\varepsilon^2)^{-1/4} &\leqslant C_{21} + C'_{22}|s|^{1/2},\\ \big\|\mathcal{J}_3(t, \varepsilon^{-2}s)\big\|\varepsilon^{2}(t^2+\varepsilon^2)^{-1} &\leqslant (C_{24} + C'_{25}|s|^{1/2})\varepsilon,\end{aligned} \tag{1.141}$$

где $C'_{16} = \max\{2; C_{16}\}$, $C'_{22} = \max\{2c_*^{-1/2}; C_{22}\}$ и $C'_{25} = \max\{2; C_{25}\}$.

Замечание 1.2.15. *Оценки (1.138) и (1.141) усиливают результаты теорем 4.2 и 4.3 из [57] в отношении зависимости оценок от s.*

Замечание 1.2.16. *Мы отследили, как зависят константы в оценках от параметров задачи. Постоянные C_1, C_2, C_8, C_{18}, C_{19} из теоремы 1.2.12; C'_{12}, C'_{20}, C'_{23} из теоремы 1.2.13 оцениваются полиномами с (абсолютными) положительными коэффициентами от переменных $\delta_{\mathfrak{a}}^{-1/2}$, $c_*^{-1/2}$, $\|X_1\|$. Константы C_{15}, C'_{16}, C_{21}, C'_{22}, C_{24}, C'_{25} из теоремы 1.2.14 оцениваются полиномами с положительными коэффициентами от тех же переменных, а также от $(c^\circ)^{-1}$ и n.*

Постоянные C_4, C'_4, C_5, C_{28} из оценок (1.135), (1.139) оцениваются полиномами с положительными коэффициентами от переменных (1.45).

1.3 Подтверждение точности результатов п. 1.2.8 для операторов $\cos(\varepsilon^{-1}sA(t)^{1/2})P$, $A(t)^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}sA(t)^{1/2})P$, $e^{-i\varepsilon^{-2}sA(t)}P$

1.3.1 Подтверждение точности результатов относительно сглаживающего множителя

Следующее утверждение подтверждает точность теоремы 1.2.12 для операторов $\mathcal{J}_j(t,s)$, $j = 1,2,3$, в общем случае.

Теорема 1.3.1. *Пусть операторы $\mathcal{J}_j(t,s)$, $j = 1,2,3$, определены в (1.114), (1.115), (1.120). Пусть $N_0 \neq 0$.*

а) *Пусть $s \neq 0$ и $0 \leqslant q_1 < 2$. Тогда не существует такой постоянной $C(s) > 0$, чтобы при всех достаточно малых $|t|$ и $\varepsilon > 0$ выполнялось*

$$\big\|\mathcal{J}_1(t,\varepsilon^{-1}s)\big\|\varepsilon^{q_1}(t^2+\varepsilon^2)^{-q_1/2} \leqslant C(s)\varepsilon. \tag{1.142}$$

б) *Пусть* $s \neq 0$ *и* $0 \leqslant q_2 < 1$. *Тогда не существует такой постоянной* $C(s) > 0$, *чтобы при всех достаточно малых* $|t|$ *и* $\varepsilon > 0$ *выполнялось*

$$\left\|\mathcal{J}_2(t, \varepsilon^{-1}s)\right\|\varepsilon^{q_2}(t^2+\varepsilon^2)^{-q_2/2} \leqslant C(s). \tag{1.143}$$

в) *Пусть* $s \neq 0$ *и* $0 \leqslant q_3 < 3$. *Тогда не существует такой постоянной* $C(s) > 0$, *чтобы при всех достаточно малых* $|t|$ *и* $\varepsilon > 0$ *выполнялось*

$$\left\|\mathcal{J}_3(t,\varepsilon^{-2}s)\right\|\varepsilon^{q_3}(t^2+\varepsilon^2)^{-q_3/2} \leqslant C(s)\varepsilon. \tag{1.144}$$

Доказательство. Проверим утверждение а). Достаточно считать, что $1 \leqslant q_1 < 2$. Поскольку $F(t)^\perp P = (P - F(t))P$, то из (1.27) вытекает оценка

$$\|\cos(\varepsilon^{-1}sA(t)^{1/2})F(t)^\perp P\|\varepsilon(t^2+\varepsilon^2)^{-1/2} \leqslant C_1|t|\varepsilon(t^2+\varepsilon^2)^{-1/2} \leqslant C_1\varepsilon, \quad |t| \leqslant t^0. \tag{1.145}$$

Далее, при $|t| \leqslant t^0$ имеем:

$$\cos(\varepsilon^{-1}sA(t)^{1/2})F(t) = \sum_{l=1}^{n} \cos\bigl(\varepsilon^{-1}s\sqrt{\lambda_l^{\mathfrak{a}}(t)}\bigr)(\cdot,\varphi_l^{\mathfrak{a}}(t))\varphi_l^{\mathfrak{a}}(t). \tag{1.146}$$

Из сходимости рядов (1.20) следует, что

$$\|\varphi_l^{\mathfrak{a}}(t) - \omega_l^{\mathfrak{a}}\| \leqslant \widetilde{c}_1|t|, \quad |t| \leqslant t_*, \qquad l = 1,\dots,n. \tag{1.147}$$

Будем рассуждать от противного. Предположим, что при некоторых $0 \neq s \in \mathbb{R}$ и $1 \leqslant q_1 < 2$ выполнено (1.142) при всех достаточно малых $|t|$ и ε. В силу (1.23) и (1.145)–(1.147) это равносильно существованию постоянной $\widetilde{C}(s) > 0$ такой, что при всех достаточно малых $|t|$ и ε выполнено

$$\left\|\sum_{l=1}^{n}\left(\cos\bigl(\varepsilon^{-1}s\sqrt{\lambda_l^{\mathfrak{a}}(t)}\bigr) - \cos\bigl(\varepsilon^{-1}s|t|\sqrt{\gamma_l^{\mathfrak{a}}}\bigr)\right)(\cdot,\omega_l^{\mathfrak{a}})\omega_l^{\mathfrak{a}}\right\|\varepsilon^{q_1}(t^2+\varepsilon^2)^{-q_1/2} \leqslant \widetilde{C}(s)\varepsilon. \tag{1.148}$$

Согласно (1.34), условие $N_0 \neq 0$ означает, что в разложениях (1.19) имеет место $\mu_j^{\mathfrak{a}} \neq 0$ хотя бы для одного j. Тогда $\lambda_j^{\mathfrak{a}}(t) = \gamma_j^{\mathfrak{a}}t^2 + \mu_j^{\mathfrak{a}}t^3 + \dots$, $|t| \leqslant t_*$. Используя формулу Тейлора для $\sqrt{1+x}$, $|x| < 1$, получаем, что для некоторого $0 < t_{**} \leqslant t_*$ сходится ряд

$$\sqrt{\lambda_j^{\mathfrak{a}}(t)} = \sqrt{\gamma_j^{\mathfrak{a}}}|t|\Bigl(1 + \frac{\mu_j^{\mathfrak{a}}}{2\gamma_j^{\mathfrak{a}}}t + \dots\Bigr), \qquad |t| \leqslant t_{**}. \tag{1.149}$$

Применим оператор под знаком нормы в (1.148) к элементу $\omega_j^{\mathfrak a}$. Тогда

$$\left|\cos\left(\varepsilon^{-1}s\sqrt{\lambda_j^{\mathfrak a}(t)}\right)-\cos\left(\varepsilon^{-1}s|t|\sqrt{\gamma_j^{\mathfrak a}}\right)\right|\varepsilon^{q_1}(t^2+\varepsilon^2)^{-q_1/2}\leqslant \widetilde{C}(s)\varepsilon \tag{1.150}$$

при всех достаточно малых $|t|$ и ε. Далее, положим

$$t=t(\varepsilon)=(2\pi)^{1/2}(\gamma_j^{\mathfrak a})^{1/4}|\mu_j^{\mathfrak a}s|^{-1/2}\varepsilon^{1/2}=c\varepsilon^{1/2}. \tag{1.151}$$

Тогда $\cos(\varepsilon^{-1}st(\varepsilon)\sqrt{\gamma_j^{\mathfrak a}})=\cos(\alpha_j\varepsilon^{-1/2})$, где

$$\alpha_j\coloneqq(\operatorname{sgn}s)(2\pi)^{1/2}(\gamma_j^{\mathfrak a})^{3/4}|s|^{1/2}|\mu_j^{\mathfrak a}|^{-1/2}.$$

Считая ε (а тогда и $t(\varepsilon)$) достаточно малым, с учётом (1.149) имеем $\varepsilon^{-1}s\sqrt{\lambda_j^{\mathfrak a}(t(\varepsilon))}=\alpha_j\varepsilon^{-1/2}+\pi\operatorname{sgn}(s\mu_j^{\mathfrak a})+O(\varepsilon^{1/2})$, а потому $\cos\left(\varepsilon^{-1}s\sqrt{\lambda_j^{\mathfrak a}(t(\varepsilon))}\right)=-\cos\left(\alpha_j\varepsilon^{-1/2}+O(\varepsilon^{1/2})\right)$. Таким образом, из (1.150) следует, что величина $\left|\cos\left(\alpha_j\varepsilon^{-1/2}+O(\varepsilon^{1/2})\right)+\cos\left(\alpha_j\varepsilon^{-1/2}\right)\right|\varepsilon^{q_1/2-1}(c^2+\varepsilon)^{-q_1/2}$ равномерно ограничена при малых $\varepsilon>0$. Но это не так, если $q_1<2$. (Достаточно рассмотреть последовательность $\varepsilon_k=\alpha_j^2(2\pi k)^{-2}$, $k\in\mathbb{N}$.) Полученное противоречие завершает доказательство утверждения a).

Докажем теперь утверждение б). В силу (1.27) и (1.46)

$$\left\|A(t)^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}sA(t)^{1/2})F(t)^{\perp}P\right\|\leqslant c_*^{-1/2}C_1,\qquad |t|\leqslant t^0. \tag{1.152}$$

Далее, при $|t|\leqslant t^0$ имеем:

$$A(t)^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}sA(t)^{1/2})F(t)=\sum_{l=1}^{n}\frac{\sin\left(\varepsilon^{-1}s\sqrt{\lambda_l^{\mathfrak a}(t)}\right)}{\sqrt{\lambda_l^{\mathfrak a}(t)}}(\cdot,\varphi_l^{\mathfrak a}(t))\varphi_l^{\mathfrak a}(t). \tag{1.153}$$

Предположим теперь, что при некоторых $s\neq 0$ и $0\leqslant q_2<1$ имеет место неравенство (1.143) при всех достаточно малых $|t|$ и ε. С учётом (1.23), (1.46), (1.147), (1.152) и (1.153) отсюда следует, что найдётся постоянная $\check{C}(s)$ такая, что при всех достаточно малых $|t|$ и ε выполнено

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{l=1}^{n}\left(\frac{\sin\left(\varepsilon^{-1}s\sqrt{\lambda_l^{\mathfrak a}(t)}\right)}{\sqrt{\lambda_l^{\mathfrak a}(t)}}-\frac{\sin\left(\varepsilon^{-1}s|t|\sqrt{\gamma_l^{\mathfrak a}}\right)}{|t|\sqrt{\gamma_l^{\mathfrak a}}}\right)(\cdot,\omega_l^{\mathfrak a})\omega_l^{\mathfrak a}\right\|\varepsilon^{q_2}(t^2+\varepsilon^2)^{-q_2/2}\\ \leqslant\check{C}(s).\end{aligned} \tag{1.154}$$

Применим оператор под знаком нормы в (1.154) к элементу $\omega_j^{\mathfrak a}$:

$$\left|\frac{\sin\left(\varepsilon^{-1}s\sqrt{\lambda_j^{\mathfrak a}(t)}\right)}{\sqrt{\lambda_j^{\mathfrak a}(t)}}-\frac{\sin\left(\varepsilon^{-1}s|t|\sqrt{\gamma_j^{\mathfrak a}}\right)}{|t|\sqrt{\gamma_j^{\mathfrak a}}}\right|\varepsilon^{q_2}(t^2+\varepsilon^2)^{-q_2/2}\leqslant\check{C}(s)$$

при всех достаточно малых $|t|$ и ε. Подставляя $t = t(\varepsilon) = c\varepsilon^{1/2}$ как в (1.151) и используя (1.149), убеждаемся, что величина

$$\left|\bigl(1 + O(\varepsilon^{1/2})\bigr)\sin\bigl(\alpha_j\varepsilon^{-1/2} + O(\varepsilon^{1/2})\bigr) + \sin\bigl(\alpha_j\varepsilon^{-1/2}\bigr)\right| \varepsilon^{(q_2-1)/2}(c^2+\varepsilon)^{-q_2/2}$$

равномерно ограничена при малых $\varepsilon > 0$. Но это не так, если $q_2 < 1$. (Достаточно рассмотреть последовательность $\varepsilon_k = \alpha_j^2(2\pi k + \pi/2)^{-2}$, $k \in \mathbb{N}$.) Полученное противоречие завершает доказательство утверждения б).

Утверждение в) было доказано в [57, теорема 4.4]. $\square$

Далее, подтвердим точность теорем 1.2.13 (для операторов $\mathcal{J}_j(t,s)$, $j = 1,2,3$) и 1.2.14.

Теорема 1.3.2. *Пусть* $N_0 = 0$ *и* $\mathcal{N}^{(q)} \neq 0$ *при некотором* $q \in \{1,\dots,p\}$.

а) *Пусть* $s \neq 0$ *и* $0 \leqslant q_1 < 3/2$. *Тогда не существует такой постоянной* $C(s) > 0$, *чтобы* (1.142) *выполнялось при всех достаточно малых* $|t|$ *и* $\varepsilon > 0$.

б) *Пусть* $s \neq 0$ *и* $0 \leqslant q_2 < 1/2$. *Тогда не существует такой постоянной* $C(s) > 0$, *чтобы* (1.143) *выполнялось при всех достаточно малых* $|t|$ *и* $\varepsilon > 0$.

в) *Пусть* $s \neq 0$ *и* $0 \leqslant q_3 < 2$. *Тогда не существует такой постоянной* $C(s) > 0$, *чтобы* (1.144) *выполнялось при всех достаточно малых* $|t|$ *и* $\varepsilon > 0$.

Доказательство. Условия $N_0 = 0$ и $\mathcal{N}^{(q)} \neq 0$ при некотором $q \in \{1,\dots,p\}$ означают, что $\mu_l^{\mathfrak{a}} = 0$ при $l = 1,\dots,n$, и хотя бы для одного j выполнено $\nu_j^{\mathfrak{a}} \neq 0$; см. замечание 1.1.13. Тогда

$$\lambda_j^{\mathfrak{a}}(t) = \gamma_j^{\mathfrak{a}}t^2 + \nu_j^{\mathfrak{a}}t^4 + \dots, \qquad |t| \leqslant t_*, \tag{1.155}$$

и, следовательно, для некоторого $0 < t_{**} \leqslant t_*$ сходится ряд

$$\sqrt{\lambda_j^{\mathfrak{a}}(t)} = \sqrt{\gamma_j^{\mathfrak{a}}}|t|\Bigl(1 + \frac{\nu_j^{\mathfrak{a}}}{2\gamma_j^{\mathfrak{a}}}t^2 + \dots\Bigr), \qquad |t| \leqslant t_{**}. \tag{1.156}$$

Докажем утверждение а). Рассуждая от противного аналогично доказательству теоремы 1.3.1, приходим к неравенству

$$\left|\cos\Bigl(\varepsilon^{-1}s\sqrt{\lambda_j^{\mathfrak{a}}(t)}\Bigr) - \cos\Bigl(\varepsilon^{-1}s|t|\sqrt{\gamma_j^{\mathfrak{a}}}\Bigr)\right|\varepsilon^{q_1}(t^2+\varepsilon^2)^{-q_1/2} \leqslant \widetilde{C}(s)\varepsilon \tag{1.157}$$

при всех достаточно малых $|t|$ и ε. Далее, положим

$$t = \tilde{t}(\varepsilon) = (2\pi)^{1/3}(\gamma_j^{\mathfrak{a}})^{1/6}|\nu_j^{\mathfrak{a}}s|^{-1/3}\varepsilon^{1/3} = \tilde{c}\varepsilon^{1/3}. \tag{1.158}$$

Тогда $\cos(\varepsilon^{-1}s\tilde{t}(\varepsilon)\sqrt{\gamma_j^{\mathfrak{a}}}) = \cos(\tilde{\alpha}_j\varepsilon^{-2/3})$, где $\tilde{\alpha}_j := (\operatorname{sgn} s)(2\pi)^{1/3}(\gamma_j^{\mathfrak{a}})^{2/3}|s|^{2/3}|\nu_j^{\mathfrak{a}}|^{-1/3}$. Считая ε (а тогда и $\tilde{t}(\varepsilon)$) достаточно малым, с учётом (1.156) имеем $\varepsilon^{-1}s\sqrt{\lambda_j^{\mathfrak{a}}(\tilde{t}(\varepsilon))} = \tilde{\alpha}_j\varepsilon^{-2/3} + \pi\operatorname{sgn}(s\nu_j^{\mathfrak{a}}) + O(\varepsilon^{1/3})$, а потому $\cos\left(\varepsilon^{-1}s\sqrt{\lambda_j^{\mathfrak{a}}(\tilde{t}(\varepsilon))}\right) = -\cos\left(\tilde{\alpha}_j\varepsilon^{-2/3} + O(\varepsilon^{1/3})\right)$. Таким образом, из (1.157) следует, что величина

$$\left|\cos\left(\tilde{\alpha}_j\varepsilon^{-2/3} + O(\varepsilon^{1/3})\right) + \cos\left(\tilde{\alpha}_j\varepsilon^{-2/3}\right)\right|\varepsilon^{2q_1/3-1}(\tilde{c}^2 + \varepsilon^{4/3})^{-q_1/2}$$

равномерно ограничена при малых $\varepsilon > 0$. Но это не так, если $q_1 < 3/2$. (Достаточно рассмотреть последовательность $\varepsilon_k = \tilde{\alpha}_j^{3/2}(2\pi k)^{-3/2}$, $k \in \mathbb{N}$.) Полученное противоречие завершает доказательство утверждения а).

Аналогично проверяется утверждение б). Рассуждая от противного, получаем, что выполнена оценка

$$\left|\frac{\sin\left(\varepsilon^{-1}s\sqrt{\lambda_j^{\mathfrak{a}}(t)}\right)}{\sqrt{\lambda_j^{\mathfrak{a}}(t)}} - \frac{\sin\left(\varepsilon^{-1}s|t|\sqrt{\gamma_j^{\mathfrak{a}}}\right)}{|t|\sqrt{\gamma_j^{\mathfrak{a}}}}\right|\varepsilon^{q_2}(t^2 + \varepsilon^2)^{-q_2/2} \leqslant \check{C}(s)$$

при всех достаточно малых $|t|$ и ε. Подставляя $t = \tilde{t}(\varepsilon) = \tilde{c}\varepsilon^{1/3}$ как в (1.158) и используя (1.156), убеждаемся, что величина

$$\left|\left(1 + O(\varepsilon^{2/3})\right)\sin\left(\tilde{\alpha}_j\varepsilon^{-2/3} + O(\varepsilon^{1/3})\right) + \sin\left(\tilde{\alpha}_j\varepsilon^{-2/3}\right)\right|\varepsilon^{(2q_2-1)/3}(\tilde{c}^2 + \varepsilon^{4/3})^{-q_2/2}$$

равномерно ограничена при малых $\varepsilon > 0$. Но это не так, если $q_2 < 1/2$. (Достаточно рассмотреть последовательность $\varepsilon_k = \tilde{\alpha}_j^{3/2}(2\pi k + \pi/2)^{-3/2}$, $k \in \mathbb{N}$.) Полученное противоречие завершает доказательство утверждения б).

Наконец, докажем утверждение в). Также рассуждая от противного, получаем, что выполнена оценка

$$\left|e^{-is\varepsilon^{-2}\lambda_j^{\mathfrak{a}}(t)} - e^{-is\varepsilon^{-2}t^2\gamma_j^{\mathfrak{a}}}\right|\varepsilon^{q_3}(t^2 + \varepsilon^2)^{-q_3/2} \leqslant \widetilde{C}(s)\varepsilon \tag{1.159}$$

при всех достаточно малых $|t|$ и ε. Левую часть (1.159) можно записать в виде

$$2\left|\sin\left(\frac{1}{2}s\varepsilon^{-2}(\lambda_j^{\mathfrak{a}}(t) - t^2\gamma_j^{\mathfrak{a}})\right)\right|\varepsilon^{q_3}(t^2 + \varepsilon^2)^{-q_3/2}.$$

Используя (1.155), будем считать, что t_* достаточно мало, так что

$$\frac{1}{2}|\nu_j^{\mathfrak{a}}|t^4 \leqslant |\lambda_j^{\mathfrak{a}}(t) - t^2\gamma_j^{\mathfrak{a}}| \leqslant \frac{3}{2}|\nu_j^{\mathfrak{a}}|t^4, \qquad |t| \leqslant t_*. \tag{1.160}$$

Далее, для фиксированного $s \neq 0$, предполагая, что ε достаточно мало (а именно, $\varepsilon \leqslant \pi^{-1/2}|\nu_j^{\mathfrak{a}} s|^{1/2} t_*^2$), положим $t = \check{t}(\varepsilon) = \pi^{1/4}|\nu_j^{\mathfrak{a}} s|^{-1/4}\varepsilon^{1/2} = \check{c}\varepsilon^{1/2}$. Тогда

$$2\left|\sin\left(\frac{1}{2}s\varepsilon^{-2}(\lambda_j^{\mathfrak{a}}(\check{t}(\varepsilon)) - \gamma_j^{\mathfrak{a}}\check{t}(\varepsilon)^2)\right)\right| \geqslant \sqrt{2},$$

поэтому из (1.159) следует, что $\sqrt{2}\varepsilon^{q_3}(\check{c}^2\varepsilon + \varepsilon^2)^{-q_3/2} \leqslant \widetilde{C}(s)\varepsilon$. Это означает, что функция $\varepsilon^{q_3/2-1}(\check{c}^2+\varepsilon)^{-q_3/2}$ равномерно ограничена при малых ε. Но это неверно, если $q_3 < 2$. Полученное противоречие завершает доказательство утверждения в). $\square$

1.3.2 Точность результатов относительно времени

Теперь мы подтвердим, что утверждения теоремы 1.2.12 для операторов $\mathcal{J}_j(t,s)$, $j = 1,2,3$, точны относительно зависимости от s (при большом $|s|$).

Теорема 1.3.3. *Пусть* $N_0 \neq 0$.

а) *Пусть* $q_1 \geqslant 2$. *Тогда не существует положительной функции* $C(s)$ *такой, что* $\lim_{s\to\infty} C(s)/|s| = 0$ *и выполнена оценка* (1.142) *при всех* $s \in \mathbb{R}$ *и достаточно малых* $|t|$ *и* ε.

б) *Пусть* $q_2 \geqslant 1$. *Тогда не существует положительной функции* $C(s)$ *такой, что* $\lim_{s\to\infty} C(s)/|s| = 0$ *и выполнена оценка* (1.143) *при всех* $s \in \mathbb{R}$ *и достаточно малых* $|t|$ *и* ε.

в) *Пусть* $q_3 \geqslant 3$. *Тогда не существует положительной функции* $C(s)$ *такой, что* $\lim_{s\to\infty} C(s)/|s| = 0$ *и выполнена оценка* (1.144) *при всех* $s \in \mathbb{R}$ *и достаточно малых* $|t|$ *и* ε.

Доказательство. Проверим утверждение а). Будем рассуждать от противного. Предположим, что при некотором $q_1 \geqslant 2$ существует положительная функция $C(s)$ такая, что $\lim_{s\to\infty} C(s)/|s| = 0$ и выполнена оценка (1.142) при всех $s \in \mathbb{R}$ и достаточно малых $|t|$ и ε. В силу (1.23) и (1.145)–(1.147) это равносильно существованию функции $\widetilde{C}(s) > 0$ такой, что $\lim_{s\to\infty} \widetilde{C}(s)/|s| = 0$ и выполнено

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{l=1}^{n}\left(\cos\left(\varepsilon^{-1}s\sqrt{\lambda_l^{\mathfrak{a}}(t)}\right) - \cos\left(\varepsilon^{-1}s|t|\sqrt{\gamma_l^{\mathfrak{a}}}\right)\right)(\cdot,\omega_l^{\mathfrak{a}})\omega_l^{\mathfrak{a}}\right\| \\ \times \varepsilon^{q_1}(t^2+\varepsilon^2)^{-q_1/2} \leqslant \widetilde{C}(s)\varepsilon\end{aligned} \tag{1.161}$$

при всех $s \in \mathbb{R}$ и достаточно малых $|t|$ и ε.

Согласно (1.34), условие $N_0 \neq 0$ означает, что хотя бы для одного j выполнено $\mu_j^{\mathfrak{a}} \neq 0$. Тогда справедливо разложение (1.149).

Применяя оператор под знаком нормы в (1.161) к элементу $\omega_j^{\mathfrak{a}}$, получаем

$$\left|\cos\left(\varepsilon^{-1}s\sqrt{\lambda_j^{\mathfrak{a}}(t)}\right) - \cos\left(\varepsilon^{-1}s|t|\sqrt{\gamma_j^{\mathfrak{a}}}\right)\right|\varepsilon^{q_1}(t^2+\varepsilon^2)^{-q_1/2} \leqslant \widetilde{C}(s)\varepsilon \tag{1.162}$$

при всех $s \in \mathbb{R}$ и достаточно малых $|t|$ и ε. Перепишем (1.162) в виде

$$\begin{aligned} 2\left|\sin\left(\frac{s}{2\varepsilon}\left(\sqrt{\lambda_j^{\mathfrak{a}}(t)} + |t|\sqrt{\gamma_j^{\mathfrak{a}}}\right)\right)\sin\left(\frac{s}{2\varepsilon}\left(\sqrt{\lambda_j^{\mathfrak{a}}(t)} - |t|\sqrt{\gamma_j^{\mathfrak{a}}}\right)\right)\right| \\ \times \frac{\varepsilon^{q_1}}{(t^2+\varepsilon^2)^{q_1/2}} \leqslant \widetilde{C}(s)\varepsilon. \end{aligned} \tag{1.163}$$

Используя (1.149), будем считать t_{**} настолько малым, что

$$\frac{1}{4}|\mu_j^{\mathfrak{a}}|(\gamma_j^{\mathfrak{a}})^{-1/2}t^2 \leqslant \left|\sqrt{\lambda_j^{\mathfrak{a}}(t)} - |t|\sqrt{\gamma_j^{\mathfrak{a}}}\right| \leqslant \frac{3}{4}|\mu_j^{\mathfrak{a}}|(\gamma_j^{\mathfrak{a}})^{-1/2}t^2, \qquad |t| \leqslant t_{**}. \tag{1.164}$$

Пусть $s \neq 0$, и пусть $\varepsilon \leqslant \varepsilon_*|s|$, $\varepsilon_* = (4\pi)^{-1}(\gamma_j^{\mathfrak{a}})^{-1/2}|\mu_j^{\mathfrak{a}}|t_{**}^2$. Положим

$$t_\flat = t_\flat(\varepsilon, s) = c_\flat|s|^{-1/2}\varepsilon^{1/2}, \quad c_\flat = \sqrt{\pi/2}(\gamma_j^{\mathfrak{a}})^{1/4}|\mu_j^{\mathfrak{a}}|^{-1/2}. \tag{1.165}$$

Тогда $t_\flat \leqslant t_{**}/2$ и в силу (1.164)

$$\left|\frac{s}{2\varepsilon}\left(\sqrt{\lambda_j^{\mathfrak{a}}(t_\flat)} - t_\flat\sqrt{\gamma_j^{\mathfrak{a}}}\right)\right| \leqslant \frac{3\pi}{16} < \frac{\pi}{4}. \tag{1.166}$$

Воспользуемся оценкой $|\sin y| \geqslant \frac{2}{\pi}|y|$ при $|y| \leqslant \pi/2$. Тогда с учётом (1.164)

$$\begin{aligned} \left|\sin\left(\frac{s}{2\varepsilon}\left(\sqrt{\lambda_j^{\mathfrak{a}}(t_\flat)} - t_\flat\sqrt{\gamma_j^{\mathfrak{a}}}\right)\right)\right| \geqslant \frac{|s|}{\pi\varepsilon}\left|\sqrt{\lambda_j^{\mathfrak{a}}(t_\flat)} - t_\flat\sqrt{\gamma_j^{\mathfrak{a}}}\right| \\ \geqslant \frac{|s|}{4\pi\varepsilon}|\mu_j^{\mathfrak{a}}|(\gamma_j^{\mathfrak{a}})^{-1/2}t_\flat^2 = \frac{1}{8}. \end{aligned} \tag{1.167}$$

Теперь из (1.163) и (1.167) вытекает оценка

$$\frac{1}{4}\left|\sin\left(\frac{s}{2\varepsilon}\left(\sqrt{\lambda_j^{\mathfrak{a}}(t_\flat)} + t_\flat\sqrt{\gamma_j^{\mathfrak{a}}}\right)\right)\right|\varepsilon^{q_1}(t_\flat^2+\varepsilon^2)^{-q_1/2} \leqslant \widetilde{C}(s)\varepsilon,$$

что равносильно неравенству

$$\frac{1}{4}\left|\sin\left(\frac{s}{2\varepsilon}\left(\sqrt{\lambda_j^{\mathfrak{a}}(t_\flat)} + t_\flat\sqrt{\gamma_j^{\mathfrak{a}}}\right)\right)\right|(\varepsilon|s|)^{q_1/2-1}(c_\flat^2+\varepsilon|s|)^{-q_1/2} \leqslant \frac{\widetilde{C}(s)}{|s|}. \tag{1.168}$$

В силу (1.166) аргумент синуса в (1.168) отличается от $\varepsilon^{-1}st_\flat\sqrt{\gamma_j^{\mathfrak{a}}} = (\operatorname{sgn} s)\sqrt{\gamma_j^{\mathfrak{a}}}c_\flat|s|^{1/2}\varepsilon^{-1/2}$ не более, чем на $\pi/4$. Положим $\varepsilon_k = \gamma_j^{\mathfrak{a}}c_\flat^2|s|(2\pi k+\pi/2)^{-2}$, считая $k \in \mathbb{N}$ достаточно большим, так что $\varepsilon_k \leqslant \varepsilon_*|s|$. Пусть $t_k = t_\flat(\varepsilon_k,s)$. Тогда $\varepsilon_k^{-1} s t_k \sqrt{\gamma_j^{\mathfrak{a}}} = (\operatorname{sgn} s)(2\pi k + \pi/2)$, а потому

$$\left|\sin\left(\frac{s}{2\varepsilon_k}\left(\sqrt{\lambda_j^{\mathfrak{a}}(t_k)} + t_k\sqrt{\gamma_j^{\mathfrak{a}}}\right)\right)\right| \geqslant 1/\sqrt{2}.$$

Теперь из (1.168) при $\varepsilon = \varepsilon_k$ вытекает неравенство

$$\frac{1}{4\sqrt{2}c_\flat^2}\left(\frac{\gamma_j^{\mathfrak{a}} s^2}{(2\pi k + \pi/2)^2}\right)^{q_1/2-1}\left(1 + \frac{\gamma_j^{\mathfrak{a}} s^2}{(2\pi k + \pi/2)^2}\right)^{-q_1/2} \leqslant \frac{\widetilde{C}(s)}{|s|}$$

при всех достаточно больших k. По нашему предположению правая часть стремится к нулю при $s \to \infty$. Полагая $s = s_k = 2\pi k + \pi/2$ и устремляя k к бесконечности, приходим к противоречию.

Утверждение б) проверяется аналогично. Рассуждаем от противного. Пусть при каком-либо $q_2 \geqslant 1$ существует положительная функция $C(s)$ такая, что $\lim_{s\to\infty} C(s)/|s| = 0$ и выполнена оценка (1.143) при всех $s \in \mathbb{R}$ и достаточно малых $|t|$ и ε. Отсюда аналогично выводу неравенства (1.162), получаем, что

$$\left|\frac{\sin\left(\varepsilon^{-1}s\sqrt{\lambda_j^{\mathfrak{a}}(t)}\right)}{\sqrt{\lambda_j^{\mathfrak{a}}(t)}} - \frac{\sin\left(\varepsilon^{-1}s|t|\sqrt{\gamma_j^{\mathfrak{a}}}\right)}{|t|\sqrt{\gamma_j^{\mathfrak{a}}}}\right| \varepsilon^{q_2}(t^2+\varepsilon^2)^{-q_2/2} \leqslant \widetilde{C}(s), \tag{1.169}$$

причём $\lim_{s\to\infty}\widetilde{C}(s)/|s| = 0$. В силу (1.149) величина $|(\lambda_j^{\mathfrak{a}}(t))^{-1/2} - |t|^{-1}(\gamma_j^{\mathfrak{a}})^{-1/2}|$ равномерна ограничена при $|t| \leqslant t_{**}$. Поэтому из (1.169) вытекает оценка

$$\left|\sin\left(\varepsilon^{-1}s\sqrt{\lambda_j^{\mathfrak{a}}(t)}\right) - \sin\left(\varepsilon^{-1}s|t|\sqrt{\gamma_j^{\mathfrak{a}}}\right)\right| |t|^{-1}\varepsilon^{q_2}(t^2+\varepsilon^2)^{-q_2/2} \leqslant \widehat{C}(s), \tag{1.170}$$

причём $\lim_{s\to\infty}\widehat{C}(s)/|s| = 0$. Перепишем (1.170) в виде

$$\begin{aligned} 2\left|\cos\left(\frac{s}{2\varepsilon}\left(\sqrt{\lambda_j^{\mathfrak{a}}(t)} + |t|\sqrt{\gamma_j^{\mathfrak{a}}}\right)\right)\sin\left(\frac{s}{2\varepsilon}\left(\sqrt{\lambda_j^{\mathfrak{a}}(t)} - |t|\sqrt{\gamma_j^{\mathfrak{a}}}\right)\right)\right| \\ \times \frac{\varepsilon^{q_2}}{|t|(t^2+\varepsilon^2)^{q_2/2}} \leqslant \widehat{C}(s). \end{aligned} \tag{1.171}$$

Как прежде, считаем, что выполнено (1.164) и $\varepsilon \leqslant \varepsilon_*|s|$. Пусть $t_\flat$ определено в (1.165). Тогда выполнено (1.167). В итоге из (1.171) вытекает неравенство

$$\frac{1}{4}\left|\cos\left(\frac{s}{2\varepsilon}\left(\sqrt{\lambda_j^{\mathfrak{a}}(t_\flat)} + t_\flat\sqrt{\gamma_j^{\mathfrak{a}}}\right)\right)\right| t_\flat^{-1}\varepsilon^{q_2}(t_\flat^2+\varepsilon^2)^{-q_2/2} \leqslant \widehat{C}(s),$$

что равносильно неравенству

$$\frac{1}{4}\left|\cos\left(\frac{s}{2\varepsilon}\left(\sqrt{\lambda_j^{\mathfrak{a}}(t_\flat)}+t_\flat\sqrt{\gamma_j^{\mathfrak{a}}}\right)\right)\right|\frac{(\varepsilon|s|)^{(q_2-1)/2}}{c_\flat(c_\flat^2+\varepsilon|s|)^{q_2/2}}\leqslant\frac{\widehat{C}(s)}{|s|}. \tag{1.172}$$

В силу (1.166) аргумент косинуса в (1.172) отличается от $\varepsilon^{-1}st_\flat\sqrt{\gamma_j^{\mathfrak{a}}} = (\operatorname{sgn} s)\sqrt{\gamma_j^{\mathfrak{a}}}c_\flat|s|^{1/2}\varepsilon^{-1/2}$ не более, чем на $\pi/4$. Положим $\tilde{\varepsilon}_k=\gamma_j^{\mathfrak{a}}c_\flat^2|s|(2\pi k)^{-2}$, считая $k\in\mathbb{N}$ достаточно большим, так что $\tilde{\varepsilon}_k\leqslant\varepsilon_*|s|$. Пусть $\tilde{t}_k=t_\flat(\varepsilon_k,s)$. Тогда $\tilde{\varepsilon}_k^{-1}s\tilde{t}_k\sqrt{\gamma_j^{\mathfrak{a}}}=(\operatorname{sgn} s)2\pi k$. Поэтому

$$\left|\cos\left(\frac{s}{2\tilde{\varepsilon}_k}\left(\sqrt{\lambda_j^{\mathfrak{a}}(\tilde{t}_k)}+\tilde{t}_k\sqrt{\gamma_j^{\mathfrak{a}}}\right)\right)\right|\geqslant 1/\sqrt{2}.$$

Теперь из (1.172) при $\varepsilon=\tilde{\varepsilon}_k$ вытекает неравенство

$$\frac{1}{4\sqrt{2}c_\flat^2}\left(\frac{\gamma_j^{\mathfrak{a}}s^2}{(2\pi k)^2}\right)^{(q_2-1)/2}\left(1+\frac{\gamma_j^{\mathfrak{a}}s^2}{(2\pi k)^2}\right)^{-q_2/2}\leqslant\frac{\widehat{C}(s)}{|s|}$$

при всех достаточно больших k. По нашему предположению правая часть стремится к нулю при $s\to\infty$. Полагая $s=\tilde{s}_k=2\pi k$ и устремляя k к бесконечности, приходим к противоречию.

Наконец, докажем утверждение в). Аналогично, рассуждая от противного, получаем, что при каком-то $q_3\geqslant 3$ существует положительная функция $\widetilde{C}(s)$ такая, что $\lim_{s\to\infty}\widetilde{C}(s)/|s|=0$ и выполнена оценка

$$2\left|\sin\left(\frac{1}{2}s\varepsilon^{-2}(\lambda_j^{\mathfrak{a}}(t)-\gamma_j^{\mathfrak{a}}t^2)\right)\right|\varepsilon^{q_3}(t^2+\varepsilon^2)^{-q_3/2}\leqslant\widetilde{C}(s)\varepsilon \tag{1.173}$$

при всех достаточно малых $|t|$ и ε.

Предположим, что t_* настолько мало, что

$$\frac{1}{2}|\mu_j^{\mathfrak{a}}||t|^3\leqslant|\lambda_j^{\mathfrak{a}}(t)-\gamma_j^{\mathfrak{a}}t^2|\leqslant\frac{3}{2}|\mu_j^{\mathfrak{a}}||t|^3,\qquad |t|\leqslant t_*. \tag{1.174}$$

Пусть $s\neq 0$ и $\varepsilon\leqslant\varepsilon_\flat|s|^{1/2}$, где $\varepsilon_\flat=(2\pi)^{-1/2}|\mu_j^{\mathfrak{a}}|^{1/2}t_*^{3/2}$. Положим

$$t_\flat=t_\flat(\varepsilon,s)=c_\flat|s|^{-1/3}\varepsilon^{2/3},\quad c_\flat=\left(\frac{\pi}{4}\right)^{1/3}|\mu_j^{\mathfrak{a}}|^{-1/3}. \tag{1.175}$$

Тогда $t_\flat\leqslant t_*/2$ и, в силу (1.174), $\left|\frac{s}{2\varepsilon^2}(\lambda_j^{\mathfrak{a}}(t_\flat)-\gamma_j^{\mathfrak{a}}t_\flat^2)\right|\leqslant\frac{3\pi}{16}<\frac{\pi}{4}$. Применяя оценку $|\sin y|\geqslant\frac{2}{\pi}|y|$ при $|y|\leqslant\pi/2$ и используя нижнюю оценку (1.174), получаем

$$\left|\sin\left(\frac{1}{2}s\varepsilon^{-2}(\lambda_j^{\mathfrak{a}}(t_\flat)-\gamma_j^{\mathfrak{a}}t_\flat^2)\right)\right|\geqslant\frac{|s|}{\pi\varepsilon^2}\left|\lambda_j^{\mathfrak{a}}(t_\flat)-\gamma_j^{\mathfrak{a}}t_\flat^2\right|\geqslant\frac{|s||\mu_j^{\mathfrak{a}}|}{2\pi\varepsilon^2}t_\flat^3=\frac{1}{8}.$$

С учётом (1.173) отсюда следует $\frac{1}{4}\varepsilon^{q_3}(t_\flat^2+\varepsilon^2)^{-q_3/2} \leqslant \widetilde{C}(s)\varepsilon$ при всех достаточно малых ε. В силу (1.175) это влечёт

$$\frac{1}{4}\frac{(\varepsilon|s|)^{q_3/3-1}}{(c_\flat^2+(\varepsilon|s|)^{2/3})^{q_3/2}} \leqslant \frac{\widetilde{C}(s)}{|s|} \tag{1.176}$$

при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$. Но оценка (1.176) не может быть выполнена при больших $|s|$ и $\varepsilon = |s|^{-1}$ так как $\lim_{s\to\infty}\widetilde{C}(s)/|s| = 0$. Полученное противоречие завершает доказательство. □

Далее, подтвердим точность теорем 1.2.13 (в отношении $\mathcal{J}_j(t,s)$, $j = 1,2,3$) и 1.2.14 относительно зависимости от s.

Теорема 1.3.4. *Пусть $N_0 = 0$ и $\mathcal{N}^{(q)} \neq 0$ при некотором $q \in \{1,\dots,p\}$.*

а) *Пусть $q_1 \geqslant 3/2$. Тогда не существует положительной функции $C(s)$ такой, что $\lim_{s\to\infty} C(s)/|s|^{1/2} = 0$ и выполнена оценка (1.142) при всех $s \in \mathbb{R}$ и достаточно малых $|t|$ и ε.*

б) *Пусть $q_2 \geqslant 1/2$. Тогда не существует положительной функции $C(s)$ такой, что $\lim_{s\to\infty} C(s)/|s|^{1/2} = 0$ и выполнена оценка (1.143) при всех $s \in \mathbb{R}$ достаточно малых $|t|$ и ε.*

в) *Пусть $q_3 \geqslant 2$. Тогда не существует положительной функции $C(s)$ такой, что $\lim_{s\to\infty} C(s)/|s|^{1/2} = 0$ и выполнена оценка (1.144) при всех $s \in \mathbb{R}$ достаточно малых $|t|$ и ε.*

Доказательство. Условия $N_0 = 0$ и $\mathcal{N}^{(q)} \neq 0$ при некотором $q \in \{1,\dots,p\}$ означают, что $\mu_l^{\mathfrak{a}} = 0$ при $l = 1,\dots,n$, и хотя бы для одного j выполнено $\nu_j^{\mathfrak{a}} \neq 0$; см. замечание 1.1.13. Тогда справедливо разложение (1.156).

Проверим утверждение а). Рассуждая от противного, аналогично доказательству теоремы 1.3.2, приходим к неравенству

$$\left|\cos\Big(\varepsilon^{-1}s\sqrt{\lambda_j^{\mathfrak{a}}(t)}\Big) - \cos\Big(\varepsilon^{-1}s|t|\sqrt{\gamma_j^{\mathfrak{a}}}\Big)\right| \varepsilon^{q_1}(t^2+\varepsilon^2)^{-q_1/2} \leqslant \widetilde{C}(s)\varepsilon \tag{1.177}$$

при некотором $q_1 \geqslant 3/2$, причём $\lim_{s\to\infty}\widetilde{C}(s)/|s|^{1/2} = 0$. Перепишем (1.177):

$$\begin{aligned} 2\left|\sin\Big(\frac{s}{2\varepsilon}\Big(\sqrt{\lambda_j^{\mathfrak{a}}(t)} + |t|\sqrt{\gamma_j^{\mathfrak{a}}}\Big)\Big)\sin\Big(\frac{s}{2\varepsilon}\Big(\sqrt{\lambda_j^{\mathfrak{a}}(t)} - |t|\sqrt{\gamma_j^{\mathfrak{a}}}\Big)\Big)\right| \\ \times\frac{\varepsilon^{q_1}}{(t^2+\varepsilon^2)^{q_1/2}} \leqslant \widetilde{C}(s)\varepsilon. \end{aligned} \tag{1.178}$$

Используя (1.156), будем считать t_{**} настолько малым, что

$$\frac{1}{4}|\nu_j^{\mathfrak{a}}|(\gamma_j^{\mathfrak{a}})^{-1/2}|t|^3 \leqslant \left|\sqrt{\lambda_j^{\mathfrak{a}}(t)} - |t|\sqrt{\gamma_j^{\mathfrak{a}}}\right| \leqslant \frac{3}{4}|\nu_j^{\mathfrak{a}}|(\gamma_j^{\mathfrak{a}})^{-1/2}|t|^3, \qquad |t| \leqslant t_{**}. \tag{1.179}$$

Пусть $s \neq 0$, и пусть $\varepsilon \leqslant \varepsilon_\dagger |s|$, $\varepsilon_\dagger = (4\pi)^{-1}(\gamma_j^{\mathfrak{a}})^{-1/2}|\nu_j^{\mathfrak{a}}| t_{**}^3$. Положим

$$t_\dagger = t_\dagger(\varepsilon, s) = c_\dagger |s|^{-1/3}\varepsilon^{1/3}, \qquad c_\dagger = (\pi/2)^{1/3}(\gamma_j^{\mathfrak{a}})^{1/6}|\nu_j^{\mathfrak{a}}|^{-1/3}. \tag{1.180}$$

Тогда $t_\dagger \leqslant t_{**}/2$ и в силу (1.179)

$$\left|\frac{s}{2\varepsilon}\Big(\sqrt{\lambda_j^{\mathfrak{a}}(t_\dagger)} - t_\dagger\sqrt{\gamma_j^{\mathfrak{a}}}\Big)\right| \leqslant \frac{3\pi}{16} < \frac{\pi}{4}. \tag{1.181}$$

Воспользуемся оценкой $|\sin y| \geqslant \frac{2}{\pi}|y|$ при $|y| \leqslant \pi/2$. Тогда с учётом (1.179)

$$\begin{aligned}\left|\sin\left(\frac{s}{2\varepsilon}\Big(\sqrt{\lambda_j^{\mathfrak{a}}(t_\dagger)} - t_\dagger\sqrt{\gamma_j^{\mathfrak{a}}}\Big)\right)\right| &\geqslant \frac{|s|}{\pi\varepsilon}\left|\sqrt{\lambda_j^{\mathfrak{a}}(t_\dagger)} - t_\dagger\sqrt{\gamma_j^{\mathfrak{a}}}\right| \\ &\geqslant \frac{|s|}{4\pi\varepsilon}|\nu_j^{\mathfrak{a}}|(\gamma_j^{\mathfrak{a}})^{-1/2}t_\dagger^3 = \frac{1}{8}.\end{aligned} \tag{1.182}$$

Теперь из (1.178) и (1.182) вытекает оценка

$$\frac{1}{4}\left|\sin\left(\frac{s}{2\varepsilon}\Big(\sqrt{\lambda_j^{\mathfrak{a}}(t_\dagger)} + t_\dagger\sqrt{\gamma_j^{\mathfrak{a}}}\Big)\right)\right| \varepsilon^{q_1}(t_\dagger^2 + \varepsilon^2)^{-q_1/2} \leqslant \widetilde{C}(s)\varepsilon,$$

что равносильно неравенству

$$\frac{1}{4}\left|\sin\left(\frac{s}{2\varepsilon}\Big(\sqrt{\lambda_j^{\mathfrak{a}}(t_\dagger)} + t_\dagger\sqrt{\gamma_j^{\mathfrak{a}}}\Big)\right)\right| \frac{(\varepsilon|s|^{1/2})^{2q_1/3-1}}{(c_\dagger^2 + \varepsilon^{4/3}|s|^{2/3})^{q_1/2}} \leqslant \frac{\widetilde{C}(s)}{|s|^{1/2}}. \tag{1.183}$$

В силу (1.181) аргумент синуса в (1.183) отличается от $\varepsilon^{-1}st_\dagger\sqrt{\gamma_j^{\mathfrak{a}}} = (\operatorname{sgn} s)\sqrt{\gamma_j^{\mathfrak{a}}}c_\dagger|s|^{2/3}\varepsilon^{-2/3}$ не более, чем на $\pi/4$. Положим $\hat{\varepsilon}_k = \frac{(\gamma_j^{\mathfrak{a}})^{3/4}c_\dagger^{3/2}|s|}{(2\pi k+\pi/2)^{3/2}}$, считая $k \in \mathbb{N}$ достаточно большим, так что $\hat{\varepsilon}_k \leqslant \varepsilon_\dagger|s|$. Пусть $\hat{t}_k = t_\dagger(\hat{\varepsilon}_k, s)$. Тогда $\hat{\varepsilon}_k^{-1}s\hat{t}_k\sqrt{\gamma_j^{\mathfrak{a}}} = (\operatorname{sgn} s)(2\pi k + \pi/2)$, а потому

$$\left|\sin\left(\frac{s}{2\hat{\varepsilon}_k}\Big(\sqrt{\lambda_j^{\mathfrak{a}}(\hat{t}_k)} + \hat{t}_k\sqrt{\gamma_j^{\mathfrak{a}}}\Big)\right)\right| \geqslant 1/\sqrt{2}.$$

Теперь из (1.183) при $\varepsilon = \hat{\varepsilon}_k$ вытекает неравенство

$$\frac{1}{4\sqrt{2}c_\dagger^{3/2}}\left(\frac{\gamma_j^{\mathfrak{a}}s^2}{(2\pi k + \pi/2)^2}\right)^{q_1/2-3/4}\left(1 + \frac{\gamma_j^{\mathfrak{a}}s^2}{(2\pi k + \pi/2)^2}\right)^{-q_1/2} \leqslant \frac{\widetilde{C}(s)}{|s|^{1/2}}$$

при всех достаточно больших k. По предположению правая часть стремится к нулю при $s \to \infty$. Полагая $s = s_k = 2\pi k + \pi/2$ и устремляя k к бесконечности, приходим к противоречию.

Утверждение б) проверяется аналогично. Рассуждая от противного, при некотором $q_2 \geqslant 1/2$ получаем неравенство

$$\left| \frac{\sin\left(\varepsilon^{-1}s\sqrt{\lambda_j^{\mathfrak{a}}(t)}\right)}{\sqrt{\lambda_j^{\mathfrak{a}}(t)}} - \frac{\sin\left(\varepsilon^{-1}s|t|\sqrt{\gamma_j^{\mathfrak{a}}}\right)}{|t|\sqrt{\gamma_j^{\mathfrak{a}}}} \right| \varepsilon^{q_2}(t^2+\varepsilon^2)^{-q_2/2} \leqslant \widetilde{C}(s), \qquad (1.184)$$

причём $\lim_{s\to\infty} \widetilde{C}(s)/|s|^{1/2} = 0$. В силу (1.156) величина $\left|\lambda_j^{\mathfrak{a}}(t)^{-1/2} - |t|^{-1}(\gamma_j^{\mathfrak{a}})^{-1/2}\right|$ равномерно ограничена при $|t| \leqslant t_{**}$, а потому из (1.184) вытекает оценка

$$\left|\sin\left(\varepsilon^{-1}s\sqrt{\lambda_j^{\mathfrak{a}}(t)}\right) - \sin\left(\varepsilon^{-1}s|t|\sqrt{\gamma_j^{\mathfrak{a}}}\right)\right| |t|^{-1}\varepsilon^{q_2}(t^2+\varepsilon^2)^{-q_2/2} \leqslant \widehat{C}(s),$$

причём $\lim_{s\to\infty} \widehat{C}(s)/|s|^{1/2} = 0$. Аналогично доказательству утверждения а), считая $\varepsilon \leqslant \varepsilon_\dagger |s|$ и подставляя $t = t_\dagger$ (см. (1.180)), приходим к неравенству

$$\frac{1}{4}\left|\cos\left(\frac{s}{2\varepsilon}\left(\sqrt{\lambda_j^{\mathfrak{a}}(t_\dagger)} + t_\dagger\sqrt{\gamma_j^{\mathfrak{a}}}\right)\right)\right| t_\dagger^{-1}\varepsilon^{q_2}(t_\dagger^2+\varepsilon^2)^{-q_2/2} \leqslant \widehat{C}(s),$$

что равносильно

$$\begin{aligned} &\frac{1}{4c_\dagger}\left|\cos\left(\frac{s}{2\varepsilon}\left(\sqrt{\lambda_j^{\mathfrak{a}}(t_\dagger)} + t_\dagger\sqrt{\gamma_j^{\mathfrak{a}}}\right)\right)\right| \\ &\qquad\qquad \times (\varepsilon|s|^{1/2})^{(2q_2-1)/3}(c_\dagger^2 + \varepsilon^{4/3}|s|^{2/3})^{-q_2/2} \leqslant \frac{\widehat{C}(s)}{|s|^{1/2}}. \end{aligned} \qquad (1.185)$$

В силу (1.181) аргумент косинуса в (1.185) отличается от $\varepsilon^{-1}st_\dagger\sqrt{\gamma_j^{\mathfrak{a}}} = (\operatorname{sgn} s)\sqrt{\gamma_j^{\mathfrak{a}}}c_\dagger|s|^{2/3}\varepsilon^{-2/3}$ не более, чем на $\pi/4$. Положим $\check{\varepsilon}_k = (\gamma_j^{\mathfrak{a}})^{3/4}c_\dagger^{3/2}|s|(2\pi k)^{-3/2}$, считая $k \in \mathbb{N}$ достаточно большим. Пусть $\check{t}_k = t_\dagger(\check{\varepsilon}_k, s)$. Тогда $\check{\varepsilon}_k^{-1}s\check{t}_k\sqrt{\gamma_j^{\mathfrak{a}}} = (\operatorname{sgn} s)2\pi k$, а потому

$$\left|\cos\left(\frac{s}{2\check{\varepsilon}_k}\left(\sqrt{\lambda_j^{\mathfrak{a}}(\check{t}_k)} + \check{t}_k\sqrt{\gamma_j^{\mathfrak{a}}}\right)\right)\right| \geqslant 1/\sqrt{2}.$$

Теперь из (1.185) при $\varepsilon = \check{\varepsilon}_k$ вытекает неравенство

$$\frac{1}{4\sqrt{2}c_\dagger^{3/2}}\left(\frac{\gamma_j^{\mathfrak{a}}s^2}{(2\pi k)^2}\right)^{q_2/2-1/4}\left(1 + \frac{\gamma_j^{\mathfrak{a}}s^2}{(2\pi k)^2}\right)^{-q_2/2} \leqslant \frac{\widehat{C}(s)}{|s|^{1/2}}$$

при всех достаточно больших k. По предположению правая часть стремится к нулю при $s \to \infty$. Полагая $s = \tilde{s}_k = 2\pi k$ и устремляя k к бесконечности, приходим к противоречию.

Остаётся доказать утверждение в). Аналогично, рассуждая от противного, заключаем, что существует положительная функция $\widetilde{C}(s)$ такая, что $\lim_{s\to\infty}\widetilde{C}(s)/|s|^{1/2}=0$ и выполнено (1.173) при всех достаточно малых $|t|$ и ε.

Пусть $s\neq 0$, и пусть $\varepsilon\leqslant\varepsilon_\wedge|s|^{1/2}$, где $\varepsilon_\wedge=\frac{1}{2}\pi^{-1/2}|\nu_j^{\mathfrak{a}}|^{1/2}t_*^2$. Положим

$$t_\wedge=t_\wedge(\varepsilon,s)=c_\wedge|s|^{-1/4}\varepsilon^{1/2},\quad c_\wedge=\left(\frac{\pi}{4}\right)^{1/4}|\nu_j^{\mathfrak{a}}|^{-1/4}. \tag{1.186}$$

Тогда $t_\wedge\leqslant t_*/2$ и, согласно (1.160), $\left|\frac{s}{2\varepsilon^2}(\lambda_j^{\mathfrak{a}}(t_\wedge)-\gamma_j^{\mathfrak{a}}t_\wedge^2)\right|\leqslant\frac{3\pi}{16}<\frac{\pi}{4}$. Применяя неравенство $|\sin y|\geqslant\frac{2}{\pi}|y|$ при $|y|\leqslant\pi/2$ и используя нижнюю оценку (1.160), получаем

$$\left|\sin\left(\frac{1}{2}s\varepsilon^{-2}(\lambda_j^{\mathfrak{a}}(t_\wedge)-\gamma_j^{\mathfrak{a}}t_\wedge^2)\right)\right|\geqslant\frac{|s|}{\pi\varepsilon^2}\left|\lambda_j^{\mathfrak{a}}(t_\wedge)-\gamma_j^{\mathfrak{a}}t_\wedge^2\right|\geqslant\frac{|s||\nu_j^{\mathfrak{a}}|}{2\pi\varepsilon^2}t_\wedge^4=\frac{1}{8}.$$

Отсюда и из (1.173) следует, что $\frac{1}{4}\varepsilon^{q_3}(t_\wedge^2+\varepsilon^2)^{-q_3/2}\leqslant\widetilde{C}(s)\varepsilon$ при всех достаточно малых ε. В силу (1.186), это эквивалентно

$$\frac{1}{4}\frac{(\varepsilon|s|^{1/2})^{q_3/2-1}}{(c_\wedge^2+\varepsilon|s|^{1/2})^{q_3/2}}\leqslant\frac{\widetilde{C}(s)}{|s|^{1/2}} \tag{1.187}$$

при всех достаточно малых $\varepsilon>0$. Но оценка (1.187) не может выполняться при больших $|s|$ и $\varepsilon=|s|^{-1/2}$ так как $\lim_{s\to\infty}\widetilde{C}(s)/|s|^{1/2}=0$. Полученное противоречие завершает доказательство. $\square$

1.4 Подтверждение точности результата теоремы 1.2.12 для оператора $e^{-i\varepsilon^{-2}s\mathfrak{B}(t,\varepsilon)}P$ относительно сглаживающего множителя

1.4.1 Параметр $\varkappa$

Рассмотрим операторный пучок (1.8) при наличии связи между параметрами $t=c\varepsilon^{2/3}$, $c>0$. Введём параметр $\varkappa=\varepsilon^{1/3}$. Оператор $\mathfrak{B}(t,\varepsilon)$ будем обозначать $\mathfrak{B}(\varkappa)$. Формальная структура оператора $\mathfrak{B}(\varkappa)$ такова:

$$\begin{aligned}\mathfrak{B}(\varkappa)=X_0^*X_0+c\varkappa^2(X_0^*X_1+X_1^*X_0)+c^2\varkappa^4X_1^*X_1+\varkappa^3(Y_2^*Y_0+Y_0^*Y_2)\\+c\varkappa^5(Y_2^*Y_1+Y_1^*Y_2)+\varkappa^6(Q+\lambda Q_0).\end{aligned}$$

Заметим, что согласно своему определению параметр $\varkappa$ неотрицателен, но оператор $\mathfrak{B}(\varkappa)$ можно рассматривать при всех $\varkappa \in \mathbb{R}$, что и подразумевается ниже. Выберем число $\varkappa_0 = \varkappa_0(c) > 0$, так что

$$\sqrt{c^2\varkappa_0^4 + \varkappa_0^6} < \tau^0.$$

Тогда согласно общей аналитической теории возмущений при $|\varkappa| \leqslant \varkappa_0$ существуют вещественно аналитические функции $\lambda_l(\varkappa)$ (ветви собственных значений) и вещественно аналитические $\mathfrak{H}$-значные функции $\varphi_l(\varkappa)$ (ветви собственных векторов), такие что

$$\mathfrak{B}(\varkappa)\varphi_l(\varkappa) = \lambda_l(\varkappa)\varphi_l(\varkappa), \quad |\varkappa| \leqslant \varkappa_0, \quad l = 1, \dots, n, \tag{1.188}$$

причём $\varphi_l(\varkappa)$, $l = 1, \dots, n$, образуют ортонормированный базис в $F(\varkappa)\mathfrak{H}$. Здесь мы обозначили через $F(\varkappa)$ спектральный проектор оператора $\mathfrak{B}(\varkappa)$ для интервала $[0, \delta]$. Для достаточно малого $\varkappa_* = \varkappa_*(c) \leqslant \varkappa_0$ справедливы сходящиеся степенные разложения:

$$\lambda_l(\varkappa) = \lambda_l^{(2)}\varkappa^2 + \lambda_l^{(3)}\varkappa^3 + \lambda_l^{(4)}\varkappa^4 + \lambda_l^{(5)}\varkappa^5 + \lambda_l^{(6)}\varkappa^6 + \dots, \qquad |\varkappa| \leqslant \varkappa_*, \tag{1.189}$$

$$\varphi_l(\varkappa) = \omega_l + \varkappa\varphi_l^{(1)} + \varkappa^2\varphi_l^{(2)} + \varkappa^3\varphi_l^{(3)} + \varkappa^4\varphi_l^{(4)} + \varkappa^5\varphi_l^{(5)} + \dots, \quad |\varkappa| \leqslant \varkappa_*. \tag{1.190}$$

Векторы ω_l, $l = 1, \dots, n$, образуют ортонормированный базис в $\mathfrak{N}$.

Запишем (1.188) как тождество для форм:

$$\begin{gathered}(X_0\varphi_l(\varkappa), X_0\zeta)_{\mathfrak{H}_*} + c\varkappa^2\big((X_0\varphi_l(\varkappa), X_1\zeta)_{\mathfrak{H}_*} + (X_1\varphi_l(\varkappa), X_0\zeta)_{\mathfrak{H}_*}\big) \\ + c^2\varkappa^4(X_1\varphi_l(\varkappa), X_1\zeta)_{\mathfrak{H}_*} + \varkappa^3\big((Y_0\varphi_l(\varkappa), Y_2\zeta)_{\widetilde{\mathfrak{H}}} + (Y_2\varphi_l(\varkappa), Y_0\zeta)_{\widetilde{\mathfrak{H}}}\big) \\ + c\varkappa^5\big((Y_1\varphi_l(\varkappa), Y_2\zeta)_{\widetilde{\mathfrak{H}}} + (Y_2\varphi_l(\varkappa), Y_1\zeta)_{\widetilde{\mathfrak{H}}}\big) + \varkappa^6\big(\mathfrak{q}[\varphi_l(\varkappa), \zeta] + \lambda(Q_0\varphi_l(\varkappa), \zeta)_{\mathfrak{H}}\big) \\ = \lambda_l(\varkappa)(\varphi_l(\varkappa), \zeta)_{\mathfrak{H}}, \quad \forall \zeta \in \operatorname{Dom} X_0.\end{gathered}$$

Подставим сюда ряды (1.189), (1.190) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях $\varkappa$. Имеем:

$$\varkappa^0: \qquad (X_0\omega_l, X_0\zeta)_{\mathfrak{H}_*} = 0, \qquad \zeta \in \operatorname{Dom} X_0, \tag{1.191}$$

$$\varkappa^1: \qquad (X_0\varphi_l^{(1)}, X_0\zeta)_{\mathfrak{H}_*} = 0, \qquad \zeta \in \operatorname{Dom} X_0. \tag{1.192}$$

Равенство (1.191) обеспечено включением $\omega_l \in \mathfrak{N}$. Подставляя $\zeta = \varphi_l^{(1)}$ в равенство (1.192), получаем, что $\varphi_l^{(1)} \in \mathfrak{N}$. Можно записать

$$\varphi_l^{(1)} = \sum_{k=1}^{n} c_{lk}^{(1)}\omega_k, \quad l = 1, \dots, n. \tag{1.193}$$

Далее, учитывая равенства $X_0\omega_l = X_0\varphi_l^{(1)} = 0$ и $Y_0\omega_l = 0$, имеем

$$\varkappa^2: \quad \begin{aligned} &(X_0\varphi_l^{(2)}, X_0\zeta)_{\mathfrak{H}_*} + c(X_1\omega_l, X_0\zeta)_{\mathfrak{H}_*} = \lambda_l^{(2)}(\omega_l,\zeta)_{\mathfrak{H}}, \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \zeta \in \operatorname{Dom} X_0, \end{aligned} \tag{1.194}$$

$$\varkappa^3: \quad \begin{aligned} &(X_0\varphi_l^{(3)}, X_0\zeta)_{\mathfrak{H}_*} + c(X_1\varphi_l^{(1)}, X_0\zeta)_{\mathfrak{H}_*} + (Y_2\omega_l, Y_0\zeta)_{\widetilde{\mathfrak{H}}} \\ &\qquad = \lambda_l^{(2)}(\varphi_l^{(1)}, \zeta)_{\mathfrak{H}} + \lambda_l^{(3)}(\omega_l, \zeta)_{\mathfrak{H}}, \qquad \zeta \in \operatorname{Dom} X_0. \end{aligned} \tag{1.195}$$

Подставляя $\zeta = \omega_l$ в (1.194), (1.195), получаем, что $\lambda_l^{(2)} = \lambda_l^{(3)} = 0$. В терминах операторов Z и $\widetilde{Z}$ решения уравнений (1.194), (1.195) можно записать в виде

$$\varphi_l^{(2)} = cZ\omega_l + \widetilde{\varphi}_l^{(2)}, \qquad \widetilde{\varphi}_l^{(2)} \in \mathfrak{N}, \tag{1.196}$$

$$\varphi_l^{(3)} = cZ\varphi_l^{(1)} + \widetilde{Z}\omega_l + \widetilde{\varphi}_l^{(3)}, \qquad \widetilde{\varphi}_l^{(3)} \in \mathfrak{N}. \tag{1.197}$$

Приравнивая коэффициенты при $\varkappa^4$, получаем

$$\varkappa^4: \quad \begin{aligned} &(X_0\varphi_l^{(4)}, X_0\zeta)_{\mathfrak{H}_*} + c\big((X_0\varphi_l^{(2)}, X_1\zeta)_{\mathfrak{H}_*} + (X_1\varphi_l^{(2)}, X_0\zeta)_{\mathfrak{H}_*}\big) \\ &\quad + c^2(X_1\omega_l, X_1\zeta)_{\mathfrak{H}_*} + (Y_2\varphi_l^{(1)}, Y_0\zeta)_{\widetilde{\mathfrak{H}}} = \lambda_l^{(4)}(\omega_l, \zeta)_{\mathfrak{H}}, \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \zeta \in \operatorname{Dom} X_0. \end{aligned} \tag{1.198}$$

С учётом (1.11) и (1.196) при $\zeta \in \mathfrak{N}$ соотношение (1.198) принимает вид

$$c^2(R\omega_l, X_1\zeta)_{\mathfrak{H}_*} = \lambda_l^{(4)}(\omega_l, \zeta)_{\mathfrak{H}}, \quad \zeta \in \mathfrak{N}.$$

В силу (1.17) это означает, что

$$c^2(S\omega_l, \zeta)_{\mathfrak{H}} = \lambda_l^{(4)}(\omega_l, \zeta)_{\mathfrak{H}}, \quad \zeta \in \mathfrak{N}, \quad l = 1, \ldots, n, \tag{1.199}$$

то есть числа $\lambda_l^{(4)}$ и векторы ω_l являются собственными для оператора c^2S:

$$c^2S\omega_l = \lambda_l^{(4)}\omega_l, \quad l = 1, \ldots, n. \tag{1.200}$$

(В дальнейшем для определённости будем считать, что $\lambda_l^{(4)}$ занумерованы в порядке неубывания.) Если все собственные числа оператора S простые, то из (1.200) определяются (с точностью до фазового множителя) векторы ω_l.

Замечание 1.4.1. *Нам также будет удобно пользоваться другими обозначениями, отслеживая кратности собственных значений. Обозначим количество различных собственных значений оператора c^2S через p и обозначим их кратности через $k_1, \ldots, k_p$ (разумеется, $k_1 + \ldots + k_p = n$). Переобозначим различные* *собственные значения через* $\lambda_j^{\circ,(4)}$, $j = 1,\dots,p$. *Тогда*

$$\lambda_1^{\circ,(4)} := \lambda_1^{(4)} = \ldots = \lambda_{k_1}^{(4)} < \lambda_2^{\circ,(4)} := \lambda_{k_1+1}^{(4)} = \ldots = \lambda_{k_1+k_2}^{(4)} < \ldots$$
$$\ldots < \lambda_p^{\circ,(4)} := \lambda_{n-k_p+1}^{(4)} = \ldots = \lambda_n^{(4)}.$$

Введём следующие обозначения: $\mathfrak{N}_j = \operatorname{Ker}(c^2 S - \lambda_j^{\circ,(4)} I_{\mathfrak{N}})$, $j = 1,\dots,p$. *Тогда* $\mathfrak{N} = \sum_{j=1}^p \oplus \mathfrak{N}_j$. *Пусть* P_j *— ортопроектор пространства* $\mathfrak{H}$ *на* $\mathfrak{N}_j$. *Тогда* $P = \sum_{j=1}^p P_j$, $P_j P_l = 0$ *при* $j \neq l$.

Равенство коэффициентов при $\varkappa^5$ даёт

$$\varkappa^5: \quad \begin{aligned} &(X_0\varphi_l^{(5)}, X_0\zeta)_{\mathfrak{H}_*} + c\big((X_0\varphi_l^{(3)}, X_1\zeta)_{\mathfrak{H}_*} + (X_1\varphi_l^{(3)}, X_0\zeta)_{\mathfrak{H}_*}\big) \\ &\quad + c^2(X_1\varphi_l^{(1)}, X_1\zeta)_{\mathfrak{H}_*} + (Y_0\varphi_l^{(2)}, Y_2\zeta)_{\widetilde{\mathfrak{H}}} + (Y_2\varphi_l^{(2)}, Y_0\zeta)_{\widetilde{\mathfrak{H}}} \\ &\quad\quad + c\big((Y_1\omega_l, Y_2\zeta)_{\widetilde{\mathfrak{H}}} + (Y_2\omega_l, Y_1\zeta)_{\widetilde{\mathfrak{H}}}\big) = \lambda_l^{(5)}(\omega_l,\zeta)_{\mathfrak{H}} + \lambda_l^{(4)}(\varphi_l^{(1)}, \zeta)_{\mathfrak{H}}, \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \zeta \in \operatorname{Dom} X_0. \end{aligned}$$

Пусть $\zeta \in \mathfrak{N}$. Воспользуемся формулами (1.196), (1.197), определениями операторов R и S, а также тождествами

$$(X_0\widetilde{Z}\omega_l, X_1\zeta)_{\mathfrak{H}_*} = -(X_0\widetilde{Z}\omega_l, X_0 Z\zeta)_{\mathfrak{H}_*}, \tag{1.201}$$
$$(Y_0 Z\omega_l, Y_2\zeta)_{\widetilde{\mathfrak{H}}} = -(X_0 Z\omega_l, X_0\widetilde{Z}\zeta)_{\mathfrak{H}_*}, \tag{1.202}$$

вытекающими из определений операторов Z и $\widetilde{Z}$. Получаем

$$c^2(S\varphi_l^{(1)}, \zeta)_{\mathfrak{H}} + c(T\omega_l, \zeta)_{\mathfrak{H}} = \lambda_l^{(5)}(\omega_l, \zeta)_{\mathfrak{H}} + \lambda_l^{(4)}(\varphi_l^{(1)}, \zeta)_{\mathfrak{H}}, \quad \zeta \in \mathfrak{N}, \tag{1.203}$$

где

$$T := -(X_0 Z)^*(X_0\widetilde{Z}) - (X_0\widetilde{Z})^* X_0 Z + Y_2^* Y_1 + Y_1^* Y_2. \tag{1.204}$$

Подставляя $\zeta = \omega_l$ и используя (1.193), (1.200), находим

$$\lambda_l^{(5)} = c(T\omega_l, \omega_l)_{\mathfrak{H}}, \quad l = 1,\dots,n. \tag{1.205}$$

Далее, подставим (1.193) в (1.203). Перебирая $\zeta = \omega_k$, $k = 1,\dots,n$, получаем

$$(\lambda_l^{(4)} - \lambda_k^{(4)})c_{lk}^{(1)} = c(T\omega_l, \omega_k)_{\mathfrak{H}}, \quad l,k = 1,\dots,n,\ l \neq k. \tag{1.206}$$

Отсюда определяются коэффициенты $c_{lk}^{(1)}$ с индексами $\{(l,k)\colon \lambda_l^{(4)} \neq \lambda_k^{(4)}\}$.

Пусть $\lambda_q^{\circ,(4)}$ — собственное число задачи (1.200) кратности k_q (т. е. $\lambda_i^{(4)} = \ldots = \lambda_{i+k_q-1}^{(4)}$, $i = i(q) = k_1 + \ldots + k_{q-1} + 1$). Из (1.206) вытекают соотношения

$$(T\omega_l, \omega_k)_{\mathfrak{H}} = 0, \quad l,k = i,\dots,i+k_q-1,\ l \neq k. \tag{1.207}$$

Равенства (1.205) с $l = i, \dots, i + k_q - 1$ и (1.207) можно трактовать как задачу на собственные числа

$$c\mathscr{Y}^{(q)}\omega_l = \lambda_l^{(5)}\omega_l, \quad l = i, \dots, i + k_q - 1, \tag{1.208}$$

для самосопряжённого оператора $\mathscr{Y}^{(q)} := P_q T\big|_{\mathfrak{N}_q}$. Если все собственные числа задачи (1.208) простые, то тогда векторы ω_l, $l = i, \dots, i + k_q - 1$, определяются с точностью до фазового множителя.

Замечание 1.4.2. *Введём также и другие обозначения по аналогии с замечанием 1.4.1. Будем считать, что $\lambda_l^{(5)}$, где $l = i, \dots, i+k_q-1$, занумерованы в порядке неубывания. Обозначим количество различных собственных значений оператора $c\mathscr{Y}^{(q)}$ через $p'(q)$ и обозначим их кратности через $k_{1,q}, \dots, k_{p'(q),q}$ (разумеется, $k_{1,q} + \ldots + k_{p'(q),q} = k_q$). Переобозначим различные собственные значения через $\lambda_{j,q}^{\circ,(5)}$, где $j = 1, \dots, p'(q)$. Тогда*

$$\lambda_{1,q}^{\circ,(5)} := \lambda_i^{(5)} = \ldots = \lambda_{i+k_{1,q}-1}^{(5)} < \lambda_{2,q}^{\circ,(5)} := \lambda_{i+k_{1,q}}^{(5)} = \ldots = \lambda_{i+k_{1,q}+k_{2,q}-1}^{(5)} < \ldots$$
$$\ldots < \lambda_{p'(q),q}^{\circ,(5)} := \lambda_{i+k_q-k_{p'(q),q}}^{(5)} = \ldots = \lambda_{i+k_q-1}^{(5)}.$$

Введём следующие обозначения: $\mathfrak{N}_{j,q}^{\flat} = \operatorname{Ker}(c\mathscr{Y}^{(q)} - \lambda_{j,q}^{\circ,(5)} I_{\mathfrak{N}_q})$, где $j = 1, \dots, p'(q)$. Тогда $\mathfrak{N}_q = \sum_{j=1}^{p'(q)} \oplus \mathfrak{N}_{j,q}^{\flat}$. Пусть $P_{j,q}^{\flat}$ — ортопроектор пространства $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{N}_{j,q}^{\flat}$. Тогда $P_q = \sum_{j=1}^{p'(q)} P_{j,q}^{\flat}$ и $P_{j,q}^{\flat} P_{l,q}^{\flat} = 0$ при $j \neq l$.

Замечание 1.4.3. *Отметим, что $\lambda_l^{(4)} \sim c^2$, $\lambda_l^{(5)} \sim c$, где $l = 1, \dots, n$.*

Далее, рассмотрим соотношение $(\varphi_l(\varkappa), \varphi_k(\varkappa))_{\mathfrak{H}} = \delta_{lk}$. Подставляя в него ряды (1.190) и приравнивая коэффициенты при степенях $\varkappa$, получаем равенства:

$$\varkappa^0: \qquad (\omega_l, \omega_k)_{\mathfrak{H}} = \delta_{lk},$$
$$\varkappa^1: \qquad (\omega_l, \varphi_k^{(1)})_{\mathfrak{H}} + (\varphi_l^{(1)}, \omega_k)_{\mathfrak{H}} = 0, \tag{1.209}$$
$$\varkappa^2: \qquad (\omega_l, \varphi_k^{(2)})_{\mathfrak{H}} + (\varphi_l^{(1)}, \varphi_k^{(1)})_{\mathfrak{H}} + (\varphi_l^{(2)}, \omega_k)_{\mathfrak{H}} = 0. \tag{1.210}$$

Из (1.196) и (1.210) следуют равенства

$$(\omega_l, \widetilde{\varphi}_k^{(2)})_{\mathfrak{H}} + (\varphi_l^{(1)}, \varphi_k^{(1)})_{\mathfrak{H}} + (\widetilde{\varphi}_l^{(2)}, \omega_k)_{\mathfrak{H}} = 0. \tag{1.211}$$

Далее нам будет удобно воспользоваться соотношением

$$(\mathfrak{B}(\varkappa)\varphi_l(\varkappa), \varphi_k(\varkappa))_{\mathfrak{H}} = \lambda_l(\varkappa)\delta_{lk}.$$

Равенство коэффициентов при $\varkappa^6$ даёт

$$\varkappa^6: \quad \begin{aligned} &(X_0\varphi_l^{(2)}, X_0\varphi_k^{(4)})_{\mathfrak{H}_*} + (X_0\varphi_l^{(3)}, X_0\varphi_k^{(3)})_{\mathfrak{H}_*} + (X_0\varphi_l^{(4)}, X_0\varphi_k^{(2)})_{\mathfrak{H}_*} \\ &+ c\big((X_0\varphi_l^{(4)}, X_1\omega_k)_{\mathfrak{H}_*} + (X_0\varphi_l^{(3)}, X_1\varphi_k^{(1)})_{\mathfrak{H}_*} + (X_0\varphi_l^{(2)}, X_1\varphi_k^{(2)})_{\mathfrak{H}_*} \\ &+ (X_1\omega_l, X_0\varphi_k^{(4)})_{\mathfrak{H}_*} + (X_1\varphi_l^{(1)}, X_0\varphi_k^{(3)})_{\mathfrak{H}_*} + (X_1\varphi_l^{(2)}, X_0\varphi_k^{(2)})_{\mathfrak{H}_*}\big) \\ &+ c^2\big((X_1\varphi_l^{(2)}, X_1\omega_k)_{\mathfrak{H}_*} + (X_1\varphi_l^{(1)}, X_1\varphi_k^{(1)})_{\mathfrak{H}_*} + (X_1\omega_l, X_1\varphi_k^{(2)})_{\mathfrak{H}_*}\big) \\ &\quad + (Y_0\varphi_l^{(3)}, Y_2\omega_k)_{\widetilde{\mathfrak{H}}} + (Y_0\varphi_l^{(2)}, Y_2\varphi_k^{(1)})_{\widetilde{\mathfrak{H}}} + (Y_2\varphi_l^{(1)}, Y_0\varphi_k^{(2)})_{\widetilde{\mathfrak{H}}} \\ &\qquad + (Y_2\omega_l, Y_0\varphi_k^{(3)})_{\widetilde{\mathfrak{H}}} + c\big((Y_1\omega_l, Y_2\varphi_k^{(1)})_{\widetilde{\mathfrak{H}}} + (Y_1\varphi_l^{(1)}, Y_2\omega_k)_{\widetilde{\mathfrak{H}}} \\ &\quad + (Y_2\omega_l, Y_1\varphi_k^{(1)})_{\widetilde{\mathfrak{H}}} + (Y_2\varphi_l^{(1)}, Y_1\omega_k)_{\widetilde{\mathfrak{H}}}\big) \\ &\qquad + \mathfrak{q}[\omega_l, \omega_k] + \lambda(Q_0\omega_l, \omega_k)_{\mathfrak{H}} = \lambda_l^{(6)}\delta_{lk}. \end{aligned} \tag{1.212}$$

В силу (1.196) и определений операторов R и S имеем

$$\begin{aligned} c(X_0\varphi_l^{(2)}, X_1\varphi_k^{(2)})_{\mathfrak{H}_*} + c^2(X_1\omega_l, X_1\varphi_k^{(2)})_{\mathfrak{H}_*} + c(X_1\varphi_l^{(2)}, X_0\varphi_k^{(2)})_{\mathfrak{H}_*} \\ + c^2(X_1\varphi_l^{(2)}, X_1\omega_k)_{\mathfrak{H}_*} = c^2(R\omega_l, X_1\varphi_k^{(2)})_{\mathfrak{H}_*} + c^2(X_1\varphi_l^{(2)}, R\omega_k)_{\mathfrak{H}_*} \\ = c^3(Z^*X_1^*RP\omega_l, \omega_k)_{\mathfrak{H}} + c^3((RP)^*X_1Z\omega_l, \omega_k)_{\mathfrak{H}} \\ + c^2(S\omega_l, \widetilde{\varphi}_k^{(2)})_{\mathfrak{H}} + c^2(S\widetilde{\varphi}_l^{(2)}, \omega_k)_{\mathfrak{H}}. \end{aligned}$$

Далее, из (1.196) и тождества $(X_1\omega_l, X_0\zeta)_{\mathfrak{H}_*} = -(X_0Z\omega_l, X_0\zeta)_{\mathfrak{H}_*}$ (см. определение оператора Z) следует, что

$$\begin{aligned} (X_0\varphi_l^{(2)}, X_0\varphi_k^{(4)})_{\mathfrak{H}_*} + c(X_1\omega_l, X_0\varphi_k^{(4)})_{\mathfrak{H}_*} \\ + (X_0\varphi_l^{(4)}, X_0\varphi_k^{(2)})_{\mathfrak{H}_*} + c(X_0\varphi_l^{(4)}, X_1\omega_k)_{\mathfrak{H}_*} = 0. \end{aligned}$$

Затем воспользуемся (1.195) при $\zeta = \varphi_k^{(3)}$:

$$(X_0\varphi_l^{(3)}, X_0\varphi_k^{(3)})_{\mathfrak{H}_*} + c(X_1\varphi_l^{(1)}, X_0\varphi_k^{(3)})_{\mathfrak{H}_*} + (Y_2\omega_l, Y_0\varphi_k^{(3)})_{\widetilde{\mathfrak{H}}} = 0.$$

Наконец, в силу (1.196), (1.197), (1.201), (1.202) и тождества $(Y_0\widetilde{Z}\omega_l, Y_2\zeta)_{\widetilde{\mathfrak{H}}} = -(X_0\widetilde{Z}\omega_l, X_0\widetilde{Z}\zeta)_{\mathfrak{H}_*}$ (см. определение оператора $\widetilde{Z}$),

$$\begin{aligned} c(X_0\varphi_l^{(3)}, X_1\varphi_k^{(1)})_{\mathfrak{H}_*} + c^2(X_1\varphi_l^{(1)}, X_1\varphi_k^{(1)})_{\mathfrak{H}_*} + (Y_0\varphi_l^{(3)}, Y_2\omega_k)_{\widetilde{\mathfrak{H}}} \\ + (Y_0\varphi_l^{(2)}, Y_2\varphi_k^{(1)})_{\widetilde{\mathfrak{H}}} + (Y_2\varphi_l^{(1)}, Y_0\varphi_k^{(2)})_{\widetilde{\mathfrak{H}}} \\ = c^2(S\varphi_l^{(1)}, \varphi_k^{(1)})_{\mathfrak{H}} - c\big((X_0\widetilde{Z}\omega_l, X_0Z\varphi_k^{(1)})_{\mathfrak{H}_*} + (X_0Z\varphi_l^{(1)}, X_0\widetilde{Z}\omega_k)_{\mathfrak{H}_*} \\ + (X_0Z\omega_l, X_0\widetilde{Z}\varphi_k^{(1)})_{\mathfrak{H}_*} + (X_0\widetilde{Z}\varphi_l^{(1)}, X_0Z\omega_k)_{\mathfrak{H}_*}\big) - (X_0\widetilde{Z}\omega_l, X_0\widetilde{Z}\omega_k)_{\mathfrak{H}_*}. \end{aligned}$$

В итоге, с учётом (1.41) и (1.204) равенство (1.212) принимает следующий вид:

$$\varkappa^6: \quad \begin{aligned} &c^3(N\omega_l,\omega_k)_{\mathfrak{H}} + c^2(S\omega_l,\widetilde{\varphi}_k^{(2)})_{\mathfrak{H}} + c^2(S\varphi_l^{(1)},\varphi_k^{(1)})_{\mathfrak{H}} + c^2(S\widetilde{\varphi}_l^{(2)},\omega_k)_{\mathfrak{H}} \\ &+ c(T\varphi_l^{(1)},\omega_k)_{\mathfrak{H}} + c(T\omega_l,\varphi_k^{(1)})_{\mathfrak{H}} - (X_0\widetilde{Z}\omega_l, X_0\widetilde{Z}\omega_k)_{\mathfrak{H}_*} \\ &+ \mathfrak{q}[\omega_l,\omega_k] + \lambda(Q_0\omega_l,\omega_k)_{\mathfrak{H}} = \lambda_l^{(6)}\delta_{lk}. \end{aligned} \tag{1.213}$$

Пусть $\lambda_q^{\circ,(4)}$ — собственное число задачи (1.200) кратности k_q (то есть $\lambda_i^{(4)} = \ldots = \lambda_{i+k_q-1}^{(4)}$, $i = i(q) = k_1 + \ldots + k_{q-1} + 1$). Пусть $l, k = i, \ldots, i + k_q - 1$. Используя (1.193), (1.200) и (1.211), получаем

$$\begin{aligned} &c^2(S\omega_l,\widetilde{\varphi}_k^{(2)})_{\mathfrak{H}} + c^2(S\varphi_l^{(1)},\varphi_k^{(1)})_{\mathfrak{H}} + c^2(S\widetilde{\varphi}_l^{(2)},\omega_k)_{\mathfrak{H}} \\ &= c^2(S\varphi_l^{(1)},\varphi_k^{(1)})_{\mathfrak{H}} - \lambda_q^{\circ,(4)}(\varphi_l^{(1)},\varphi_k^{(1)})_{\mathfrak{H}} = \sum_{r'=1}^{n}(\lambda_{r'}^{(4)} - \lambda_q^{\circ,(4)})c_{lr'}^{(1)}\left(c_{kr'}^{(1)}\right)^*, \\ &\qquad l,k = i,\ldots,i+k_q-1. \end{aligned} \tag{1.214}$$

Далее, в силу (1.193), (1.205) и (1.206) имеем

$$\begin{aligned} &c(T\varphi_l^{(1)},\omega_k)_{\mathfrak{H}} = c\sum_{r'=1}^{n} c_{lr'}^{(1)}(T\omega_{r'},\omega_k)_{\mathfrak{H}} \\ &= \sum_{r'=1}^{n} c_{lr'}^{(1)}\big((\lambda_{r'}^{(4)} - \lambda_q^{\circ,(4)})c_{r'k}^{(1)} + \lambda_{r'}^{(5)}\delta_{r'k}\big), \quad l,k = i,\ldots,i+k_q-1. \end{aligned} \tag{1.215}$$

Аналогично, используя (1.193), (1.205) и (1.206), получаем

$$\begin{aligned} &c(T\omega_l,\varphi_k^{(1)})_{\mathfrak{H}} = c\sum_{r'=1}^{n}\left(c_{kr'}^{(1)}\right)^*(T\omega_l,\omega_{r'})_{\mathfrak{H}} \\ &= \sum_{r'=1}^{n}\left(c_{kr'}^{(1)}\right)^*\big((\lambda_q^{\circ,(4)} - \lambda_{r'}^{(4)})c_{lr'}^{(1)} + \lambda_{r'}^{(5)}\delta_{lr'}\big), \quad l,k = i,\ldots,i+k_q-1. \end{aligned} \tag{1.216}$$

Таким образом, учитывая (1.205), (1.206), (1.214)–(1.216), а также равенство $c_{lk}^{(1)} = -\left(c_{kl}^{(1)}\right)^*$ (вытекающее из (1.209)), мы можем записать (1.213) для $l, k = i, \ldots, i + k_q - 1$ следующим образом:

$$\begin{aligned} &c^3(N\omega_l,\omega_k)_{\mathfrak{H}} + c_{lk}^{(1)}(\lambda_k^{(5)} - \lambda_l^{(5)}) + \breve{\mathfrak{y}}^{(q)}[\omega_l,\omega_k] - (X_0\widetilde{Z}\omega_l, X_0\widetilde{Z}\omega_k)_{\mathfrak{H}_*} \\ &+\mathfrak{q}[\omega_l,\omega_k] + \lambda(Q_0\omega_l,\omega_k)_{\mathfrak{H}} = \lambda_l^{(6)}\delta_{lk}, \quad l,k = i,\ldots,i+k_q-1, \end{aligned} \tag{1.217}$$

где

$$\breve{\mathfrak{y}}^{(q)}[\omega_l,\omega_k] := \sum_{r'=1}^{n} c_{lr'}^{(1)}(\lambda_{r'}^{(4)} - \lambda_q^{\circ,(4)})c_{r'k}^{(1)}$$

$$= c^2 \sum_{\substack{r'\in\{1,\dots,n\}\\ r'\neq i,\dots,i+k_q-1}} \frac{1}{\lambda_q^{\circ,(4)} - \lambda_{r'}^{(4)}} (T\omega_l, \omega_{r'})_{\mathfrak{H}} (\omega_{r'}, T\omega_k)_{\mathfrak{H}}$$

$$= \sum_{q'\in\{1,\dots,p\}:\, q'\neq q} \frac{c^2}{\lambda_q^{\circ,(4)} - \lambda_{q'}^{\circ,(4)}} (P_{q'}T\omega_l, T\omega_k)_{\mathfrak{H}}.$$

Отметим, что форма $\check{\mathfrak{h}}^{(q)}$ не зависит от c в силу замечания 1.4.3.

Пусть $\lambda_{q',q}^{\circ,(5)}$ — $k_{q',q}$-кратное собственное значение задачи (1.208): $\lambda_j^{(5)} = \dots$ $\dots = \lambda_{j+k_{q',q}-1}^{(5)}$, где $j = j(q',q) = i(q) + k_{1,q} + \dots + k_{q'-1,q}$. Равенства (1.217), где $l, k = j, \dots, j + k_{q',q} - 1$, образуют следующую систему:

$$c^3 (N\omega_l, \omega_k)_{\mathfrak{H}} + \check{\mathfrak{h}}^{(q)}[\omega_l, \omega_k] - (X_0\widetilde{Z}\omega_l, X_0\widetilde{Z}\omega_k)_{\mathfrak{H}_*} + \mathfrak{q}[\omega_l, \omega_k] + \lambda (Q_0\omega_l, \omega_k)_{\mathfrak{H}} = \lambda_l^{(6)} \delta_{lk}, \qquad l, k = j, \dots, j + k_{q',q} - 1.$$

Эти уравнения можно трактовать как задачу на собственные числа:

$$\mathscr{Y}^{(q',q)}(c)\omega_l = \lambda_l^{(6)} \omega_l, \qquad l = j, \dots, j + k_{q',q} - 1, \tag{1.218}$$

для самосопряжённого оператора $\mathscr{Y}^{(q',q)}(c) := c^3 P^{\flat}_{q',q} N|_{\mathfrak{N}^{\flat}_{q',q}} + \Upsilon^{(q',q)}$, где $\Upsilon^{(q',q)} :=$ $P^{\flat}_{q',q} \check{Y}^{(q)}|_{\mathfrak{N}^{\flat}_{q',q}} + P^{\flat}_{q',q}\big(-(X_0\widetilde{Z})^* X_0\widetilde{Z} + Q_{\mathfrak{N}} + \lambda Q_{0\mathfrak{N}}\big)\big|_{\mathfrak{N}^{\flat}_{q',q}}$, а $\check{Y}^{(q)}$ — оператор, отвечающий форме $\check{\mathfrak{h}}^{(q)}$.

Замечание 1.4.4. *Векторы ω_l, $l = j, \dots, j + k_{q',q} - 1$, вообще говоря, зависят от c. Если при каком-то значении параметра c у задачи* (1.218) *имеется кратное собственное значение, то* (1.218) *недостаточно для их определения.*

Выпишем получившееся выражение для $\lambda_l^{(6)}$:

$$c^3 (N\omega_l, \omega_l)_{\mathfrak{H}} + \check{\mathfrak{h}}^{(q)}[\omega_l, \omega_l] - (X_0\widetilde{Z}\omega_l, X_0\widetilde{Z}\omega_l)_{\mathfrak{H}_*} + \mathfrak{q}[\omega_l, \omega_l] + \lambda (Q_0\omega_l, \omega_l)_{\mathfrak{H}} = \lambda_l^{(6)}, \quad l = 1, \dots, n. \tag{1.219}$$

Здесь q — номер, такой что $\lambda_q^{\circ,(4)} = \lambda_l^{(4)}$.

Проведём аналогичные рассмотрения для оператора $L(\varkappa)$, который получается из (1.26) при $t = c\varkappa^2$, $\varepsilon = \varkappa^3$:

$$L(\varkappa) = c^2\varkappa^4 S - c\varkappa^5 \big((X_0 Z)^*(X_0\widetilde{Z})|_{\mathfrak{N}} + (X_0\widetilde{Z})^*(X_0 Z)|_{\mathfrak{N}}\big) + c\varkappa^5 P(Y_2^* Y_1 + Y_1^* Y_2)|_{\mathfrak{N}} + \varkappa^6\big(-(X_0\widetilde{Z})^*(X_0\widetilde{Z})|_{\mathfrak{N}} + Q_{\mathfrak{N}} + \lambda Q_{0\mathfrak{N}}\big).$$

Согласно общей аналитической теории возмущений при $|\varkappa| \leqslant \varkappa_0$ существуют вещественно аналитические функции $\lambda_l^0(\varkappa)$ (ветви собственных значений) и вещественно аналитические $\mathfrak{H}$-значные функции $\varphi_l^0(\varkappa)$ (ветви собственных векторов), такие что

$$L(\varkappa)\varphi_l^0(\varkappa) = \lambda_l^0(\varkappa)\varphi_l^0(\varkappa), \qquad |\varkappa| \leqslant \varkappa_0, \quad l = 1, \ldots, n,$$

причём $\varphi_l^0(\varkappa)$, $l = 1, \ldots, n$, образуют ортонормированный базис в $\mathfrak{N}$. Для достаточно малого $\varkappa_* \leqslant \varkappa_0$ справедливы сходящиеся степенные разложения:

$$\lambda_l^0(\varkappa) = \lambda_l^{0,(4)}\varkappa^4 + \lambda_l^{0,(5)}\varkappa^5 + \lambda_l^{0,(6)}\varkappa^6 + \ldots, \qquad |\varkappa| \leqslant \varkappa_*, \tag{1.220}$$

$$\varphi_l^0(\varkappa) = \omega_l^0 + \varkappa\varphi_l^{0,(1)} + \varkappa^2\varphi_l^{0,(2)} + \ldots, \qquad |\varkappa| \leqslant \varkappa_*. \tag{1.221}$$

Векторы ω_l^0, $l = 1, \ldots, n$, образуют ортонормированный базис в $\mathfrak{N}$. Можно записать

$$\varphi_l^{0,(r)} = \sum_{k=1}^{n} c_{lk}^{0,(r)}\omega_k^0, \quad \text{где} \quad l = 1, \ldots, n.$$

Аналоги уравнений (1.199), (1.203), (1.213) для $L(\varkappa)$ выглядят следующим образом:

$$\varkappa^4: \qquad c^2(S\omega_l^0, \zeta)_{\mathfrak{H}} = \lambda_l^{0,(4)}(\omega_l^0, \zeta)_{\mathfrak{H}}, \quad \zeta \in \mathfrak{N}, \tag{1.222}$$

$$\varkappa^5: \qquad \begin{aligned} &c^2(S\varphi_l^{0,(1)}, \zeta)_{\mathfrak{H}} + c(T\omega_l^0, \zeta)_{\mathfrak{H}} \\ &\qquad = \lambda_l^{0,(5)}(\omega_l^0, \zeta)_{\mathfrak{H}} + \lambda_l^{0,(4)}(\varphi_l^{0,(1)}, \zeta)_{\mathfrak{H}}, \quad \zeta \in \mathfrak{N}, \end{aligned} \tag{1.223}$$

$$\varkappa^6: \qquad \begin{aligned} &c^2(S\omega_l^0, \varphi_k^{0,(2)})_{\mathfrak{H}} + c^2(S\varphi_l^{0,(1)}, \varphi_k^{0,(1)})_{\mathfrak{H}} + c^2(S\varphi_l^{0,(2)}, \omega_k^0)_{\mathfrak{H}} \\ &\quad + c(T\varphi_l^{0,(1)}, \omega_k^0)_{\mathfrak{H}} + c(T\omega_l^0, \varphi_k^{0,(1)})_{\mathfrak{H}} - (X_0\widetilde{Z}\omega_l^0, X_0\widetilde{Z}\omega_k^0)_{\mathfrak{H}_*} \\ &\qquad + \mathfrak{q}[\omega_l^0, \omega_k^0] + \lambda(Q_0\omega_l^0, \omega_k^0)_{\mathfrak{H}} = \lambda_l^{0,(6)}\delta_{lk}. \end{aligned}$$

Равенства (1.222), (1.223) совпадают с (1.199), (1.203), поэтому аналоги уравнений (1.200) и (1.208) для $L(\varkappa)$ выглядят так же и мы можем выбрать $\lambda_l^{0,(4)} = \lambda_l^{(4)}$, $\lambda_l^{0,(5)} = \lambda_l^{(5)}$, $l = 1, \ldots, n$. Если $\lambda_l^{(4)}$ — простое собственное число задачи (1.200), то можно положить $\omega_l^0 = \omega_l$. Далее, если среди собственных чисел задачи (1.200) есть собственное число $\lambda_q^{\circ,(4)}$ кратности $k_q > 1$, но $\lambda_l^{(5)}$ — простое собственное значение задачи (1.208), тогда мы также можем выбрать $\omega_l^0 = \omega_l$. Но, если среди собственных чисел задачи (1.208) есть $k_{q',q}$-кратное ($k_{q',q} > 1$) собственное число $\lambda_{q',q}^{\circ,(5)}$, то в общем случае нельзя положить $\omega_l^0 = \omega_l$, $l = j, \ldots, j + k_{q',q} - 1$, где $j = j(q',q) = i(q) + k_{1,q} + \ldots + k_{q'-1,q}$. Аналог уравнения (1.218) для $L(\varkappa)$ выглядит следующим образом:

$$\Upsilon^{(q',q)}\omega_l^0 = \lambda_l^{0,(6)}\omega_l^0, \quad l = j, \ldots, j + k_{q',q} - 1. \tag{1.224}$$

Отметим также, что если у задачи (1.224) имеется кратное собственное значение, то (1.224) недостаточно для определения ω_l^0, $l = j, \dots, j + k_{q',q} - 1$, в соответствующем собственном подпространстве.

В заключение выпишем выражение для $\lambda_l^{0,(6)}$:

$$\check{\mathfrak{h}}^{(q)}[\omega_l^0, \omega_l^0] - (X_0\widetilde{Z}\omega_l^0, X_0\widetilde{Z}\omega_l^0)_{\mathfrak{H}_*} + \mathfrak{q}[\omega_l^0, \omega_l^0] + \lambda(Q_0\omega_l^0, \omega_l^0)_{\mathfrak{H}} = \lambda_l^{0,(6)}, \quad l = 1, \dots, n, \tag{1.225}$$

где q — номер, такой что $\lambda_q^{\circ,(4)} = \lambda_l^{(4)}$.

1.4.2 Теорема о подтверждении точности

Теперь мы докажем, что оценка (1.135) является точной относительно сглаживающего множителя.

Теорема 1.4.5. *Пусть $P_{q',q}^{\flat} N P_{q',q}^{\flat} \neq 0$ для некоторых $q \in \{1, \dots, p\}$, $q' \in \{1, \dots, p'(q)\}$. Пусть $s \neq 0$ и $0 \leqslant q_3 < 3$. Тогда не существует такой константы $C(s) > 0$, чтобы оценка*

$$\left\| e^{-is\varepsilon^{-2}\mathfrak{B}(t,\varepsilon)}P - e^{-is\varepsilon^{-2}L(t,\varepsilon)P}P \right\| \varepsilon^{q_3}(t^2 + \varepsilon^2)^{-q_3/2} \leqslant C(s)\varepsilon \tag{1.226}$$

выполнялась для всех достаточно малых $|t|$ и ε.

Доказательство. Достаточно считать, что $2 \leqslant q_3 < 3$. Начнём с предварительного замечания. Поскольку $F(t,\varepsilon)^{\perp}P = (P - F(t,\varepsilon))P$, то из (1.35) вытекает оценка

$$\left\| e^{-is\varepsilon^{-2}\mathfrak{B}(t,\varepsilon)}F(t,\varepsilon)^{\perp}P \right\| \varepsilon(t^2 + \varepsilon^2)^{-1/2} \leqslant C_4\varepsilon, \qquad |\tau| \leqslant \tau^0. \tag{1.227}$$

Будем рассуждать от противного. Предположим, что при некоторых $s \neq 0$ и $2 \leqslant q_3 < 3$ существует такая постоянная $C(s) > 0$, что выполнено (1.226) при всех достаточно малых $|t|$ и ε. В силу оценки (1.227) это предположение равносильно существованию постоянной $\widetilde{C}(s)$, такой что

$$\left\| \left(e^{-is\varepsilon^{-2}\mathfrak{B}(t,\varepsilon)}F(t,\varepsilon) - e^{-is\varepsilon^{-2}L(t,\varepsilon)P}P\right)P \right\| \varepsilon^{q_3}(t^2 + \varepsilon^2)^{-q_3/2} \leqslant \widetilde{C}(s)\varepsilon \tag{1.228}$$

при всех достаточно малых $|t|$ и ε. Положим $t = c\varepsilon^{2/3}$, где константу $c > 0$ выберем позже.

При $|\varkappa| \leqslant \varkappa_*$ имеют место сходящиеся степенные разложения (1.189), (1.190), (1.220), (1.221). При $|\varkappa| \leqslant \varkappa_0$ имеем:

$$e^{-is\varepsilon^{-2}\mathfrak{B}(\varkappa)}F(\varkappa) = \sum_{k=1}^{n} e^{-is\varepsilon^{-2}\lambda_k(\varkappa)}(\,\cdot\,,\varphi_k(\varkappa))\varphi_k(\varkappa), \tag{1.229}$$

$$e^{-is\varepsilon^{-2}L(\varkappa)P}P = \sum_{k=1}^{n} e^{-is\varepsilon^{-2}\lambda_k^0(\varkappa)}(\,\cdot\,,\varphi_k^0(\varkappa))\varphi_k^0(\varkappa). \tag{1.230}$$

Из сходимости рядов (1.190), (1.221) следует, что

$$\|\varphi_k(\varkappa) - \omega_k\| \leqslant c_1|\varkappa|, \qquad |\varkappa| \leqslant \varkappa_*, \qquad k = 1,\dots,n, \tag{1.231}$$

$$\|\varphi_k^0(\varkappa) - \omega_k^0\| \leqslant c_1|\varkappa|, \qquad |\varkappa| \leqslant \varkappa_*, \qquad k = 1,\dots,n. \tag{1.232}$$

В силу (1.228)–(1.232) существует постоянная $\widehat{C}(s)$, такая что

$$\begin{gathered}\Bigl\| \sum_{j'=1}^{n} \Bigl(e^{-is\varepsilon^{-2}\lambda_{j'}(\varkappa)}(\,\cdot\,,\omega_{j'})\omega_{j'} - e^{-is\varepsilon^{-2}\lambda_{j'}^0(\varkappa)}(\,\cdot\,,\omega_{j'}^0)\omega_{j'}^0 \Bigr) \Bigr\| \varepsilon^{q_3}(t^2+\varepsilon^2)^{-q_3/2} \\ \leqslant \widehat{C}(s)\varepsilon, \quad t = c\varepsilon^{2/3} = c\varkappa^2,\end{gathered} \tag{1.233}$$

при всех достаточно малых $\varkappa$. Рассмотрим блок оператора под знаком нормы в (1.233) в подпространстве $\mathfrak{N}_{q',q}^{\flat}$. Справедлива оценка

$$\begin{gathered}\Bigl\| \sum_{j'=j}^{j+k_{q',q}-1} \Bigl(e^{-is\varepsilon^{-2}\lambda_{j'}(\varkappa)}(\,\cdot\,,\omega_{j'})\omega_{j'} - e^{-is\varepsilon^{-2}\lambda_{j'}^0(\varkappa)}(\,\cdot\,,\omega_{j'}^0)\omega_{j'}^0 \Bigr) \Bigr\| \varepsilon^{q_3}(t^2+\varepsilon^2)^{-q_3/2} \\ \leqslant \widehat{C}(s)\varepsilon, \quad t = c\varepsilon^{2/3} = c\varkappa^2,\end{gathered} \tag{1.234}$$

при всех достаточно малых $\varkappa$, где $j = k_1 + \ldots + k_{q-1} + k_{1,q} + \ldots + k_{q'-1,q} + 1$. Используя сходящиеся степенные ряды (1.189) и (1.220), мы можем записать

$$e^{-is\varepsilon^{-2}\lambda_{j'}(\varkappa)} = e^{-is(\varkappa^{-2}\lambda_q^{\circ,(4)} + \varkappa^{-1}\lambda_{q',q}^{\circ,(5)})}e^{-is(\lambda_{j'}^{(6)} + O(\varkappa))}, \qquad j' = j,\dots,j+k_{q',q}-1, \tag{1.235}$$

$$e^{-is\varepsilon^{-2}\lambda_{j'}^0(\varkappa)} = e^{-is(\varkappa^{-2}\lambda_q^{\circ,(4)} + \varkappa^{-1}\lambda_{q',q}^{\circ,(5)})}e^{-is(\lambda_{j'}^{0,(6)} + O(\varkappa))}, \qquad j' = j,\dots,j+k_{q',q}-1. \tag{1.236}$$

Очевидно,

$$\Bigl| e^{-is(\lambda_{j'}^{(6)} + O(\varkappa))} - e^{-is\lambda_{j'}^{(6)}} \Bigr| = O(\varkappa), \qquad j' = j,\dots,j+k_{q',q}-1, \tag{1.237}$$

$$\Bigl| e^{-is(\lambda_{j'}^{0,(6)} + O(\varkappa))} - e^{-is\lambda_{j'}^{0,(6)}} \Bigr| = O(\varkappa), \qquad j' = j,\dots,j+k_{q',q}-1. \tag{1.238}$$

Из (1.234)–(1.238) следует, что справедлива оценка

$$\left\| \sum_{j'=j}^{j+k_{q',q}-1} \left(e^{-is\lambda_{j'}^{(6)}}(\,\cdot\,,\omega_{j'})\omega_{j'} - e^{-is\lambda_{j'}^{0,(6)}}(\,\cdot\,,\omega_{j'}^0)\omega_{j'}^0 \right) \right\| \varepsilon^{q_3}(t^2+\varepsilon^2)^{-q_3/2} \leqslant \check{C}(s)\varepsilon, \quad t = c\varepsilon^{2/3}, \tag{1.239}$$

при всех достаточно малых $\varepsilon = \varkappa^3$.

Предположим, что $\dim \mathfrak{N}_{q',q}^{\mathfrak{b}} = 1$. Тогда $\omega_j = \omega_j^0$ и из (1.239) следует, что

$$\left| e^{-is\lambda_j^{(6)}} - e^{-is\lambda_j^{0,(6)}} \right| \varepsilon^{q_3}(t^2+\varepsilon^2)^{-q_3/2} \leqslant \check{C}(s)\varepsilon, \qquad t = c\varepsilon^{2/3}, \tag{1.240}$$

при всех достаточно малых ε. Левая часть неравенства (1.240) может быть записана как $2\left|\sin\left(\frac{1}{2}s(\lambda_j^{(6)} - \lambda_j^{0,(6)})\right)\right| \varepsilon^{q_3}(t^2+\varepsilon^2)^{-q_3/2}$. Пользуясь формулами (1.219) и (1.225), получаем равенство $\lambda_j^{(6)} - \lambda_j^{0,(6)} = c^3(N\omega_j, \omega_j)$. Выберем $c = \pi^{1/3}|s(N\omega_j,\omega_j)|^{-1/3}$. Тогда $2\left|\sin\left(\frac{1}{2}s(\lambda_j^{(6)} - \lambda_j^{0,(6)})\right)\right| = 2$. Отсюда и из (1.240) следует, что функция $\varepsilon^{q_3/3-1}(c^2+\varepsilon^{2/3})^{-q_3/2}$ равномерно ограничена при малых ε. Но это неверно, если $q_3 < 3$. Мы приходим к противоречию.

Теперь пусть $\dim \mathfrak{N}_{q',q}^{\mathfrak{b}} > 1$. В силу (1.218), (1.224) выражение под знаком нормы в (1.239) допускает инвариантную запись:

$$\sum_{j'=j}^{j+k_{q',q}-1} \left(e^{-is\lambda_{j'}^{(6)}}(\,\cdot\,,\omega_{j'})\omega_{j'} - e^{-is\lambda_{j'}^{0,(6)}}(\,\cdot\,,\omega_{j'}^0)\omega_{j'}^0 \right) = e^{-is(c^3 P_{q',q}^{\mathfrak{b}} N|_{\mathfrak{N}_{q'q}^{\mathfrak{b}}} + \Upsilon^{(q',q)})} - e^{-is\Upsilon^{(q',q)}}. \tag{1.241}$$

Будем считать, что параметр c большой. Положим $\upsilon = c^{-3}$ и рассмотрим операторный пучок $P_{q',q}^{\mathfrak{b}} N|_{\mathfrak{N}_{q'q}^{\mathfrak{b}}} + \upsilon\Upsilon^{(q',q)}$. Согласно общей аналитической теории возмущений при достаточно малом υ существуют вещественно аналитические функции $\widetilde{\lambda}_{j'}^{(6)}(\upsilon)$ (ветви собственных значений) и вещественно аналитические $\mathfrak{N}_{q',q}^{\mathfrak{b}}$-значные функции $\widetilde{\omega}_{j'}(\upsilon)$ (ветви собственных векторов), такие что

$$P_{q',q}^{\mathfrak{b}}(N + \upsilon\Upsilon^{(q',q)})\widetilde{\omega}_{j'}(\upsilon) = \widetilde{\lambda}_{j'}^{(6)}(\upsilon)\widetilde{\omega}_{j'}(\upsilon), \qquad j' = j, \dots, j+k_{q',q}-1,$$

причём $\widetilde{\omega}_{j'}(\upsilon)$, $j' = j, \dots, j+k_{q',q}-1$, образуют ортонормированный базис в $\mathfrak{N}_{q',q}^{\mathfrak{b}}$. Для достаточно малого υ_* справедливы сходящиеся степенные разложения:

$$\widetilde{\lambda}_{j'}^{(6)}(\upsilon) = \chi_{j'} + \widetilde{\lambda}_{j'}^{(1,6)}\upsilon + \dots, \qquad |\upsilon| \leqslant \upsilon_*, \tag{1.242}$$

$$\widetilde{\omega}_{j'}(\upsilon) = \varpi_{j'} + \upsilon\widetilde{\omega}_{j'}^{(1)} + \dots, \qquad |\upsilon| \leqslant \upsilon_*. \tag{1.243}$$

Здесь $\chi_{j'}$ и $\varpi_{j'}$ — собственные числа и собственные векторы оператора $P^{\mathfrak{b}}_{q',q}N|_{\mathfrak{N}^{\mathfrak{b}}_{q',q}}$:

$$P^{\mathfrak{b}}_{q',q}N\varpi_{j'} = \chi_{j'}\varpi_{j'}, \qquad j' = j, \dots, j + k_{q',q} - 1. \tag{1.244}$$

Векторы $\varpi_{j'}$, $j' = j, \dots, j + k_{q',q} - 1$, образуют ортонормированный базис в $\mathfrak{N}^{\mathfrak{b}}_{q',q}$.

Далее, пусть $\widetilde{\omega}^0_{j'}$, $j' = j, \dots, j + k_{q',q} - 1$, — ортонормированные собственные векторы оператора $\Upsilon^{(q',q)}$: $\Upsilon^{(q',q)}\widetilde{\omega}^0_{j'} = \lambda^{0,(6)}_{j'}\widetilde{\omega}^0_{j'}$, $j' = j, \dots, j + k_{q',q} - 1$. Векторы $\widetilde{\omega}^0_{j'}$, $j' = j, \dots, j + k_{q',q} - 1$, образуют ортонормированный базис в $\mathfrak{N}^{\mathfrak{b}}_{q',q}$. Справедливо следующее равенство:

$$\begin{aligned} & e^{-is(c^3 P^{\mathfrak{b}}_{q',q}N|_{\mathfrak{N}^{\mathfrak{b}}_{q'q}} + \Upsilon^{(q',q)})} - e^{-is\Upsilon^{(q',q)}} \\ &= \sum_{j'=j}^{j+k_{q',q}-1} \left(e^{-is\lambda^{(6)}_{j'}(c)}(\,\cdot\,, \widetilde{\omega}_{j'}(c^{-3}))\widetilde{\omega}_{j'}(c^{-3}) - e^{-is\lambda^{0,(6)}_{j'}}(\,\cdot\,, \widetilde{\omega}^0_{j'})\widetilde{\omega}^0_{j'} \right), \end{aligned} \tag{1.245}$$

где $\lambda^{(6)}_{j'}(c) = c^3\widetilde{\lambda}^{(6)}_{j'}(c^{-3})$.

По условию $P^{\mathfrak{b}}_{q',q}NP^{\mathfrak{b}}_{q',q} \neq 0$. Тогда в силу (1.244) найдётся номер l такой, что $\chi_l \neq 0$. Применим оператор (1.245) к элементу $\widetilde{\omega}_l(c^{-3})$:

$$\begin{aligned} e^{-is\lambda^{(6)}_l(c)}\widetilde{\omega}_l(c^{-3}) - \sum_{j'=j}^{j+k_{q',q}-1} & e^{-is\lambda^{0,(6)}_{j'}}(\widetilde{\omega}_l(c^{-3}), \widetilde{\omega}^0_{j'})\widetilde{\omega}^0_{j'} \\ = \sum_{j'=j}^{j+k_{q',q}-1} & \left(e^{-is\lambda^{(6)}_l(c)} - e^{-is\lambda^{0,(6)}_{j'}} \right)(\widetilde{\omega}_l(c^{-3}), \widetilde{\omega}^0_{j'})\widetilde{\omega}^0_{j'}. \end{aligned} \tag{1.246}$$

Из (1.243) следует оценка

$$\left\| \widetilde{\omega}_{j'}(c^{-3}) - \varpi_{j'} \right\| = O\left(\frac{1}{c^3}\right), \qquad j' = j, \dots, j + k_{q',q} - 1, \tag{1.247}$$

при больших c. Ясно, что найдётся номер k такой, что $(\varpi_l, \widetilde{\omega}^0_k) \neq 0$, а значит, в силу (1.247) $(\widetilde{\omega}_l(c^{-3}), \widetilde{\omega}^0_k) \neq 0$ при достаточно больших c. Очевидно,

$$\left| e^{-is\lambda^{(6)}_l(c)} - e^{-is\lambda^{0,(6)}_k} \right| = 2\left| \sin\left(\frac{1}{2}s\left(\lambda^{(6)}_l(c) - \lambda^{0,(6)}_k \right) \right) \right|.$$

Воспользуемся рядами (1.242). Имеем при больших c:

$$\lambda^{(6)}_l(c) - \lambda^{0,(6)}_k = c^3\chi_l + \widetilde{\lambda}^{(1,6)}_l - \lambda^{0,(6)}_k + O\left(\frac{1}{c^3}\right).$$

Выберем c так, чтобы число $s(\lambda^{(6)}_l(c) - \lambda^{0,(6)}_k)$ попало в $\frac{\pi}{2}$-окрестность одной из точек множества $\pi + 2\pi\mathbb{Z}$. Тогда $2\left| \sin\left(\frac{1}{2}s(\lambda^{(6)}_l(c) - \lambda^{0,(6)}_k) \right) \right| \geqslant \sqrt{2}$.

Таким образом, из (1.239), (1.241), (1.245) и (1.246) следует, что справедлива оценка

$$\left|e^{-is\lambda_l^{(6)}(c)} - e^{-is\lambda_k^{0,(6)}}\right| \left|(\widetilde{\omega}_l(c^{-3}), \widetilde{\omega}_k^0)\right| \varepsilon^{q_3}(t^2+\varepsilon^2)^{-q_3/2} \leqslant \check{C}(s)\varepsilon, \quad t = c\varepsilon^{2/3}, \quad (1.248)$$

при всех достаточно малых ε, причём модули в левой части (1.248) не равны нулю. Поэтому функция $\varepsilon^{q_3/3-1}(c^2+\varepsilon^{2/3})^{-q_3/2}$ равномерно ограничена при малых ε, что неверно, если $q_3 < 3$. Полученное противоречие завершает доказательство. $\square$

1.5 Операторы вида $A(t) = M^*\widehat{A}(t)M$, $\mathfrak{B}(t,\varepsilon) = M^*\widehat{\mathfrak{B}}(t,\varepsilon)M$. Аппроксимация окаймлённых операторов $\cos(sA(t)^{1/2})$, $A(t)^{-1/2}\sin(sA(t)^{1/2})$, $e^{-isA(t)}$ и $e^{-is\mathfrak{B}(t,\varepsilon)}P$

1.5.1 Операторное семейство вида $A(t) = M^*\widehat{A}(t)M$

Наряду с пространством $\mathfrak{H}$ рассмотрим ещё одно сепарабельное гильбертово пространство $\widehat{\mathfrak{H}}$. Пусть $\widehat{X}(t) = \widehat{X}_0 + t\widehat{X}_1 \colon \widehat{\mathfrak{H}} \to \mathfrak{H}_*$ — семейство операторов того же вида, что и $X(t)$, причём для $\widehat{X}(t)$ выполнены предположения п. 1.1.1. Пусть $M \colon \mathfrak{H} \to \widehat{\mathfrak{H}}$ — изоморфизм. Предположим, что

$$M \operatorname{Dom} X_0 = \operatorname{Dom} \widehat{X}_0, \tag{1.249}$$

$X(t) = \widehat{X}(t)M$, а тогда и $X_0 = \widehat{X}_0 M$, $X_1 = \widehat{X}_1 M$. В $\widehat{\mathfrak{H}}$ введём семейство самосопряжённых операторов $\widehat{A}(t) = \widehat{X}(t)^*\widehat{X}(t)$. Тогда, очевидно,

$$A(t) = M^*\widehat{A}(t)M. \tag{1.250}$$

Все объекты, отвечающие семейству $\widehat{A}(t)$, далее помечаются значком "$\widehat{\ }$". Отметим, что $\widehat{\mathfrak{N}} = M\mathfrak{N}$ и $\widehat{\mathfrak{N}}_* = \mathfrak{N}_*$. В пространстве $\widehat{\mathfrak{H}}$ рассмотрим положительно определённый оператор

$$\mathfrak{Q} := (MM^*)^{-1}. \tag{1.251}$$

Пусть $\mathfrak{Q}_{\widehat{\mathfrak{N}}}$ — блок оператора $\mathfrak{Q}$ в $\widehat{\mathfrak{N}}$, т. е. $\mathfrak{Q}_{\widehat{\mathfrak{N}}} = \widehat{P}\mathfrak{Q}|_{\widehat{\mathfrak{N}}}$. Очевидно, $\mathfrak{Q}_{\widehat{\mathfrak{N}}}$ — изоморфизм в $\widehat{\mathfrak{N}}$.

Как показано в [22, предложение 1.2], ортопроектор P в $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{N}$ и ортопроектор $\widehat{P}$ в $\widehat{\mathfrak{H}}$ на $\widehat{\mathfrak{N}}$ связаны соотношением

$$P = M^{-1}(\mathfrak{Q}_{\widehat{\mathfrak{N}}})^{-1}\widehat{P}(M^*)^{-1}. \tag{1.252}$$

Пусть $\widehat{S}\colon \widehat{\mathfrak{N}} \to \widehat{\mathfrak{N}}$ — спектральный росток семейства $\widehat{A}(t)$ при $t = 0$, а S — росток семейства $A(t)$. В [13, гл. 1, п. 1.5] установлено следующее тождество:

$$S = PM^*\widehat{S}M|_{\mathfrak{N}}. \tag{1.253}$$

Мы предполагаем, что для $A(t)$ выполнено условие 1.1.10. Тогда росток S (как и $\widehat{S}$) невырожден.

1.5.2 Операторное семейство $\mathfrak{B}(t,\varepsilon) = M^*\widehat{\mathfrak{B}}(t,\varepsilon)M$

Пусть $\widehat{Y}(t) = \widehat{Y}_0 + t\widehat{Y}_1 \colon \widehat{\mathfrak{H}} \to \widetilde{\mathfrak{H}}$ — семейство операторов того же вида, что и $Y(t)$, причём для $\widehat{Y}(t)$ выполнены предположения п. 1.1.2. Пространство $\widetilde{\mathfrak{H}}$ при этом остаётся прежним. Положим $Y(t) = \widehat{Y}(t)M$, $M \operatorname{Dom} Y_0 = \operatorname{Dom} \widehat{Y}_0$, а тогда и $Y_0 = \widehat{Y}_0 M$, $Y_1 = \widehat{Y}_1 M$. Поскольку $\operatorname{Dom} \widehat{X}_0 \subset \operatorname{Dom} \widehat{Y}_0$ и выполнено (1.249), то справедливо $\operatorname{Dom} X_0 \subset \operatorname{Dom} Y_0$. В силу наших предположений $\widehat{X}(t)$ и $\widehat{Y}(t)$ удовлетворяют условию 1.1.1 с некоторой константой $\widehat{c}_1$:

$$\|\widehat{Y}(t)u\|_{\widetilde{\mathfrak{H}}} \leqslant \widehat{c}_1 \|\widehat{X}(t)u\|_{\mathfrak{H}_*}, \quad u \in \operatorname{Dom} \widehat{X}_0,\ t \in \mathbb{R}.$$

Тогда для $Y(t)$ условие 1.1.1 выполнено с той же константой $c_1 = \widehat{c}_1$:

$$\|Y(t)u\|_{\widetilde{\mathfrak{H}}} \leqslant c_1 \|X(t)u\|_{\mathfrak{H}_*}, \quad u \in \operatorname{Dom} X_0,\ t \in \mathbb{R}.$$

Теперь, пусть $\widehat{Y}_2 \colon \widehat{\mathfrak{H}} \to \widetilde{\mathfrak{H}}$ — оператор, удовлетворяющий требованиям п. 1.1.2. Положим $Y_2 = \widehat{Y}_2 M$, $M \operatorname{Dom} Y_2 = \operatorname{Dom} \widehat{Y}_2$. Поскольку $\operatorname{Dom} \widehat{X}_0 \subset \operatorname{Dom} \widehat{Y}_2$ и выполнено (1.249), то $\operatorname{Dom} X_0 \subset \operatorname{Dom} Y_2$. Пусть условие 1.1.2 для $\widehat{Y}_2$ выполнено с некоторой константой $\widehat{C}(\nu_*) > 0$. Тогда

$$\|Y_2 u\|^2_{\widetilde{\mathfrak{H}}} \leqslant \nu_* \|X(t)u\|^2_{\mathfrak{H}_*} + C(\nu_*)\|u\|^2_{\mathfrak{H}}, \quad u \in \operatorname{Dom} X_0,\ t \in \mathbb{R},$$

для любого $\nu_* > 0$ с константой $C(\nu_*) = \widehat{C}(\nu_*)\|M\|^2 > 0$.

Далее, пусть $\widehat{\mathfrak{q}}[u,v]$ — форма, заданная на пространстве $\widehat{\mathfrak{H}}$, для которой выполнено условие 1.1.3 с постоянными $\widehat{\kappa}$, $\widehat{c}_0$, $\widehat{c}_2$, $\widehat{c}_3$. Введём в рассмотрение форму $\mathfrak{q}[u,v] = \widehat{\mathfrak{q}}[Mu, Mv]$, $M \operatorname{Dom} \mathfrak{q} = \operatorname{Dom} \widehat{\mathfrak{q}}$. Условие 1.1.3 для формы $\mathfrak{q}$ выполнено с константами

$$c_0 = \|M\|^2 \widehat{c}_0, \quad \text{если } \widehat{c}_0 \geqslant 0, \quad c_0 = \|M^{-1}\|^{-2} \widehat{c}_0, \quad \text{если } \widehat{c}_0 < 0,$$
$$\kappa = \widehat{\kappa}, \qquad c_2 = \widehat{c}_2, \quad c_3 = \|M\|^2 \widehat{c}_3. \tag{1.254}$$

Постоянную c_4 можно выбрать следующим образом:

$$c_4 = \|M\|^2 \widehat{c}_4, \tag{1.255}$$

где $\widehat{c}_4 = 4\widehat{\kappa}^{-1}\widehat{c}_1^2 \widehat{C}(\nu_*)$ при $\nu_* = \widehat{\kappa}^2 (16\widehat{c}_1^2)^{-1}$.

Пусть $\widehat{Q}_0$ — ограниченный положительно определённый оператор в $\widehat{\mathfrak{H}}$. Тогда $Q_0 = M^* \widehat{Q}_0 M$ — ограниченный положительно определённый оператор в $\mathfrak{H}$.

Рассмотрим операторные пучки вида

$$\widehat{\mathfrak{B}}(t,\varepsilon) = \widehat{A}(t) + \varepsilon(\widehat{Y}_2^* \widehat{Y}(t) + \widehat{Y}(t)^* \widehat{Y}_2) + \varepsilon^2 \widehat{Q} + \lambda \varepsilon^2 \widehat{Q}_0, \tag{1.256}$$
$$\mathfrak{B}(t,\varepsilon) = A(t) + \varepsilon(Y_2^* Y(t) + Y(t)^* Y_2) + \varepsilon^2 Q + \lambda \varepsilon^2 Q_0.$$

Они связаны соотношением

$$\mathfrak{B}(t,\varepsilon) = M^* \widehat{\mathfrak{B}}(t,\varepsilon) M. \tag{1.257}$$

Параметр λ выберем так, чтобы выполнялось условие (1.6) для пучка $\mathfrak{B}(t,\varepsilon)$. В силу (1.254), (1.255) и связи $Q_0 = M^* \widehat{Q}_0 M$, получаем, что условие (1.6) выполнено и для пучка $\widehat{\mathfrak{B}}(t,\varepsilon)$.

Отметим, что для оператора $\widehat{\mathfrak{B}}(t,\varepsilon)$ соотношения (1.7) имеют вид

$$\widehat{\beta} = \lambda \|\widehat{Q}_0^{-1}\|^{-1} - \widehat{c}_0 - \widehat{c}_4, \qquad \text{если } \lambda \geqslant 0,$$
$$\widehat{\beta} = \lambda \|\widehat{Q}_0\| - \widehat{c}_0 - \widehat{c}_4, \qquad \text{если } \lambda < 0 \text{ и } \widehat{c}_0 + \widehat{c}_4 < 0.$$

Тогда из (1.254), (1.255) вытекает оценка

$$\beta \leqslant \|M\|^2 \widehat{\beta}, \qquad \text{если } \lambda \geqslant 0,$$
$$\beta \leqslant \|M^{-1}\|^{-2} \widehat{\beta}, \qquad \text{если } \lambda < 0.$$

В [33, лемма 1.7] были установлены следующие равенства:

$$\widehat{X}_0 \widehat{Z} M|_{\mathfrak{N}} = X_0 Z|_{\mathfrak{N}}, \quad \widehat{X}_0 \widehat{\widetilde{Z}} M|_{\mathfrak{N}} = X_0 \widetilde{Z}|_{\mathfrak{N}}. \tag{1.258}$$

Пусть $\widehat{\mathcal{S}}(\vartheta) \colon \widehat{\mathfrak{N}} \to \widehat{\mathfrak{N}}$ — спектральный росток семейства $\widehat{\mathfrak{B}}(t,\varepsilon)$, а $\mathcal{S}(\vartheta)$ — росток семейства $\mathfrak{B}(t,\varepsilon)$. Из (1.24), (1.253), (1.258) и равенств $PM^* = PM^* \widehat{P}$, $Y_1 = \widehat{Y}_1 M$, $Y_2 = \widehat{Y}_2 M$, $Q = M^* \widehat{Q} M$, $Q_0 = M^* \widehat{Q}_0 M$ следует тождество

$$\mathcal{S}(\vartheta) = PM^* \widehat{\mathcal{S}}(\vartheta) M|_{\mathfrak{N}}. \tag{1.259}$$

1.5.3 Операторы $\widehat{Z}_{\mathfrak{Q}}$ и $\widehat{N}_{\mathfrak{Q}}$

Введём оператор $\widehat{Z}_{\mathfrak{Q}}$, действующий в $\widehat{\mathfrak{H}}$ и сопоставляющий элементу $\widehat{u} \in \widehat{\mathfrak{H}}$ слабое решение $\widehat{\varphi}_{\mathfrak{Q}} \in \operatorname{Dom} \widehat{X}_0$ задачи

$$\widehat{X}_0^*(\widehat{X}_0\widehat{\varphi}_{\mathfrak{Q}} + \widehat{X}_1\widehat{\omega}) = 0, \quad \mathfrak{Q}\widehat{\varphi}_{\mathfrak{Q}} \perp \widehat{\mathfrak{N}},$$

где $\widehat{\omega} = \widehat{P}\widehat{u}$. Как показано в [14, §6], оператор Z для семейства $A(t)$ и оператор $\widehat{Z}_{\mathfrak{Q}}$ связаны соотношением

$$\widehat{Z}_{\mathfrak{Q}} = MZM^{-1}\widehat{P}. \tag{1.260}$$

Далее, положим

$$\widehat{N}_{\mathfrak{Q}} := \widehat{Z}_{\mathfrak{Q}}^*\widehat{X}_1^*\widehat{R}\widehat{P} + (\widehat{R}\widehat{P})^*\widehat{X}_1\widehat{Z}_{\mathfrak{Q}}. \tag{1.261}$$

Согласно [14, §6], оператор N для семейства $A(t)$ и введённый оператор (1.261) связаны соотношением

$$\widehat{N}_{\mathfrak{Q}} = \widehat{P}(M^*)^{-1}NM^{-1}\widehat{P}. \tag{1.262}$$

Напомним, что $N = N_0 + N_*$ и определим операторы

$$\widehat{N}_{0,\mathfrak{Q}} = \widehat{P}(M^*)^{-1}N_0M^{-1}\widehat{P}, \quad \widehat{N}_{*,\mathfrak{Q}} = \widehat{P}(M^*)^{-1}N_*M^{-1}\widehat{P}. \tag{1.263}$$

Тогда $\widehat{N}_{\mathfrak{Q}} = \widehat{N}_{0,\mathfrak{Q}} + \widehat{N}_{*,\mathfrak{Q}}$. Следующая лемма доказана в [57, лемма 5.1].

Лемма 1.5.1 ([57]). *Пусть выполнены предположения п. 1.5.1. Пусть операторы N и N_0 определены в (1.32) и (1.50), а операторы $\widehat{N}_{\mathfrak{Q}}$ и $\widehat{N}_{0,\mathfrak{Q}}$ определены в (1.261) и (1.263). Тогда условие $N = 0$ равносильно равенству $\widehat{N}_{\mathfrak{Q}} = 0$. Условие $N_0 = 0$ равносильно равенству $\widehat{N}_{0,\mathfrak{Q}} = 0$.*

1.5.4 Операторы $\widehat{Z}_{2,\mathfrak{Q}}$, $\widehat{R}_{2,\mathfrak{Q}}$ и $\widehat{N}^0_{1,\mathfrak{Q}}$

Пусть $\widehat{\omega} \in \widehat{\mathfrak{N}}$ и пусть $\widehat{\psi}_{\mathfrak{Q}} = \widehat{\psi}_{\mathfrak{Q}}(\widehat{\omega}) \in \operatorname{Dom} \widehat{X}_0$ — (слабое) решение задачи

$$\widehat{X}_0^*(\widehat{X}_0\widehat{\psi}_{\mathfrak{Q}} + \widehat{X}_1\widehat{Z}_{\mathfrak{Q}}\widehat{\omega}) = -\widehat{X}_1^*\widehat{R}\widehat{\omega} + \mathfrak{Q}\mathfrak{Q}_{\widehat{\mathfrak{N}}}^{-1}\widehat{P}\widehat{X}_1^*\widehat{R}\widehat{\omega}, \qquad \mathfrak{Q}\widehat{\psi}_{\mathfrak{Q}} \perp \widehat{\mathfrak{N}}.$$

Ясно, что правая часть уравнения принадлежит $\widehat{\mathfrak{N}}^{\perp} = \operatorname{Ran}\widehat{X}_0^*$, а потому условие разрешимости выполнено. Определим оператор $\widehat{Z}_{2,\mathfrak{Q}}\colon \widehat{\mathfrak{H}} \to \widehat{\mathfrak{H}}$ соотношением $\widehat{Z}_{2,\mathfrak{Q}}\widehat{u} = \widehat{\psi}_{\mathfrak{Q}}(\widehat{P}\widehat{u})$, $\widehat{u} \in \widehat{\mathfrak{H}}$. Далее, определим оператор $\widehat{R}_{2,\mathfrak{Q}}\colon \widehat{\mathfrak{N}} \to \mathfrak{H}_*$ формулой $\widehat{R}_{2,\mathfrak{Q}} := \widehat{X}_0\widehat{Z}_{2,\mathfrak{Q}} + \widehat{X}_1\widehat{Z}_{\mathfrak{Q}}$. Положим

$$\widehat{N}_{1,\mathfrak{Q}}^0 = \widehat{Z}_{2,\mathfrak{Q}}^*\widehat{X}_1^*\widehat{R}\widehat{P} + (\widehat{R}\widehat{P})^*\widehat{X}_1\widehat{Z}_{2,\mathfrak{Q}} + \widehat{R}_{2,\mathfrak{Q}}^*\widehat{R}_{2,\mathfrak{Q}}\widehat{P}.$$

В [25, п. 6.3] установлены следующие тождества:

$$\begin{gathered}\widehat{Z}_{2,\mathfrak{Q}} = MZ_2M^{-1}\widehat{P}, \quad \widehat{R}_{2,\mathfrak{Q}} = R_2M^{-1}|_{\widehat{\mathfrak{N}}},\\ \widehat{N}_{1,\mathfrak{Q}}^0 = \widehat{P}(M^*)^{-1}N_1^0M^{-1}\widehat{P}.\end{gathered} \tag{1.264}$$

1.5.5 Связь операторов и коэффициентов степенных разложений

Укажем связь коэффициентов степенных разложений (1.19), (1.20) и операторов $\widehat{S}$ и $\mathfrak{Q}_{\widehat{\mathfrak{N}}}$. (См. [15, п. 1.6, 1.7].) Положим $\zeta_l^{\mathfrak{a}} := M\omega_l^{\mathfrak{a}} \in \widehat{\mathfrak{N}}$, $l = 1,\dots,n$. Тогда из (1.21) и (1.252), (1.253) видно, что

$$\widehat{S}\zeta_l^{\mathfrak{a}} = \gamma_l^{\mathfrak{a}}\mathfrak{Q}_{\widehat{\mathfrak{N}}}\zeta_l^{\mathfrak{a}}, \qquad l = 1,\dots,n. \tag{1.265}$$

Набор $\zeta_1^{\mathfrak{a}},\dots,\zeta_n^{\mathfrak{a}}$ образует базис в $\widehat{\mathfrak{N}}$, ортонормированный с весом $\mathfrak{Q}_{\widehat{\mathfrak{N}}}$:

$$(\mathfrak{Q}_{\widehat{\mathfrak{N}}}\zeta_l^{\mathfrak{a}},\zeta_j^{\mathfrak{a}}) = \delta_{lj}, \qquad l,j = 1,\dots,n. \tag{1.266}$$

Операторы $\widehat{N}_{0,\mathfrak{Q}}$ и $\widehat{N}_{*,\mathfrak{Q}}$ можно описать в терминах коэффициентов степенных разложений (1.19) и (1.20); ср. (1.31). Положим $\widetilde{\zeta}_l^{\mathfrak{a}} := M\widetilde{\omega}_l^{\mathfrak{a}} \in \widehat{\mathfrak{N}}$, $l = 1,\dots,n$. Тогда

$$\begin{aligned}\widehat{N}_{0,\mathfrak{Q}} &= \sum_{k=1}^{n}\mu_k^{\mathfrak{a}}(\cdot,\mathfrak{Q}_{\widehat{\mathfrak{N}}}\zeta_k^{\mathfrak{a}})\mathfrak{Q}_{\widehat{\mathfrak{N}}}\zeta_k^{\mathfrak{a}},\\ \widehat{N}_{*,\mathfrak{Q}} &= \sum_{k=1}^{n}\gamma_k^{\mathfrak{a}}\Big((\cdot,\mathfrak{Q}_{\widehat{\mathfrak{N}}}\widetilde{\zeta}_k^{\mathfrak{a}})\mathfrak{Q}_{\widehat{\mathfrak{N}}}\zeta_k^{\mathfrak{a}} + (\cdot,\mathfrak{Q}_{\widehat{\mathfrak{N}}}\zeta_k^{\mathfrak{a}})\mathfrak{Q}_{\widehat{\mathfrak{N}}}\widetilde{\zeta}_k^{\mathfrak{a}}\Big).\end{aligned} \tag{1.267}$$

Замечание 1.5.2. *В силу* (1.266) *и* (1.267) *выполнены соотношения*

$$\begin{aligned}(\widehat{N}_{0,\mathfrak{Q}}\zeta_j^{\mathfrak{a}},\zeta_l^{\mathfrak{a}}) &= \mu_l^{\mathfrak{a}}\delta_{jl}, && j,l = 1,\dots,n,\\ (\widehat{N}_{*,\mathfrak{Q}}\zeta_j^{\mathfrak{a}},\zeta_l^{\mathfrak{a}}) &= \gamma_l^{\mathfrak{a}}(\zeta_j,\mathfrak{Q}_{\widehat{\mathfrak{N}}}\widetilde{\zeta}_l^{\mathfrak{a}}) + \gamma_j^{\mathfrak{a}}(\mathfrak{Q}_{\widehat{\mathfrak{N}}}\widetilde{\zeta}_j^{\mathfrak{a}},\zeta_l^{\mathfrak{a}}), && j,l = 1,\dots,n,\end{aligned}$$

Соотношения (1.22) *влекут* $(\mathfrak{Q}_{\widehat{\mathfrak{N}}}\widetilde{\zeta}_j^{\mathfrak{a}},\zeta_l^{\mathfrak{a}}) + (\zeta_j^{\mathfrak{a}},\mathfrak{Q}_{\widehat{\mathfrak{N}}}\widetilde{\zeta}_l^{\mathfrak{a}}) = 0$, $j,l = 1,\dots,n$. *Отсюда видно, что* $(\widehat{N}_{*,\mathfrak{Q}}\zeta_j^{\mathfrak{a}},\zeta_l^{\mathfrak{a}}) = 0$, *если* $\gamma_j^{\mathfrak{a}} = \gamma_l^{\mathfrak{a}}$.

Перейдём к обозначениям из п. 1.1.11. Напомним, что различные собственные значения ростка S обозначаются через $\gamma_j^{\mathfrak{a},\circ}$, $j=1,\dots,p$, а соответствующие собственные подпространства через $\mathfrak{N}_j$. Векторы $\omega_i^{\mathfrak{a},(j)}$, $i=1,\dots,k_j$, образуют ортонормированный базис в $\mathfrak{N}_j$. Тогда те же числа $\gamma_j^{\mathfrak{a},\circ}$, $j=1,\dots,p$, — это различные собственные значения задачи (1.265), а

$$M\mathfrak{N}_j = \operatorname{Ker}(\widehat{S}-\gamma_j^{\mathfrak{a},\circ}\mathfrak{Q}_{\widehat{\mathfrak{N}}}) =: \widehat{\mathfrak{N}}_{j,\mathfrak{Q}}$$

— соответствующие собственные подпространства. Векторы $\zeta_i^{\mathfrak{a},(j)} = M\omega_i^{\mathfrak{a},(j)}$, $i=1,\dots,k_j$, образуют базис в $\widehat{\mathfrak{N}}_{j,\mathfrak{Q}}$, ортонормированный с весом $\mathfrak{Q}_{\widehat{\mathfrak{N}}}$. Через $\mathcal{P}_j$ обозначим "косой" проектор на $\widehat{\mathfrak{N}}_{j,\mathfrak{Q}}$, ортогональный относительно скалярного произведения $(\mathfrak{Q}_{\widehat{\mathfrak{N}}}\cdot,\cdot)$, т. е. $\mathcal{P}_j=\sum_{i=1}^{k_j}(\cdot,\mathfrak{Q}_{\widehat{\mathfrak{N}}}\zeta_i^{\mathfrak{a},(j)})\zeta_i^{\mathfrak{a},(j)}$, $j=1,\dots,p$. Легко видеть, что $\mathcal{P}_j = MP_jM^{-1}\widehat{P}$. Используя (1.50), (1.262) и (1.263), нетрудно получить инвариантные представления

$$\widehat{N}_{0,\mathfrak{Q}} = \sum_{j=1}^{p}\mathcal{P}_j^*\widehat{N}_{\mathfrak{Q}}\mathcal{P}_j, \quad \widehat{N}_{*,\mathfrak{Q}} = \sum_{1\leqslant l,j\leqslant p:\ l\neq j}\mathcal{P}_l^*\widehat{N}_{\mathfrak{Q}}\mathcal{P}_j. \tag{1.268}$$

Далее, можно указать связь между собственными числами и собственными векторами задачи (1.58) и оператором $\widehat{N}_{\mathfrak{Q}}$. Пусть $\gamma_q^{\mathfrak{a},\circ}$ — k_q-кратное собственное значение задачи (1.265). Тогда из (1.262) и очевидного равенства $MP_q = \widehat{P}_{q,\mathfrak{Q}}MP_q$, где $\widehat{P}_{q,\mathfrak{Q}}$ — ортопроектор на подпространство $\widehat{\mathfrak{N}}_{q,\mathfrak{Q}}$, видно, что

$$\widehat{P}_{q,\mathfrak{Q}}\widehat{N}_{\mathfrak{Q}}\zeta_l^{\mathfrak{a}} = \mu_l^{\mathfrak{a}}\mathfrak{Q}_{\widehat{\mathfrak{N}}_{q,\mathfrak{Q}}}\zeta_l^{\mathfrak{a}}, \qquad l=i(q),\dots,i(q)+k_q-1, \tag{1.269}$$

где $\mathfrak{Q}_{\widehat{\mathfrak{N}}_{q,\mathfrak{Q}}} = \widehat{P}_{q,\mathfrak{Q}}\mathfrak{Q}_{\widehat{\mathfrak{N}}}|_{\widehat{\mathfrak{N}}_{q,\mathfrak{Q}}}$. Напомним, что различные собственные значения задачи (1.58) обозначаются через $\mu_{q',q}^{\mathfrak{a},\circ}$, $q'=1,\dots,p'(q)$, а соответствующие собственные подпространства через $\mathfrak{N}_{q',q}^{\mathfrak{a}}$. Тогда те же числа $\mu_{q',q}^{\mathfrak{a},\circ}$, $q'=1,\dots,p'(q)$, — это различные собственные значения задачи (1.269), а $M\mathfrak{N}_{q',q}^{\mathfrak{a}} =: \widehat{\mathfrak{N}}_{q',q,\mathfrak{Q}}^{\mathfrak{a}}$ — соответствующие собственные подпространства.

Наконец, свяжем собственные числа и собственные векторы задачи (1.60) и оператор

$$\widehat{\mathcal{N}}_{\mathfrak{Q}}^{(q',q)} = \widehat{P}_{q',q,\mathfrak{Q}}^{\mathfrak{a}}\left(\widehat{N}_{1,\mathfrak{Q}}^{0} - \mathscr{W}_{\mathfrak{Q}} - \mathscr{W}_{\mathfrak{Q}}^*\right)\Big|_{\widehat{\mathfrak{N}}_{q',q,\mathfrak{Q}}^{\mathfrak{a}}} + \widehat{\mathcal{N}}_{0,\mathfrak{Q}}^{(q',q)},$$

где $\mathscr{W}_{\mathfrak{Q}} := \frac{1}{2}\widehat{Z}_{\mathfrak{Q}}^*\mathfrak{Q}\widehat{Z}_{\mathfrak{Q}}\mathfrak{Q}^{-1}\widehat{S}\widehat{P}$, а $\widehat{\mathcal{N}}_{0,\mathfrak{Q}}^{(q',q)}$ — оператор в $\widehat{\mathfrak{N}}_{q',q,\mathfrak{Q}}^{\mathfrak{a}}$, порождённый формой

$$\widehat{\mathfrak{n}}_{0,\mathfrak{Q}}^{(q',q)}[\cdot,\cdot] = \sum_{\substack{j\in\{1,\dots,p\}\\ j\neq q}}\frac{(\widehat{P}_{j,\mathfrak{Q}}\mathfrak{Q}^{-1}\widehat{P}_{j,\mathfrak{Q}}\widehat{N}_{\mathfrak{Q}}\cdot,\widehat{N}_{\mathfrak{Q}}\cdot)}{\gamma_q^{\mathfrak{a},\circ}-\gamma_j^{\mathfrak{a},\circ}},$$

а $\widehat{P}^{\mathfrak{a}}_{q',q,\mathfrak{Q}}$ — ортопроектор на подпространство $\widehat{\mathfrak{N}}^{\mathfrak{a}}_{q',q,\mathfrak{Q}}$. Из (1.253), (1.260), (1.264) и равенств $MP_j = \widehat{P}_{j,\mathfrak{Q}}MP_j$, $\widehat{P}_{j,\mathfrak{Q}}M(I-P_j) = 0$, $j = 1,\dots,p$, $MP^{\mathfrak{a}}_{q',q} = \widehat{P}^{\mathfrak{a}}_{q',q,\mathfrak{Q}}MP^{\mathfrak{a}}_{q',q}$, видно, что

$$\widehat{\mathcal{N}}^{(q',q)}_{\mathfrak{Q}}\zeta^{\mathfrak{a}}_l = \nu^{\mathfrak{a}}_l\mathfrak{Q}_{\widehat{\mathfrak{N}}^{\mathfrak{a}}_{q',q,\mathfrak{Q}}}\zeta^{\mathfrak{a}}_l, \qquad l = i',\dots,i'+k_{q',q}-1. \tag{1.270}$$

Здесь $i' = i'(q',q) = i(q) + k_{1,q} + \ldots + k_{q'-1,q}$ и $\mathfrak{Q}_{\widehat{\mathfrak{N}}^{\mathfrak{a}}_{q',q,\mathfrak{Q}}} = \widehat{P}^{\mathfrak{a}}_{q',q,\mathfrak{Q}}\mathfrak{Q}|_{\widehat{\mathfrak{N}}^{\mathfrak{a}}_{q',q,\mathfrak{Q}}}$.

Замечание 1.5.3. *Пусть $\widehat{N}_{0,\mathfrak{Q}} = 0$. В силу (1.267) это условие равносильно соотношениям $\mu^{\mathfrak{a}}_l = 0$ при всех $l = 1,\dots,n$. В таком случае $\mathfrak{N}^{\mathfrak{a}}_{1,q} = \mathfrak{N}_q$, $q = 1,\dots,p$. Тогда мы будем писать $\widehat{\mathcal{N}}^{(q)}_{\mathfrak{Q}}$ вместо $\widehat{\mathcal{N}}^{(1,q)}_{\mathfrak{Q}}$.*

Замечание 1.5.4. *Пусть $\widehat{\mathcal{N}}^{(q',q)}_{\mathfrak{Q}} \neq 0$ при некоторых q и q'. Тогда, согласно (1.270), $\nu^{\mathfrak{a}}_l \neq 0$ для некоторого $l = i'(q',q),\dots,i'(q',q)+k_{q',q}-1$. Из (1.60) прямо следует, что в этом случае выполнено $\mathcal{N}^{(q',q)} \neq 0$.*

1.5.6 Аппроксимация окаймлённых операторов $\cos(\varepsilon^{-1}sA(t)^{1/2})$, $A(t)^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}sA(t)^{1/2})$, $e^{-i\varepsilon^{-2}sA(t)}$ и $e^{-i\varepsilon^{-2}s\mathfrak{B}(t,\varepsilon)}P$

В этом пункте мы находим аппроксимации для операторов $\cos(\varepsilon^{-1}sA(t)^{1/2})$, $A(t)^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}sA(t)^{1/2})$, $e^{-i\varepsilon^{-2}sA(t)}$ и $e^{-i\varepsilon^{-2}s\mathfrak{B}(t,\varepsilon)}P$ семейств вида (1.250), (1.257) в терминах ростков $\widehat{S}$, $\widehat{\mathcal{S}}(\vartheta)$ операторов $\widehat{A}(t)$, $\widehat{\mathfrak{B}}(t,\varepsilon)$ и изоморфизма M. При этом оказывается удобным окаймить рассматриваемые операторы подходящими множителями.

Положим

$$M_0 := (\mathfrak{Q}_{\widehat{\mathfrak{N}}})^{-1/2}. \tag{1.271}$$

Предложение 1.5.5. *Справедливы тождества*

$$M\cos(s(t^2S)^{1/2})PM^* = M_0\cos(s(t^2M_0\widehat{S}M_0)^{1/2})M_0\widehat{P}, \tag{1.272}$$

$$\begin{aligned} &M(t^2S)^{-1/2}\sin(s(t^2S)^{1/2})PM^* \\ &\qquad = M_0(t^2M_0\widehat{S}M_0)^{-1/2}\sin(s(t^2M_0\widehat{S}M_0)^{1/2})M_0\widehat{P}, \end{aligned} \tag{1.273}$$

$$\begin{aligned} &M(t^2S)^{-1/2}\sin(s(t^2S)^{1/2})M^{-1}\widehat{P} \\ &\qquad = M_0(t^2M_0\widehat{S}M_0)^{-1/2}\sin(s(t^2M_0\widehat{S}M_0)^{1/2})M_0^{-1}\widehat{P}, \end{aligned} \tag{1.274}$$

$$Me^{-ist^2 S}PM^* = M_0 e^{-ist^2 M_0 \widehat{S} M_0} M_0 \widehat{P}, \tag{1.275}$$

$$Me^{-is\tau^2 \mathcal{S}(\vartheta)P}PM^* = M_0 e^{-is\tau^2 M_0 \widehat{\mathcal{S}}(\vartheta) M_0} M_0 \widehat{P}. \tag{1.276}$$

Доказательство. Соотношения (1.272), (1.275) проверены в [54, предложения 3.3, 3.1], а (1.273) получается из (1.272) интегрированием по s. Наконец, соотношение (1.274) вытекает из (1.273) домножением справа на $M_0^{-2}\widehat{P} = \mathfrak{Q}_{\widehat{\mathfrak{N}}}\widehat{P}$ с учётом (1.252).

Докажем (1.276). Пусть $\varphi \in \mathfrak{H}$. Рассмотрим задачу Коши для $U(s) \in \mathfrak{N}$:

$$i\frac{d}{ds}U(s) = \tau^2 \mathcal{S}(\vartheta)U(s), \quad U(0) = PM^*\varphi. \tag{1.277}$$

Очевидно, $U(s) = e^{-is\tau^2 \mathcal{S}(\vartheta)P}PM^*\varphi$ — решение этой задачи. Используя (1.259) и принимая во внимание равенство $PM^* = M^{-1}M_0^2\widehat{P}$ (которое следует из (1.252) и (1.271)), получаем, что задача (1.277) эквивалентна следующей задаче:

$$i\frac{d}{ds}U(s) = \tau^2 M^{-1}M_0^2 \widehat{\mathcal{S}}(\vartheta) M_0^2 (M^*)^{-1}U(s), \quad U(0) = M^{-1}M_0^2\widehat{P}\varphi.$$

Сделаем замену $\widehat{U}(s) = M_0^{-1}MU(s)$. Учитывая (1.251) и (1.271), получаем, что $\widehat{U}(s)$ является решением задачи

$$i\frac{d}{ds}\widehat{U}(s) = \tau^2 M_0 \widehat{\mathcal{S}}(\vartheta) M_0 \widehat{U}(s), \quad \widehat{U}(0) = M_0\widehat{P}\varphi.$$

Её решение: $\widehat{U}(s) = e^{-is\tau^2 M_0 \widehat{\mathcal{S}}(\vartheta) M_0} M_0\widehat{P}\varphi$. Из равенства $M_0\widehat{U}(s) = MU(s)$ следует (1.276). $\square$

Введём обозначения

$$J_1(t,s) := M\cos(sA(t)^{1/2})M^{-1}\widehat{P} - M_0\cos(s(t^2 M_0\widehat{S}M_0)^{1/2})M_0^{-1}\widehat{P}, \tag{1.278}$$

$$\begin{aligned} J_{2,a}(t,s) :=& MA(t)^{-1/2}\sin(sA(t)^{1/2})M^{-1}\widehat{P} \\ &- M_0(t^2 M_0\widehat{S}M_0)^{-1/2}\sin(s(t^2 M_0\widehat{S}M_0)^{1/2})M_0^{-1}\widehat{P}, \end{aligned} \tag{1.279}$$

$$\begin{aligned} \widetilde{J}_{2,b}(t,s) :=& MA(t)^{-1/2}\sin(sA(t)^{1/2})PM^* \\ &- M_0(t^2 M_0\widehat{S}M_0)^{-1/2}\sin(s(t^2 M_0\widehat{S}M_0)^{1/2})M_0\widehat{P}, \end{aligned} \tag{1.280}$$

$$\begin{aligned} J_{2,b}(t,s) :=& MA(t)^{-1/2}\sin(sA(t)^{1/2})M^*\widehat{P} \\ &- M_0(t^2 M_0\widehat{S}M_0)^{-1/2}\sin(s(t^2 M_0\widehat{S}M_0)^{1/2})M_0\widehat{P}, \end{aligned} \tag{1.281}$$

$$J_3(t,s) := Me^{-isA(t)}M^{-1}\widehat{P} - M_0 e^{-ist^2 M_0\widehat{S}M_0}M_0^{-1}\widehat{P}, \tag{1.282}$$

$$J_4(t,\varepsilon,s) := Me^{-is\mathfrak{B}(t,\varepsilon)}M^{-1}\widehat{P} - M_0 e^{-isM_0\widehat{L}(t,\varepsilon)M_0}M_0^{-1}\widehat{P}. \tag{1.283}$$

Лемма 1.5.6. *Пусть* $\mathcal{J}_i(t,s)$, $i = 1,2,3$, $\mathcal{J}_4(t,\varepsilon,s)$ *определены в* (1.114), (1.115), (1.120), (1.123). *Пусть выполнены предположения п.* 1.5.1. *Тогда справедливы оценки*

$$\|J_1(t,s)\| \leqslant \|M\|\|M^{-1}\|\|\mathcal{J}_1(t,s)\|, \tag{1.284}$$

$$\|J_{2,a}(t,s)\| \leqslant \|M\|\|M^{-1}\|\|\mathcal{J}_2(t,s)\|, \tag{1.285}$$

$$\|\widetilde{J}_{2,b}(t,s)\| \leqslant \|M\|^2\|\mathcal{J}_2(t,s)\|, \tag{1.286}$$

$$\|J_3(t,s)\| \leqslant \|M\|\|M^{-1}\|\|\mathcal{J}_3(t,s)\|, \tag{1.287}$$

$$\|J_4(t,\varepsilon,s)\| \leqslant \|M\|\|M^{-1}\|\|\mathcal{J}_4(t,\varepsilon,s)\|, \tag{1.288}$$

$$\|\mathcal{J}_1(t,s)\| \leqslant \|M\|^2\|M^{-1}\|^2\|J_1(t,s)\|, \tag{1.289}$$

$$\|\mathcal{J}_2(t,s)\| \leqslant \|M\|^2\|M^{-1}\|^2\|J_{2,a}(t,s)\|, \tag{1.290}$$

$$\|\mathcal{J}_2(t,s)\| \leqslant \|M^{-1}\|^2\|\widetilde{J}_{2,b}(t,s)\|, \tag{1.291}$$

$$\|\mathcal{J}_3(t,s)\| \leqslant \|M\|^2\|M^{-1}\|^2\|J_3(t,s)\|, \tag{1.292}$$

$$\|\mathcal{J}_4(t,\varepsilon,s)\| \leqslant \|M\|^2\|M^{-1}\|^2\|J_4(t,\varepsilon,s)\|. \tag{1.293}$$

Доказательство. Из (1.114), (1.115), (1.272), (1.273) с учётом равенств $M_0 = (\mathfrak{Q}_{\widehat{\mathfrak{N}}})^{-1/2}$ и $M^{-1}\mathfrak{Q}_{\widehat{\mathfrak{N}}}^{-1}\widehat{P} = PM^*$ (см. (1.252)) получаем

$$J_1(t,s) = M\mathcal{J}_1(t,s)M^{-1}\widehat{P}, \qquad J_{2,a}(t,s) = M\mathcal{J}_2(t,s)M^{-1}\widehat{P}. \tag{1.294}$$

Отсюда следуют оценки (1.284), (1.285).

Оценки (1.289), (1.290) проверяются аналогичными рассуждениями “обратным ходом”. Очевидно,

$$\|\mathcal{J}_j(t,s)\| \leqslant \|M^{-1}\|^2\|M\mathcal{J}_j(t,s)PM^*\|, \qquad j = 1,2. \tag{1.295}$$

В силу (1.294) правые части могут быть записаны в виде $\|M^{-1}\|^2\|J_1(t,s)\mathfrak{Q}_{\widehat{\mathfrak{N}}}^{-1}\widehat{P}\|$, $\|M^{-1}\|^2\|J_{2,a}(t,s)\mathfrak{Q}_{\widehat{\mathfrak{N}}}^{-1}\widehat{P}\|$. Отсюда и из неравенства $\|\mathfrak{Q}_{\widehat{\mathfrak{N}}}^{-1}\widehat{P}\| \leqslant \|M\|^2$ (которое вытекает из тождества $\mathfrak{Q}_{\widehat{\mathfrak{N}}}^{-1}\widehat{P} = MPM^*$), получаем (1.289), (1.290).

Оценки (1.286) и (1.291) прямо следуют из (1.273) и (1.295) при $j = 2$. Неравенства (1.287), (1.292) проверены в [57, лемма 5.3]; оценки (1.288), (1.293) доказываются аналогично. □

В силу (1.252), $PM^* = PM^*\widehat{P}$. Из (1.280) и (1.281) видно, что

$$J_{2,b}(t,s) - \widetilde{J}_{2,b}(t,s) = MA(t)^{-1/2}\sin(sA(t)^{1/2})(I-P)M^*\widehat{P}.$$

Применяя (1.27) и (1.46), отсюда получаем

$$\|J_{2,b}(t,s) - \widetilde{J}_{2,b}(t,s)\| \leqslant \|M\|^2\big(\delta_{\mathfrak{a}}^{-1/2} + C_1 c_*^{-1/2}\big) =: \widetilde{C}, \quad s \in \mathbb{R}, \ |t| \leqslant t^0. \qquad (1.296)$$

Используя неравенства (1.284)–(1.288), (1.296) и принимая во внимание лемму 1.5.1, мы выводим следующие три теоремы из теорем 1.2.12, 1.2.13 и 1.2.14. В формулировках используются обозначения (1.278), (1.279), (1.281)–(1.283).

Теорема 1.5.7. *В предположениях пп. 1.5.1, 1.5.2 при $s \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ выполнены оценки*

$$\|J_1(t, \varepsilon^{-1}s)\|\varepsilon^2(t^2+\varepsilon^2)^{-1} \leqslant \|M\|\|M^{-1}\|(C_1 + C_8|s|)\varepsilon, \quad |t| \leqslant t^0, \qquad (1.297)$$

$$\|J_{2,a}(t, \varepsilon^{-1}s)\|\varepsilon(t^2+\varepsilon^2)^{-1/2} \leqslant \|M\|\|M^{-1}\|(C_{18} + C_{19}|s|), \quad |t| \leqslant t^0, \qquad (1.298)$$

$$\|J_{2,b}(t, \varepsilon^{-1}s)\|\varepsilon(t^2+\varepsilon^2)^{-1/2} \leqslant \|M\|^2(C_{18} + C_{19}|s|) + \widetilde{C}, \quad |t| \leqslant t^0,$$

$$\|J_3(t, \varepsilon^{-2}s)\|\varepsilon^3(t^2+\varepsilon^2)^{-3/2} \leqslant \|M\|\|M^{-1}\|(C_1 + C_2|s|)\varepsilon, \quad |t| \leqslant t^0, \qquad (1.299)$$

$$\|J_4(t, \varepsilon, \varepsilon^{-2}s)\|\varepsilon^3(t^2+\varepsilon^2)^{-3/2} \leqslant \|M\|\|M^{-1}\|(2C_4 + C_5|s|)\varepsilon, \quad |\tau| \leqslant \tau^0. \qquad (1.300)$$

Ранее оценки (1.297), (1.299) были установлены в [54, теоремы 3.4, 3.2], (1.298) — в [55, теорема 3.3].

Теорема 1.5.8. *Пусть оператор $\widehat{N}_{\mathfrak{Q}}$, определённый в (1.261), равен нулю: $\widehat{N}_{\mathfrak{Q}} = 0$. Тогда при $s \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ выполнены оценки*

$$\|J_1(t, \varepsilon^{-1}s)\|\varepsilon^{3/2}(t^2+\varepsilon^2)^{-3/4} \leqslant \|M\|\|M^{-1}\|(2C_1 + C'_{12}|s|^{1/2})\varepsilon, \quad |t| \leqslant t^0, \qquad (1.301)$$

$$\|J_{2,a}(t, \varepsilon^{-1}s)\|\varepsilon^{1/2}(t^2+\varepsilon^2)^{-1/4} \leqslant \|M\|\|M^{-1}\|(C_{18} + C'_{20}|s|^{1/2}), \quad |t| \leqslant t^0, \qquad (1.302)$$

$$\|J_{2,b}(t, \varepsilon^{-1}s)\|\varepsilon^{1/2}(t^2+\varepsilon^2)^{-1/4} \leqslant \|M\|^2(C_{18} + C'_{20}|s|^{1/2}) + \widetilde{C}, \quad |t| \leqslant t^0, \qquad (1.303)$$

$$\|J_3(t, \varepsilon^{-2}s)\|\varepsilon^2(t^2+\varepsilon^2)^{-1} \leqslant \|M\|\|M^{-1}\|(C_1 + C'_{23}|s|^{1/2})\varepsilon, \quad |t| \leqslant t^0, \qquad (1.304)$$

$$\|J_4(t, \varepsilon, \varepsilon^{-2}s)\|\varepsilon^2(t^2+\varepsilon^2)^{-1} \leqslant \|M\|\|M^{-1}\|(2C'_4 + C_{28}|s|)\varepsilon, \quad |\tau| \leqslant \tau^0, \quad 0 < \varepsilon \leqslant 1. \qquad (1.305)$$

Теорема 1.5.9. *Пусть оператор $\widehat{N}_{0,\mathfrak{Q}}$, определённый в (1.268), равен нулю: $\widehat{N}_{0,\mathfrak{Q}} = 0$. Тогда при $s \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ и $|t| \leqslant t^{00}$ выполнены оценки*

$$\begin{gathered}
\|J_1(t, \varepsilon^{-1}s)\|\varepsilon^{3/2}(t^2+\varepsilon^2)^{-3/4} \leqslant \|M\|\|M^{-1}\|(C_{15} + C'_{16}|s|^{1/2})\varepsilon, \\
\|J_{2,a}(t, \varepsilon^{-1}s)\|\varepsilon^{1/2}(t^2+\varepsilon^2)^{-1/4} \leqslant \|M\|\|M^{-1}\|(C_{21} + C'_{22}|s|^{1/2}), \\
\|J_{2,b}(t, \varepsilon^{-1}s)\|\varepsilon^{1/2}(t^2+\varepsilon^2)^{-1/4} \leqslant \|M\|^2(C_{21} + C'_{22}|s|^{1/2}) + \widetilde{C}, \\
\|J_3(t, \varepsilon^{-2}s)\|\varepsilon^2(t^2+\varepsilon^2)^{-1} \leqslant \|M\|\|M^{-1}\|(C_{24} + C'_{25}|s|^{1/2})\varepsilon.
\end{gathered} \qquad (1.306)$$

Замечание 1.5.10. *Оценки* (1.304) *и* (1.306) *усиливают результаты теорем* 5.8 *и* 5.9 *из* [57] *в отношении зависимости оценок от* s.

1.6 Подтверждение точности результатов п. 1.5

1.6.1 Подтверждение точности результатов для операторов $\cos(\varepsilon^{-1}sA(t)^{1/2})P$, $A(t)^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}sA(t)^{1/2})P$, $e^{-i\varepsilon^{-2}sA(t)}P$ относительно сглаживающего множителя

Следующая теорема подтверждает точность теоремы 1.5.7 в общем случае.

Теорема 1.6.1. *Пусть выполнены предположения пункта* 1.5.1. *Пусть* $\widehat{N}_{0,\mathfrak{Q}} \neq 0$.

а) *Пусть* $s \neq 0$ *и* $0 \leqslant q_1 < 2$. *Тогда не существует такой постоянной* $C(s) > 0$, *чтобы при всех достаточно малых* $|t|$ *и* $\varepsilon > 0$ *выполнялось*

$$\left\| J_1(t, \varepsilon^{-1}s) \right\| \varepsilon^{q_1}(t^2 + \varepsilon^2)^{-q_1/2} \leqslant C(s)\varepsilon. \tag{1.307}$$

б) *Пусть* $s \neq 0$ *и* $0 \leqslant q_2 < 1$. *Тогда не существует такой постоянной* $C(s) > 0$, *чтобы при всех достаточно малых* $|t|$ *и* $\varepsilon > 0$ *выполнялось*

$$\left\| J_{2,a}(t, \varepsilon^{-1}s) \right\| \varepsilon^{q_2}(t^2 + \varepsilon^2)^{-q_2/2} \leqslant C(s). \tag{1.308}$$

в) *Пусть* $s \neq 0$ *и* $0 \leqslant q_2 < 1$. *Тогда не существует такой постоянной* $C(s) > 0$, *чтобы при всех достаточно малых* $|t|$ *и* $\varepsilon > 0$ *выполнялось*

$$\left\| J_{2,b}(t, \varepsilon^{-1}s) \right\| \varepsilon^{q_2}(t^2 + \varepsilon^2)^{-q_2/2} \leqslant C(s). \tag{1.309}$$

г) *Пусть* $s \neq 0$ *и* $0 \leqslant q_3 < 3$. *Тогда не существует такой постоянной* $C(s) > 0$, *чтобы при всех достаточно малых* $|t|$ *и* $\varepsilon > 0$ *выполнялось*

$$\left\| J_3(t, \varepsilon^{-2}s) \right\| \varepsilon^{q_3}(t^2 + \varepsilon^2)^{-q_3/2} \leqslant C(s)\varepsilon. \tag{1.310}$$

Доказательство. Докажем утверждение а). В силу леммы 1.5.1 условие $\widehat{N}_{0,\mathfrak{Q}} \neq 0$ равносильно условию $N_0 \neq 0$. Рассуждая от противного и используя неравенство (1.289), получаем, что выполнено (1.142) при некотором $0 \leqslant q_1 < 2$. Но это противоречит утверждению а) теоремы 1.3.1.

Аналогичным образом, с помощью (1.290) и утверждения б) теоремы 1.3.1 проверяется утверждение б) , утверждение в) — с помощью (1.291), (1.296) и утверждения б) теоремы 1.3.1, а утверждение г) — с помощью (1.292) и утверждения в) теоремы 1.3.1. □

Замечание 1.6.2. *Утверждение* г) *теоремы* 1.6.1 *было доказано в* [57, теорема 5.10].

Далее, подтвердим точность теорем 1.5.8, 1.5.9 в отношении операторов $J_1(t,s)$, $J_{2,b}(t,s)$, $J_3(t,s)$. (Результаты для $J_{2,a}$ опускаем, поскольку они не будут использованы при изучении ДО.)

Теорема 1.6.3. *Пусть выполнены предположения пункта* 1.5.1. *Пусть* $\widehat{N}_{0,\mathfrak{Q}} = 0$ *и* $\widehat{\mathcal{N}}_{\mathfrak{Q}}^{(q)} \neq 0$ *при некотором* q (*то есть,* $\nu_l^{\mathfrak{a}} \neq 0$ *при некотором* l).

а) *Пусть* $s \neq 0$ *и* $0 \leqslant q_1 < 3/2$. *Не существует такой постоянной* $C(s) > 0$, *чтобы оценка* (1.307) *выполнялась при всех достаточно малых* $|t|$ *и* $\varepsilon > 0$.

б) *Пусть* $s \neq 0$ *и* $0 \leqslant q_2 < 1/2$. *Не существует такой постоянной* $C(s) > 0$, *чтобы оценка* (1.309) *выполнялась при всех достаточно малых* $|t|$ *и* $\varepsilon > 0$.

в) *Пусть* $s \neq 0$ *и* $0 \leqslant q_3 < 2$. *Не существует такой постоянной* $C(s) > 0$, *чтобы оценка* (1.310) *выполнялась при всех достаточно малых* $|t|$ *и* $\varepsilon > 0$.

Доказательство. В силу леммы 1.5.1 условие $\widehat{N}_{0,\mathfrak{Q}} = 0$ равносильно условию $N_0 = 0$. Далее, согласно замечанию 1.5.4 условие $\widehat{\mathcal{N}}_{\mathfrak{Q}}^{(q)} \neq 0$ при некотором q означает, что $\nu_l^{\mathfrak{a}} \neq 0$ при некотором $l \in \{i(q), \dots, i(q) + k_q - 1\}$. В силу замечания 1.1.13 отсюда следует, что $\mathcal{N}^{(q)} \neq 0$. Таким образом, выполнены условия теоремы 1.3.2.

Докажем утверждение а). Предполагая противное и используя неравенство (1.289), получаем, что выполнено (1.142) при некотором $0 \leqslant q_1 < 3/2$. Но это противоречит утверждению а) теоремы 1.3.2.

Утверждение б) проверяется с помощью (1.291), (1.296) и утверждения б) теоремы 1.3.2, а утверждение в) — с помощью (1.292) и утверждения в) теоремы 1.3.2. □

1.6.2 Подтверждение точности результатов для операторов $\cos(\varepsilon^{-1}sA(t)^{1/2})P$, $A(t)^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}sA(t)^{1/2})P$, $e^{-i\varepsilon^{-2}sA(t)}P$ относительно времени

С помощью леммы 1.5.1 и (1.289)–(1.292), (1.296) из теоремы 1.3.3 выводим следующий результат, подтверждающий точность теоремы 1.5.7 в отношении операторов $J_1(t,s)$, $J_{2,a}(t,s)$, $J_{2,b}(t,s)$, $J_3(t,s)$.

Теорема 1.6.4. *Пусть* $\widehat{N}_{0,\mathfrak{Q}} \neq 0$.

а) *Пусть* $q_1 \geqslant 2$. *Тогда не существует положительной функции* $C(s)$ *такой, что* $\lim_{s\to\infty} C(s)/|s| = 0$ *и выполнена оценка* (1.307) *при всех* $s \in \mathbb{R}$ *и достаточно малых* $|t|$ *и* ε.

б) *Пусть* $q_2 \geqslant 1$. *Тогда не существует положительной функции* $C(s)$ *такой, что* $\lim_{s\to\infty} C(s)/|s| = 0$ *и выполнена оценка* (1.308) *при всех* $s \in \mathbb{R}$ *и достаточно малых* $|t|$ *и* ε.

в) *Пусть* $q_2 \geqslant 1$. *Тогда не существует положительной функции* $C(s)$ *такой, что* $\lim_{s\to\infty} C(s)/|s| = 0$ *и выполнена оценка* (1.309) *при всех* $s \in \mathbb{R}$ *и достаточно малых* $|t|$ *и* ε.

г) *Пусть* $q_3 \geqslant 3$. *Тогда не существует положительной функции* $C(s)$ *такой, что* $\lim_{s\to\infty} C(s)/|s| = 0$ *и выполнена оценка* (1.310) *при всех* $s \in \mathbb{R}$ *и достаточно малых* $|t|$ *и* ε.

Аналогично доказательству теоремы 1.6.3 из теоремы 1.3.4 выводим следующий результат, демонстрирующий точность теорем 1.5.8, 1.5.9 в отношении операторов $J_1(t,s)$, $J_{2,b}(t,s)$, $J_3(t,s)$.

Теорема 1.6.5. *Пусть* $\widehat{N}_{0,\mathfrak{Q}} = 0$ *и* $\widehat{\mathcal{N}}_{\mathfrak{Q}}^{(q)} \neq 0$ *при некотором* $q \in \{1,\dots,p\}$.

а) *Пусть* $q_1 \geqslant 3/2$. *Тогда не существует положительной функции* $C(s)$ *такой, что* $\lim_{s\to\infty} C(s)/|s|^{1/2} = 0$ *и выполнена оценка* (1.307) *при всех* $s \in \mathbb{R}$ *и достаточно малых* $|t|$ *и* $\varepsilon > 0$.

б) *Пусть* $q_2 \geqslant 1/2$. *Тогда не существует положительной функции* $C(s)$ *такой, что* $\lim_{s\to\infty} C(s)/|s|^{1/2} = 0$ *и выполнена оценка* (1.309) *при всех* $s \in \mathbb{R}$ *и достаточно малых* $|t|$ *и* $\varepsilon > 0$.

в) *Пусть* $q_3 \geqslant 2$. *Тогда не существует положительной функции* $C(s)$ *такой, что* $\lim_{s\to\infty} C(s)/|s|^{1/2} = 0$ *и выполнена оценка* (1.310) *при всех* $s \in \mathbb{R}$ *и достаточно малых* $|t|$ *и* $\varepsilon > 0$.

1.6.3 Подтверждение точности результата теоремы 1.5.7 для оператора $e^{-i\varepsilon^{-2}s\mathfrak{B}(t,\varepsilon)}P$ относительно сглаживающего множителя

Укажем связь коэффициентов $\lambda_l^{(4)}$, ω_l, $l = 1,\dots,n$, степенных разложений (1.189), (1.190) при $c = 1$ и операторов $\widehat{S}$ и $\mathfrak{Q}_{\widehat{\mathfrak{N}}}$. Положим $\zeta_l := M\omega_l \in \widehat{\mathfrak{N}}$, $l = 1,\dots,n$. Тогда из (1.200) и (1.252), (1.253) видно, что

$$\widehat{S}\zeta_l = \lambda_l^{(4)}\mathfrak{Q}_{\widehat{\mathfrak{N}}}\zeta_l, \quad l = 1,\dots,n. \tag{1.311}$$

Набор $\zeta_1,\dots,\zeta_n$ образует базис в $\widehat{\mathfrak{N}}$, ортонормированный с весом $\mathfrak{Q}_{\widehat{\mathfrak{N}}}$: $(\mathfrak{Q}_{\widehat{\mathfrak{N}}}\zeta_l,\zeta_k)_{\widehat{\mathfrak{H}}} = \delta_{lk}$, где $l,k = 1,\dots,n$.

Перейдём теперь к обозначениям, принятым в замечании 1.4.1. Напомним, что различные собственные значения оператора S обозначаются через $\lambda_q^{\circ,(4)}$, где $q = 1,\dots,p$, а соответствующие собственные подпространства — через $\mathfrak{N}_q$. Векторы ω_l, $l = i(q),\dots,i(q)+k_q-1$, где $i(q) = k_1+\ldots+k_{q-1}+1$, образуют ортонормированный базис в $\mathfrak{N}_q$. Тогда те же числа $\lambda_q^{\circ,(4)}$, где $q = 1,\dots,p$, — это различные собственные значения задачи (1.311), а $M\mathfrak{N}_q = \widehat{\mathfrak{N}}_{q,\mathfrak{Q}}$ — соответствующие собственные подпространства. Векторы $\zeta_l = M\omega_l$, $l = i(q),\dots,i(q)+k_q-1$, образуют базис в $\widehat{\mathfrak{N}}_{q,\mathfrak{Q}}$, ортонормированный с весом $\mathfrak{Q}_{\widehat{\mathfrak{N}}}$.

Далее, свяжем собственные числа и собственные векторы задачи (1.208) при $c = 1$ и оператор $\mathscr{Y}_M^{(q)} = \widehat{P}_{q,\mathfrak{Q}}\widehat{T}|_{\widehat{\mathfrak{N}}_{q,\mathfrak{Q}}}$, где

$$\widehat{T} := -(\widehat{X}_0\widehat{Z})^*\widehat{X}_0\widehat{\widehat{Z}} - (\widehat{X}_0\widehat{\widehat{Z}})^*\widehat{X}_0\widehat{Z} + \widehat{Y}_2^*\widehat{Y}_1 + \widehat{Y}_1^*\widehat{Y}_2,$$

а $\widehat{P}_{q,\mathfrak{Q}}$ — ортопроектор на подпространство $\widehat{\mathfrak{N}}_{q,\mathfrak{Q}}$. Из (1.258), равенств $Y_1 = \widehat{Y}_1M$, $Y_2 = \widehat{Y}_2M$ и $MP_q = \widehat{P}_{q,\mathfrak{Q}}MP_q$ видно, что

$$\mathscr{Y}_M^{(q)}\zeta_l = \lambda_l^{(5)}\mathfrak{Q}_{q,\mathfrak{Q}}\zeta_l, \qquad l = i(q),\dots,i(q)+k_q-1, \tag{1.312}$$

где $\mathfrak{Q}_{q,\mathfrak{Q}} = \widehat{P}_{q,\mathfrak{Q}}\mathfrak{Q}|_{\widehat{\mathfrak{N}}_{q,\mathfrak{Q}}}$.

Перейдём к обозначениям, принятым в замечании 1.4.2. Различные собственные значения оператора $\mathscr{Y}^{(q)}$ обозначаются через $\lambda_{q',q}^{\circ,(5)}$, где $q' = 1,\dots,p'(q)$, а соответствующие собственные подпространства через $\mathfrak{N}_{q',q}^{\mathfrak{b}}$. Векторы ω_l, $l = j(q',q),\dots,j(q',q)+k_{q',q}-1$, где $j(q',q) = k_1+\ldots+k_{q-1}+k_{1,q}+\ldots+k_{q'-1,q}+1$, образуют ортонормированный базис в $\mathfrak{N}_{q',q}^{\mathfrak{b}}$. Тогда те же числа $\lambda_{q',q}^{\circ,(5)}$, где $q' = 1,\dots,p'(q)$, — это различные собственные значения задачи (1.312), а $M\mathfrak{N}_{q',q}^{\mathfrak{b}} =$

$\widehat{\mathfrak{N}}^{\flat}_{q',q,\mathfrak{Q}}$ — соответствующие собственные подпространства. Векторы $\zeta_l = M\omega_l$, $l = j(q',q), \dots, j(q',q) + k_{q',q} - 1$, образуют базис в $\widehat{\mathfrak{N}}^{\flat}_{q',q,\mathfrak{Q}}$. Через $\mathcal{P}^{\flat}_{q',q}$ обозначим "косой" проектор на $\widehat{\mathfrak{N}}^{\flat}_{q',q,\mathfrak{Q}}$, ортогональный относительно скалярного произведения $(\mathfrak{Q}_{\widehat{\mathfrak{N}}}\,\cdot\,,\,\cdot\,)_{\widehat{\mathfrak{H}}}$, то есть

$$\mathcal{P}^{\flat}_{q',q} = \sum_{l=j(q',q)}^{j(q',q)+k_{q',q}-1} (\,\cdot\,, \mathfrak{Q}_{\widehat{\mathfrak{N}}}\zeta_l)_{\widehat{\mathfrak{H}}}\zeta_l, \qquad q = 1, \dots, p, \quad q' = 1, \dots, p'(q).$$

Легко видеть, что

$$\mathcal{P}^{\flat}_{q',q} = MP^{\flat}_{q',q}M^{-1}\widehat{P}. \tag{1.313}$$

Лемма 1.6.6. *Пусть оператор N определён в (1.32), а оператор $\widehat{N}_{\mathfrak{Q}}$ определён в (1.261). Тогда условие $P^{\flat}_{q',q}NP^{\flat}_{q',q} = 0$ равносильно равенству $(\mathcal{P}^{\flat}_{q',q})^*\widehat{N}_{\mathfrak{Q}}\mathcal{P}^{\flat}_{q',q} = 0$.*

Доказательство. В силу (1.262) и (1.313) условие $P^{\flat}_{q',q}NP^{\flat}_{q',q} = 0$ влечёт $(\mathcal{P}^{\flat}_{q',q})^*\widehat{N}_{\mathfrak{Q}}\mathcal{P}^{\flat}_{q',q} = 0$.

Обратно, пусть $(\mathcal{P}^{\flat}_{q',q})^*\widehat{N}_{\mathfrak{Q}}\mathcal{P}^{\flat}_{q',q} = 0$. Тогда из соотношений (1.262) и (1.313) следует, что $\widehat{P}(M^*)^{-1}P^{\flat}_{q',q}NP^{\flat}_{q',q}M^{-1}\widehat{\omega} = 0$ для любого $\widehat{\omega} \in \widehat{\mathfrak{N}}$. Поскольку M^{-1} — изоморфизм $\widehat{\mathfrak{N}}$ на $\mathfrak{N}$, то $\widehat{P}(M^*)^{-1}P^{\flat}_{q',q}NP^{\flat}_{q',q}\omega = 0$ при любом $\omega \in \mathfrak{N}$. Домножая последнее равенство скалярно на $\widehat{\eta} \in \widehat{\mathfrak{N}}$, получаем, что $(P^{\flat}_{q',q}NP^{\flat}_{q',q}\omega, M^{-1}\widehat{\eta})_{\mathfrak{H}} = 0$ для всех $\widehat{\eta} \in \widehat{\mathfrak{N}}$. Снова используя свойство $M^{-1}\widehat{\mathfrak{N}} = \mathfrak{N}$, заключаем, что оператор $P^{\flat}_{q',q}NP^{\flat}_{q',q}$ равен нулю. $\square$

Используя теорему 1.4.5, лемму 1.6.6 и оценку (1.293), мы подтверждаем точность оценки (1.300).

Теорема 1.6.7. *Пусть оператор $\widehat{N}_{\mathfrak{Q}}$ определён в (1.261). Пусть $(\mathcal{P}^{\flat}_{q',q})^*\widehat{N}_{\mathfrak{Q}}\mathcal{P}^{\flat}_{q',q} \neq 0$ для некоторых $q \in \{1, \dots, p\}$, $q' \in \{1, \dots, p'(q)\}$. Пусть $s \neq 0$ и $0 \leqslant q_3 < 3$. Тогда не существует такой константы $C(s) > 0$, чтобы оценка*

$$\|J_4(t, \varepsilon, \varepsilon^{-2}s)\|\varepsilon^{q_3}(t^2 + \varepsilon^2)^{-q_3/2} \leqslant C(s)\varepsilon \tag{1.314}$$

выполнялась для всех достаточно малых $|t|$ и ε.

Доказательство. В силу леммы 1.6.6 из условий теоремы следует, что $P^{\flat}_{q',q}NP^{\flat}_{q',q} \neq 0$. Рассуждаем от противного. Пусть для некоторых $s \neq 0$ и $0 \leqslant q_3 < 3$ существует такая постоянная $C(s) > 0$, что выполнено (1.314) при всех достаточно малых $|t|$ и ε. В силу оценки (1.293) это означает, что выполнено также неравенство вида (1.226) (с другой константой). Но это противоречит утверждению теоремы 1.4.5. $\square$

Глава 2. Периодические дифференциальные операторы в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$

2.1 Класс дифференциальных операторов в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$

2.1.1 Решётки. Ряд Фурье. Преобразование Гельфанда

Пусть Γ — решётка в $\mathbb{R}^d$, порождённная базисом $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_d$, т. е., $\Gamma = \left\{\mathbf{a}\in\mathbb{R}^d \colon \mathbf{a} = \sum_{j=1}^d n_j\mathbf{a}_j,\ n_j\in\mathbb{Z}\right\}$, и пусть Ω — элементарная ячейка этой решётки: $\Omega \coloneqq \left\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^d \colon \mathbf{x} = \sum_{j=1}^d \xi_j\mathbf{a}_j,\ 0<\xi_j<1\right\}$. Базис $\mathbf{b}_1,\dots,\mathbf{b}_d$, двойственный по отношению к $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_d$, определяется из соотношений $\langle\mathbf{b}_l,\mathbf{a}_j\rangle = 2\pi\delta_{lj}$. Этот базис порождает решётку $\widetilde{\Gamma}$, *двойственную* к решётке Γ. Обозначим через $\widetilde{\Omega}$ центральную *зону Бриллюэна* решётки $\widetilde{\Gamma}$:

$$\widetilde{\Omega} = \left\{\mathbf{k}\in\mathbb{R}^d : |\mathbf{k}|<|\mathbf{k}-\mathbf{b}|,\ 0\neq\mathbf{b}\in\widetilde{\Gamma}\right\}. \tag{2.1}$$

Обозначим $|\Omega| = \operatorname{mes}\Omega$, $|\widetilde{\Omega}| = \operatorname{mes}\widetilde{\Omega}$ и отметим, что $|\Omega||\widetilde{\Omega}| = (2\pi)^d$. Пусть r_0 — радиус шара, *вписанного* в $\operatorname{clos}\widetilde{\Omega}$. Отметим, что

$$2r_0 = \min|\mathbf{b}|,\quad 0\neq\mathbf{b}\in\widetilde{\Gamma}. \tag{2.2}$$

С решёткой Γ связано дискретное преобразование Фурье

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = |\Omega|^{-1/2}\sum_{\mathbf{b}\in\widetilde{\Gamma}}\hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{b}}\exp(i\langle\mathbf{b},\mathbf{x}\rangle),\qquad \mathbf{x}\in\Omega, \tag{2.3}$$

которое унитарно отображает $l_2(\widetilde{\Gamma};\mathbb{C}^n)$ на $L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)$:

$$\int_\Omega|\mathbf{v}(\mathbf{x})|^2d\mathbf{x} = \sum_{\mathbf{b}\in\widetilde{\Gamma}}|\hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{b}}|^2. \tag{2.4}$$

Через $\widetilde{H}^1(\Omega;\mathbb{C}^n)$ *обозначается подпространство тех функций из* $H^1(\Omega;\mathbb{C}^n)$*,* Γ*-периодическое продолжение которых на* $\mathbb{R}^d$ *принадлежит* $H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. Имеет место равенство

$$\int_\Omega|(\mathbf{D}+\mathbf{k})\mathbf{v}|^2\,d\mathbf{x} = \sum_{\mathbf{b}\in\widetilde{\Gamma}}|\mathbf{b}+\mathbf{k}|^2|\hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{b}}|^2,\quad \mathbf{v}\in\widetilde{H}^1(\Omega;\mathbb{C}^n),\ \mathbf{k}\in\mathbb{R}^d, \tag{2.5}$$

причём сходимость ряда в правой части (2.5) равносильна включению $\mathbf{v} \in \widetilde{H}^1(\Omega;\mathbb{C}^n)$. Из (2.1), (2.4) и (2.5) следует оценка

$$\int_\Omega |(\mathbf{D}+\mathbf{k})\mathbf{v}|^2 d\mathbf{x} \geqslant \sum_{\mathbf{b}\in\widetilde{\Gamma}} |\mathbf{k}|^2 |\hat{\mathbf{v}}_\mathbf{b}|^2 = |\mathbf{k}|^2 \int_\Omega |\mathbf{v}|^2 d\mathbf{x}, \quad \mathbf{v} \in \widetilde{H}^1(\Omega;\mathbb{C}^n),\ \mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}. \tag{2.6}$$

Преобразование Гельфанда $\mathscr{U}$ первоначально определяется на функциях из класса Шварца $\mathbf{v} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ формулой:

$$\widetilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k},\mathbf{x}) = (\mathscr{U}\mathbf{v})(\mathbf{k},\mathbf{x}) = |\widetilde{\Omega}|^{-1/2} \sum_{\mathbf{a}\in\Gamma} e^{-i\langle \mathbf{k},\mathbf{x}+\mathbf{a}\rangle} \mathbf{v}(\mathbf{x}+\mathbf{a}), \quad \mathbf{x}\in\Omega,\ \mathbf{k}\in\widetilde{\Omega}.$$

При этом $\|\widetilde{\mathbf{v}}\|_{L_2(\widetilde{\Omega}\times\Omega)} = \|\mathbf{v}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}$, и $\mathscr{U}$ продолжается по непрерывности до унитарного отображения $\mathscr{U}: L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n) \to \int_{\widetilde{\Omega}} \oplus L_2(\Omega;\mathbb{C}^n) d\mathbf{k} =: \mathcal{H}$.

2.1.2 Факторизованные операторы $\mathcal{A}$ второго порядка

Пусть $b(\mathbf{D}) = \sum_{l=1}^d b_l D_l$, где b_l — постоянные $(m\times n)$-матрицы (вообще говоря, с комплексными элементами). *Предполагается, что* $m \geqslant n$. Рассмотрим символ $b(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{l=1}^d b_l \xi_l$ и *предположим, что* $\operatorname{rank} b(\boldsymbol{\xi}) = n$, $0 \neq \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d$. Это равносильно тому, что для некоторых $\alpha_0, \alpha_1 > 0$ выполнены неравенства:

$$\alpha_0 \mathbf{1}_n \leqslant b(\boldsymbol{\theta})^* b(\boldsymbol{\theta}) \leqslant \alpha_1 \mathbf{1}_n, \quad \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}, \quad 0 < \alpha_0 \leqslant \alpha_1 < \infty. \tag{2.7}$$

Пусть $f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^d$, — Γ-периодическая $(n\times n)$-матричнозначная функция и $h(\mathbf{x})$, $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^d$, — Γ-периодическая $(m\times m)$-матричнозначная функция, причём

$$f, f^{-1} \in L_\infty(\mathbb{R}^d); \quad h, h^{-1} \in L_\infty(\mathbb{R}^d). \tag{2.8}$$

Пусть замкнутый оператор $\mathcal{X}\colon L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n) \to L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)$ задан выражением $\mathcal{X} = hb(\mathbf{D})f$ на области $\operatorname{Dom}\mathcal{X} = \left\{\mathbf{u} \in L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)\colon f\mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)\right\}$. Самосопряжённый оператор $\mathcal{A} = \mathcal{X}^*\mathcal{X}$ в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ порождается замкнутой квадратичной формой $\mathfrak{a}[\mathbf{u},\mathbf{u}] = \|\mathcal{X}\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}$, $\mathbf{u}\in\operatorname{Dom}\mathcal{X}$. Формально,

$$\mathcal{A} = f(\mathbf{x})^* b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) f(\mathbf{x}), \tag{2.9}$$

где $g(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x})^* h(\mathbf{x})$. Используя преобразование Фурье и (2.7), (2.8), легко проверить оценки

$$\alpha_0 \|g^{-1}\|^{-1}_{L_\infty} \|\mathbf{D}(f\mathbf{u})\|^2_{L_2} \leqslant \mathfrak{a}[\mathbf{u},\mathbf{u}] \leqslant \alpha_1 \|g\|_{L_\infty} \|\mathbf{D}(f\mathbf{u})\|^2_{L_2}, \quad \mathbf{u}\in\operatorname{Dom}\mathcal{X}. \tag{2.10}$$

2.1.3 Операторы $\mathcal{Y}$ и $\mathcal{Y}_2$

Рассмотрим замкнутый оператор

$$\mathcal{Y}\colon L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n) \to L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^{dn}),$$

действующий по формуле $\mathcal{Y}\mathbf{u} = \mathbf{D}(f\mathbf{u}) = \{D_1(f\mathbf{u}),\dots,D_d(f\mathbf{u})\}^{\mathrm{T}}$. Нижняя оценка (2.10) означает, что

$$\|\mathcal{Y}\mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant c_1\|\mathcal{X}\mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \quad \mathbf{u}\in \operatorname{Dom}\mathcal{X}, \tag{2.11}$$

$$c_1 = \alpha_0^{-1/2}\|g^{-1}\|^{1/2}_{L_\infty}. \tag{2.12}$$

Пусть в $\mathbb{R}^d$ заданы Γ-периодические $(n\times n)$-матричнозначные функции $a_j(\mathbf{x})$, $j=1,\dots,d$, такие, что

$$a_j\in L_\rho(\Omega), \qquad \rho=2 \text{ при } d=1, \quad \rho>d \text{ при } d\geqslant 2; \quad j=1,\dots,d. \tag{2.13}$$

Рассмотрим оператор

$$\mathcal{Y}_2\colon L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n) \to L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^{dn}),$$

действующий как умножение на $(dn\times n)$-матричнозначную функцию, составленную из матриц a_j^*, $j=1,\dots,d$. Иначе говоря, $\mathcal{Y}_2\mathbf{u} = \{a_1^* f\mathbf{u},\dots,a_d^* f\mathbf{u}\}^{\mathrm{T}}$, $\operatorname{Dom}\mathcal{Y}_2 = \operatorname{Dom}\mathcal{X}$. Используя неравенство Гёльдера, (2.10), (2.13) и компактность вложения $H^1(\Omega)\hookrightarrow L_p(\Omega)$ при $p=2\rho/(\rho-2)$, можно показать (см. [31, п. 5.2]), что для любого $\nu_*>0$ существует постоянная $C(\nu_*)>0$ такая, что

$$\|\mathcal{Y}_2\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \nu_*\|\mathcal{X}\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} + C(\nu_*)\|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \quad \mathbf{u}\in\operatorname{Dom}\mathcal{X}. \tag{2.14}$$

При фиксированном ν_* постоянная $C(\nu_*)$ зависит лишь от норм $\|a_j\|_{L_\rho(\Omega)}$, $j=1,\dots,d$, от $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|f\|_{L_\infty}$, α_0, d, ρ и от параметров решётки Γ.

2.1.4 Форма $q[\mathbf{u},\mathbf{u}]$

Пусть в $\mathbb{R}^d$ задана Γ-периодическая борелевская σ-конечная мера $d\mu(\mathbf{x}) = \{d\mu_{jl}(\mathbf{x})\}$, где $j,l=1,\dots,n$, со значениями в классе эрмитовых $(n\times n)$-матриц.

Предположим, что мера $d\mu$ такова, что функция $|u(\mathbf{x})|^2$ суммируема по каждой мере $d\mu_{jl}$ для любой функции $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$.

В $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ рассмотрим полуторалинейную форму

$$q[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = \int_{\mathbb{R}^d} \langle d\mu(\mathbf{x})\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle\,, \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n).$$

На меру $d\mu$ накладывается следующее *условие*:

Условие 2.1.1. *Для любых* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in H^1(\Omega, \mathbb{C}^n)$ *существуют постоянные* $\widehat{c}_0 \in \mathbb{R}$, $\widetilde{c}_2 \geqslant 0$, $\widehat{c}_3 \geqslant 0$, $0 \leqslant \widetilde{c} < \alpha_0 \|g^{-1}\|^{-1}_{L_\infty}$, *такие, что справедливы оценки*

$$\begin{aligned} &\left| \int_\Omega \langle d\mu(\mathbf{x})\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle \right| \\ &\qquad \leqslant \left(\widetilde{c}_2 \|\mathbf{D}\mathbf{u}\|^2_{L_2(\Omega)} + \widehat{c}_3 \|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\Omega)} \right)^{1/2} \left(\widetilde{c}_2 \|\mathbf{D}\mathbf{v}\|^2_{L_2(\Omega)} + \widehat{c}_3 \|\mathbf{v}\|^2_{L_2(\Omega)} \right)^{1/2}, \\ &\int_\Omega \langle d\mu(\mathbf{x})\mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle \geqslant -\widetilde{c} \|\mathbf{D}\mathbf{u}\|^2_{L_2(\Omega)} - \widehat{c}_0 \|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\Omega)}, \qquad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in H^1(\Omega; \mathbb{C}^n). \end{aligned}$$

Из условия 2.1.1 вытекают оценки

$$\begin{aligned} &\left| \int_\Omega \langle d\mu(\mathbf{x}) f\mathbf{u}, f\mathbf{v}\rangle \right| \leqslant \left(\widetilde{c}_2 \|\mathbf{D}(f\mathbf{u})\|^2_{L_2(\Omega)} + c_3 \|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\Omega)} \right)^{1/2} \\ &\qquad\qquad \times \left(\widetilde{c}_2 \|\mathbf{D}(f\mathbf{v})\|^2_{L_2(\Omega)} + c_3 \|\mathbf{v}\|^2_{L_2(\Omega)} \right)^{1/2}, \\ &\int_\Omega \langle d\mu(\mathbf{x}) f\mathbf{u}, f\mathbf{u}\rangle \geqslant -\widetilde{c}\, \|\mathbf{D}(f\mathbf{u})\|^2_{L_2(\Omega)} - c_0 \|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\Omega)}, \\ &\qquad\qquad f\mathbf{u}, f\mathbf{v} \in H^1(\Omega; \mathbb{C}^n), \end{aligned} \tag{2.15}$$

с постоянными $c_0 = \widehat{c}_0 \|f\|^2_{L_\infty}$, если $\widehat{c}_0 \geqslant 0$, $c_0 = \widehat{c}_0 \|f^{-1}\|^{-2}_{L_\infty}$, если $\widehat{c}_0 < 0$; $c_3 = \widehat{c}_3 \|f\|^2_{L_\infty}$. Запишем неравенства (2.15) по сдвинутым ячейкам $\Omega + \mathbf{a}$, $\mathbf{a} \in \Gamma$, и просуммируем. С учётом (2.10) получаем

$$\begin{aligned} &\left| q[f\mathbf{u}, f\mathbf{v}] \right| \leqslant \left(c_2 \|\mathcal{X}\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} + c_3 \|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \right)^{1/2} \\ &\qquad\qquad \times \left(c_2 \|\mathcal{X}\mathbf{v}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} + c_3 \|\mathbf{v}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \right)^{1/2}, \\ &\left| q[f\mathbf{u}, f\mathbf{v}] \right| \geqslant -(1 - \varkappa) \|\mathcal{X}\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} - c_0 \|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \operatorname{Dom} \mathcal{X}, \end{aligned} \tag{2.16}$$

где

$$c_2 = \widetilde{c}_2 \alpha_0^{-1} \|g^{-1}\|_{L_\infty}, \quad \varkappa = 1 - \widetilde{c} \alpha_0^{-1} \|g^{-1}\|_{L_\infty}, \quad 0 < \varkappa \leqslant 1. \tag{2.17}$$

Примеры форм, заведомо удовлетворяющих условию 2.1.1, приведены в [31, п. 5.5]. Приведём один пример.

Пример 2.1.2 ([31]). Предположим, что мера $d\mu$ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега, то есть $d\mu(\mathbf{x}) = \mathcal{Q}(\mathbf{x})d\mathbf{x}$, где $\mathcal{Q}(\mathbf{x})$ — Γ-периодическая эрмитова $(n \times n)$-матричнозначная функция в $\mathbb{R}^d$, такая, что

$$\mathcal{Q} \in L_\varrho(\Omega), \qquad \varrho = 1 \text{ при } d = 1, \quad \varrho > \frac{d}{2} \text{ при } d \geqslant 2. \tag{2.18}$$

Тогда $q[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = \int_{\mathbb{R}^d} \langle \mathcal{Q}(\mathbf{x})\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle \, d\mathbf{x}$, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$. При условии (2.18) в силу теоремы вложения для любого $\nu_* > 0$ существует такое $C_\mathcal{Q}(\nu_*) > 0$, что

$$\int_\Omega |\mathcal{Q}(\mathbf{x})||\mathbf{u}|^2 d\mathbf{x} \leqslant \nu_* \int_\Omega |\mathbf{D}\mathbf{u}|^2 d\mathbf{x} + C_\mathcal{Q}(\nu_*) \int_\Omega |\mathbf{u}|^2 d\mathbf{x}, \quad \mathbf{u} \in H^1(\Omega; \mathbb{C}^n).$$

Отсюда следует, что условие 2.1.1 выполнено, причём постоянные можно выбирать следующим образом: $\widetilde{c}_2 = 1$, $\widehat{c}_3 = C_\mathcal{Q}(1)$, $\widetilde{c} = \nu_*$ и $\widehat{c}_0 = C_\mathcal{Q}(\nu_*)$ при $2\nu_* = \alpha_0\|g^{-1}\|^{-1}_{L_\infty}$. Тогда неравенства (2.16) выполнены при $\kappa = 1/2$, $c_2 = \alpha_0^{-1}\|g^{-1}\|_{L_\infty}$. Постоянная c_3 контролируется через d, ϱ, $\|\mathcal{Q}\|_{L_\varrho(\Omega)}$, $\|f\|_{L_\infty}$ и параметры решётки, а c_0 зависит от тех же параметров и от α_0, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$.

2.1.5 Оператор $\mathcal{B}(\varepsilon)$

В $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ рассмотрим квадратичную форму

$$\begin{aligned} \mathfrak{b}(\varepsilon)[\mathbf{u}, \mathbf{u}] = \mathfrak{a}[\mathbf{u}, \mathbf{u}] + 2\varepsilon \operatorname{Re}(\mathcal{Y}\mathbf{u}, \mathcal{Y}_2\mathbf{u})_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \varepsilon^2 q[f\mathbf{u}, f\mathbf{u}] \\ + \varepsilon^2\lambda(\mathcal{Q}_0 f\mathbf{u}, f\mathbf{u})_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \quad \mathbf{u} \in \operatorname{Dom} \mathcal{X}, \end{aligned} \tag{2.19}$$

где $0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1$, а $\mathcal{Q}_0$ — оператор в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, действующий как умножение на Γ-периодическую положительно определённую и ограниченную $(n \times n)$-матричнозначную функцию $\mathcal{Q}_0(\mathbf{x})$. Ограничение на λ наложим позже.

Оценим форму (2.19) снизу. В силу (2.11)

$$\begin{aligned} 2\varepsilon|\operatorname{Re}(\mathcal{Y}\mathbf{u}, \mathcal{Y}_2\mathbf{u})_{L_2(\mathbb{R}^d)}| \leqslant 2c_1\varepsilon\|\mathcal{X}\mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\|\mathcal{Y}_2\mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\ \leqslant \frac{\kappa}{4}\|\mathcal{X}\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \frac{4c_1^2}{\kappa}\varepsilon^2\|\mathcal{Y}_2\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \qquad \mathbf{u} \in \operatorname{Dom} \mathcal{X}. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Положим

$$c_4 = 4\kappa^{-1}c_1^2 C(\nu_*) \text{ при } \nu_* = \kappa^2(16c_1^2)^{-1}. \tag{2.21}$$

Тогда из (2.14), (2.20), (2.21) следует, что

$$2\varepsilon|\operatorname{Re}(\mathcal{Y}\mathbf{u}, \mathcal{Y}_2\mathbf{u})_{L_2(\mathbb{R}^d)}| \leqslant \frac{\kappa}{2}\|\mathcal{X}\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} + c_4\varepsilon^2\|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \qquad \mathbf{u} \in \operatorname{Dom} \mathcal{X}. \tag{2.22}$$

Наложим на λ следующее ограничение:

$$\begin{aligned} &\lambda > \|(f^*\mathcal{Q}_0 f)^{-1}\|_{L_\infty}(c_0+c_4), && \text{если } \lambda \geqslant 0,\\ &\lambda > \|f^*\mathcal{Q}_0 f\|^{-1}_{L_\infty}(c_0+c_4), && \text{если } \lambda < 0 \text{ и } c_0+c_4<0, \end{aligned} \tag{2.23}$$

которое обеспечивает выполнение неравенства

$$\lambda(\mathcal{Q}_0 f\mathbf{u}, f\mathbf{u})_{L_2(\mathbb{R}^d)} \geqslant (c_0+c_4+\beta)\|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \quad \mathbf{u}\in L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n), \tag{2.24}$$

где $\beta > 0$ определено по числу λ следующим образом:

$$\begin{aligned} &\beta = \lambda\|(f^*\mathcal{Q}_0 f)^{-1}\|^{-1}_{L_\infty} - c_0 - c_4, && \text{если } \lambda \geqslant 0,\\ &\beta = \lambda\|f^*\mathcal{Q}_0 f\|_{L_\infty} - c_0 - c_4, && \text{если } \lambda < 0 \text{ и } c_0+c_4<0. \end{aligned}$$

Из нижней оценки (2.16), (2.22) и (2.24) с учётом $0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1$ вытекает, что

$$\mathfrak{b}(\varepsilon)[\mathbf{u},\mathbf{u}] \geqslant \frac{\kappa}{2}\mathfrak{a}[\mathbf{u},\mathbf{u}] + \beta\varepsilon^2\|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \quad \mathbf{u}\in \operatorname{Dom}\mathcal{X}. \tag{2.25}$$

Далее, из (2.10), (2.11), (2.14) (при $\nu = 1$) и верхней оценки (2.16) следует верхняя оценка для квадратичной формы (2.19):

$$\begin{aligned} \mathfrak{b}(\varepsilon)[\mathbf{u},\mathbf{u}] &\leqslant (2+c_1^2+c_2)\alpha_1\|g\|_{L_\infty}\|\mathbf{D}(f\mathbf{u})\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}\\ &+ (C(1)+c_3+|\lambda|\|\mathcal{Q}_0\|_{L_\infty}\|f\|^2_{L_\infty})\varepsilon^2\|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \quad \mathbf{u}\in\operatorname{Dom}\mathcal{X}. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Оценки (2.25), (2.26) показывают, что форма (2.19) замкнута и положительно определена. *Через $\mathfrak{B}(\varepsilon)$ обозначим оператор в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, порождённый этой формой.* Формально можно записать

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(\varepsilon) = f(\mathbf{x})^* b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) f(\mathbf{x})&\\ +\varepsilon\sum_{j=1}^d f(\mathbf{x})^*(a_j(\mathbf{x})D_j + D_j a_j(\mathbf{x})^*)f(\mathbf{x})&\\ + \varepsilon^2 f(\mathbf{x})^*\mathcal{Q}(\mathbf{x})f(\mathbf{x}) + \varepsilon^2\lambda f(\mathbf{x})^*\mathcal{Q}_0(\mathbf{x})f(\mathbf{x})&, \end{aligned} \tag{2.27}$$

где $\mathcal{Q}(\mathbf{x})$ следует интерпретировать как обобщённый матричный потенциал, порождённый мерой $d\mu(\mathbf{x})$.

2.1.6 Операторы $\mathcal{A}(\mathbf{k})$

Пусть $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^d$. Положим

$$\mathfrak{H} = L_2(\Omega;\mathbb{C}^n), \quad \mathfrak{H}_* = L_2(\Omega;\mathbb{C}^m), \quad \widetilde{\mathfrak{H}} = L_2(\Omega;\mathbb{C}^{dn}) \tag{2.28}$$

и рассмотрим замкнутый оператор $\mathcal{X}(\mathbf{k})\colon \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}_*$, заданный формулами

$$\mathcal{X}(\mathbf{k}) = hb(\mathbf{D}+\mathbf{k})f, \qquad \operatorname{Dom}\mathcal{X}(\mathbf{k}) = \left\{\mathbf{u} \in \mathfrak{H}\colon\, f\mathbf{u} \in \widetilde{H}^1(\Omega;\mathbb{C}^n)\right\} =: \mathfrak{d}.$$

Самосопряжённый оператор $\mathcal{A}(\mathbf{k}) = \mathcal{X}(\mathbf{k})^*\mathcal{X}(\mathbf{k})$ в $\mathfrak{H}$ порождается квадратичной формой $\mathfrak{a}(\mathbf{k})[\mathbf{u},\mathbf{u}] = \|\mathcal{X}(\mathbf{k})\mathbf{u}\|^2_{\mathfrak{H}_*}$, $\mathbf{u} \in \mathfrak{d}$. Используя разложение функции $\mathbf{v} = f\mathbf{u}$ в ряд Фурье (2.3) и условия (2.7), (2.8), легко проверить,что

$$\alpha_0\|g^{-1}\|^{-1}_{L_\infty}\|(\mathbf{D}+\mathbf{k})f\mathbf{u}\|^2_{L_2(\Omega)} \leqslant \mathfrak{a}(\mathbf{k})[\mathbf{u},\mathbf{u}] \leqslant \alpha_1\|g\|_{L_\infty}\|(\mathbf{D}+\mathbf{k})f\mathbf{u}\|^2_{L_2(\Omega)}, \ \ \mathbf{u} \in \mathfrak{d}. \tag{2.29}$$

Из нижней оценки (2.29) и из (2.6) вытекает, что

$$\mathcal{A}(\mathbf{k}) \geqslant c_*|\mathbf{k}|^2 I, \qquad \mathbf{k} \in \widetilde{\Omega},\ c_* = \alpha_0\|f^{-1}\|^{-2}_{L_\infty}\|g^{-1}\|^{-1}_{L_\infty}. \tag{2.30}$$

Положим $\mathfrak{N} := \operatorname{Ker}\mathcal{A}(0) = \operatorname{Ker}\mathcal{X}(0)$. Соотношения (2.29) при $\mathbf{k} = 0$ показывают, что

$$\mathfrak{N} = \{\mathbf{u} \in L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)\colon\, f\mathbf{u} = \mathbf{c} \in \mathbb{C}^n\}, \quad \dim\mathfrak{N} = n. \tag{2.31}$$

Как видно из (2.2) и (2.5) при $\mathbf{k} = 0$, для функции $\mathbf{v} \in \widetilde{H}^1(\Omega;\mathbb{C}^n)$ такой, что $\int_\Omega \mathbf{v}\,d\mathbf{x} = 0$, т. е. $\hat{\mathbf{v}}_0 = 0$, выполнено

$$\|\mathbf{D}\mathbf{v}\|^2_{L_2(\Omega)} \geqslant 4r_0^2\|\mathbf{v}\|^2_{L_2(\Omega)}, \quad \mathbf{v} \in \widetilde{H}^1(\Omega;\mathbb{C}^n),\ \int_\Omega \mathbf{v}\,d\mathbf{x} = 0. \tag{2.32}$$

Из (2.32) и из нижней оценки (2.29) при $\mathbf{k} = 0$ следует, что расстояние d^0 от точки $\lambda_0 = 0$ до остального спектра оператора $\mathcal{A}(0)$ подчинено оценке

$$d^0 \geqslant 4c_*r_0^2. \tag{2.33}$$

Обозначим через $E_j(\mathbf{k})$, $j \in \mathbb{N}$, последовательные (с учётом кратностей) собственные значения оператора $\mathcal{A}(\mathbf{k})$ (зонные функции). Зонные функции $E_j(\mathbf{k})$ непрерывны и $\widetilde{\Gamma}$-периодичны. Согласно (2.30) выполнено $E_j(\mathbf{k}) \geqslant c_*|\mathbf{k}|^2$, $j = 1,\ldots,n$. Как показано в [13, гл. 2, п. 2.2], $E_{n+1}(\mathbf{k}) \geqslant c_*r_0^2$.

2.1.7 Операторы $\mathcal{Y}(\mathbf{k})$ и Y_2

Рассмотрим оператор $\mathcal{Y}(\mathbf{k})\colon \mathfrak{H} \to \widetilde{\mathfrak{H}}$, действующий по формуле

$$\mathcal{Y}(\mathbf{k})\mathbf{u} = (\mathbf{D}+\mathbf{k})f\mathbf{u} = \{(D_1+k_1)f\mathbf{u},\ldots,(D_d+k_d)f\mathbf{u}\}^{\mathrm{T}}, \quad \operatorname{Dom}\mathcal{Y}(\mathbf{k}) = \mathfrak{d}. \tag{2.34}$$

Используя нижнюю оценку (2.29), убеждаемся, что

$$\|\mathcal{Y}(\mathbf{k})\mathbf{u}\|_{\widetilde{\mathfrak{H}}} \leqslant c_1 \|\mathcal{X}(\mathbf{k})\mathbf{u}\|_{\mathfrak{H}_*}, \quad \mathbf{u} \in \mathfrak{d}, \tag{2.35}$$

где постоянная c_1 определена в (2.12).

Рассмотрим оператор $Y_2 \colon \mathfrak{H} \to \widetilde{\mathfrak{H}}$, действующий по формуле

$$Y_2\mathbf{u} = \{a_1(\mathbf{x})^* f\mathbf{u}, \dots, a_d(\mathbf{x})^* f\mathbf{u}\}^{\mathrm{T}}, \quad \operatorname{Dom} Y_2 = \mathfrak{d}. \tag{2.36}$$

Как показано в [31, п. 5.7], для любого $\nu_* > 0$ существуют положительные постоянные $C_j(\nu_*) > 0$ такие, что

$$\|a_j^*\mathbf{v}\|^2_{\mathfrak{H}} \leqslant \nu_* \|(\mathbf{D}+\mathbf{k})\mathbf{v}\|^2_{\widetilde{\mathfrak{H}}} + C_j(\nu_*)\|\mathbf{v}\|^2_{\mathfrak{H}}, \quad \mathbf{v} \in \widetilde{H}^1(\Omega; \mathbb{C}^n), \ \mathbf{k} \in \mathbb{R}^d, \ j = 1, \dots, d.$$

Подставим $\mathbf{v} = f\mathbf{u}$, $\mathbf{u} \in \mathfrak{d}$, просуммируем по j и, учитывая нижнюю оценку (2.29), получим, что для любого $\nu_* > 0$ найдётся постоянная $C(\nu_*) > 0$ (та же, что и в (2.14)) такая, что

$$\|Y_2\mathbf{u}\|^2_{\widetilde{\mathfrak{H}}} \leqslant \nu_* \|\mathcal{X}(\mathbf{k})\mathbf{u}\|^2_{\mathfrak{H}_*} + C(\nu_*)\|\mathbf{u}\|^2_{\mathfrak{H}}, \quad \mathbf{u} \in \mathfrak{d}, \ \mathbf{k} \in \mathbb{R}^d. \tag{2.37}$$

2.1.8 Форма $q_\Omega[\mathbf{u}, \mathbf{u}]$

В пространстве $\mathfrak{H}$ рассмотрим форму

$$q_\Omega[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = \int_\Omega \langle d\mu(\mathbf{x})\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle, \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \widetilde{H}^1(\Omega; \mathbb{C}^n). \tag{2.38}$$

Заменяя в (2.15) $f(\mathbf{x})\mathbf{u}(\mathbf{x})$ и $f(\mathbf{x})\mathbf{v}(\mathbf{x})$ на $f(\mathbf{x})\mathbf{u}(\mathbf{x})e^{i\langle \mathbf{k}, \mathbf{x}\rangle}$ и $f(\mathbf{x})\mathbf{v}(\mathbf{x})e^{i\langle \mathbf{k}, \mathbf{x}\rangle}$ соответственно (эти функции принадлежат $H^1(\Omega; \mathbb{C}^n)$ одновременно) и используя (2.29), получаем, что выполнены оценки

$$\begin{gathered} \left|q_\Omega[f\mathbf{u}, f\mathbf{v}]\right| \leqslant \left(c_2\|\mathcal{X}(\mathbf{k})\mathbf{u}\|^2_{\mathfrak{H}_*} + c_3\|\mathbf{u}\|^2_{\mathfrak{H}}\right)^{1/2} \left(c_2\|\mathcal{X}(\mathbf{k})\mathbf{v}\|^2_{\mathfrak{H}_*} + c_3\|\mathbf{v}\|^2_{\mathfrak{H}}\right)^{1/2}, \\ q_\Omega[f\mathbf{u}, f\mathbf{u}] \geqslant -(1-\kappa)\|\mathcal{X}(\mathbf{k})\mathbf{u}\|^2_{\mathfrak{H}_*} - c_0\|\mathbf{u}\|^2_{\mathfrak{H}}, \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathfrak{d}, \end{gathered} \tag{2.39}$$

где постоянные κ, c_0, c_2, c_3 — те же, что в (2.16).

2.1.9 Оператор $\mathcal{B}(\mathbf{k}, \varepsilon)$

В пространстве $\mathfrak{H}$ рассмотрим квадратичную форму

$$\begin{aligned} \mathfrak{b}(\mathbf{k},\varepsilon)[\mathbf{u},\mathbf{u}] = \mathfrak{a}(\mathbf{k})[\mathbf{u},\mathbf{u}] + 2\varepsilon \operatorname{Re}(\mathcal{Y}(\mathbf{k})\mathbf{u}, Y_2\mathbf{u})_{\widetilde{\mathfrak{H}}} \\ + \varepsilon^2 q_\Omega[f\mathbf{u}, f\mathbf{u}] + \varepsilon^2\lambda(\mathcal{Q}_0 f\mathbf{u}, f\mathbf{u})_{\mathfrak{H}}, \quad \mathbf{u} \in \mathfrak{d}, \end{aligned} \tag{2.40}$$

где $0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1$, а $\mathcal{Q}_0$ — оператор в $\mathfrak{H}$, действующий как умножение на $\mathcal{Q}_0(\mathbf{x})$.

Оценим форму (2.40) снизу. Условие (2.23) обеспечивает выполнение неравенства

$$\lambda(\mathcal{Q}_0 f\mathbf{u}, f\mathbf{u})_{\mathfrak{H}} \geqslant (c_0 + c_4 + \beta)\|\mathbf{u}\|^2_{\mathfrak{H}}, \quad \mathbf{u} \in \mathfrak{H}. \tag{2.41}$$

Используя (2.35), (2.37), (2.39), (2.41), нетрудно проверить, что

$$\mathfrak{b}(\mathbf{k},\varepsilon)[\mathbf{u},\mathbf{u}] \geqslant \frac{\kappa}{2}\mathfrak{a}(\mathbf{k})[\mathbf{u},\mathbf{u}] + \beta\varepsilon^2\|\mathbf{u}\|^2_{\mathfrak{H}}, \quad \mathbf{u} \in \mathfrak{d}. \tag{2.42}$$

Из (2.29), (2.35), (2.37) (при $\nu_* = 1$) и верхней оценки (2.39) следует верхняя оценка для квадратичной формы (2.40):

$$\begin{aligned} \mathfrak{b}(\mathbf{k},\varepsilon)[\mathbf{u},\mathbf{u}] \leqslant (2 + c_1^2 + c_2)\alpha_1\|g\|_{L_\infty}\|(\mathbf{D}+\mathbf{k})f\mathbf{u}\|^2_{\widetilde{\mathfrak{H}}} \\ + (C(1) + c_3 + |\lambda|\|\mathcal{Q}_0\|_{L_\infty}\|f\|^2_{L_\infty})\varepsilon^2\|\mathbf{u}\|^2_{\mathfrak{H}}, \quad \mathbf{u} \in \mathfrak{d}. \end{aligned} \tag{2.43}$$

Оценки (2.42), (2.43) показывают, что форма (2.40) замкнута и положительно определена. Через $\mathcal{B}(\mathbf{k},\varepsilon)$ обозначим оператор в пространстве $\mathfrak{H}$, порождённый этой формой. Формально можно записать

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(\mathbf{k},\varepsilon) = f(\mathbf{x})^* b(\mathbf{D}+\mathbf{k})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}+\mathbf{k}) f(\mathbf{x}) \\ + \varepsilon \sum_{j=1}^d f(\mathbf{x})^* \big(a_j(\mathbf{x})(D_j + k_j) + (D_j + k_j)a_j(\mathbf{x})^*\big) f(\mathbf{x}) \\ + \varepsilon^2 f(\mathbf{x})^* \mathcal{Q}(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) + \varepsilon^2 \lambda f(\mathbf{x})^* \mathcal{Q}_0(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

2.1.10 Прямой интеграл для операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}(\varepsilon)$

Под действием преобразования Гельфанда операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}(\varepsilon)$ раскладываются в прямой интеграл:

$$\mathscr{U}\mathcal{A}\mathscr{U}^{-1} = \int_{\widetilde{\Omega}} \oplus \mathcal{A}(\mathbf{k})\, d\mathbf{k}, \tag{2.44}$$

$$\mathscr{U}\mathcal{B}(\varepsilon)\mathscr{U}^{-1} = \int_{\widetilde{\Omega}} \oplus \mathcal{B}(\mathbf{k}, \varepsilon)\, d\mathbf{k}. \tag{2.45}$$

Поясним, что имеется ввиду на примере (2.44). Пусть $\mathbf{v} \in \operatorname{Dom} \mathcal{X}$, тогда $\widetilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k}, \cdot) \in \mathfrak{d}$ при п.в. $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ и

$$\mathfrak{a}[\mathbf{v}, \mathbf{v}] = \int_{\widetilde{\Omega}} \mathfrak{a}(\mathbf{k})[\widetilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k}, \cdot), \widetilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k}, \cdot)]\, d\mathbf{k}. \tag{2.46}$$

Обратно, если для $\widetilde{\mathbf{v}} \in \mathcal{H}$ выполнено $\widetilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k}, \cdot) \in \mathfrak{d}$ при п.в. $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ и интеграл в (2.46) конечен, тогда $\mathbf{v} \in \operatorname{Dom} \mathcal{X}$ и выполнено (2.46).

2.1.11 Включение операторов $\mathcal{A}(\mathbf{k})$ и $\mathcal{B}(\mathbf{k}, \varepsilon)$ в абстрактную схему

Если $d > 1$, то операторы $\mathcal{A}(\mathbf{k})$ и $\mathcal{B}(\mathbf{k}, \varepsilon)$ зависят от многомерного параметра $\mathbf{k}$. Следуя [13, гл. 2], введём одномерный параметр $t = |\mathbf{k}|$. Будем использовать схему главы 1. При этом построения будут зависеть от параметра $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{k}/|\mathbf{k}| \in \mathbb{S}^{d-1}$ и мы должны следить за равномерностью оценок по $\boldsymbol{\theta}$. Пространства $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}_*$ и $\widetilde{\mathfrak{H}}$ определены в (2.28). Положим $X(t) = X(t, \boldsymbol{\theta}) =: \mathcal{X}(t\boldsymbol{\theta})$. При этом выполнено $X(t, \boldsymbol{\theta}) = X_0 + tX_1(\boldsymbol{\theta})$, где $X_0 = h(\mathbf{x})b(\mathbf{D})f(\mathbf{x})$, $\operatorname{Dom} X_0 = \mathfrak{d}$, а $X_1(\boldsymbol{\theta})$ — ограниченный оператор умножения на матрицу $h(\mathbf{x})b(\boldsymbol{\theta})f(\mathbf{x})$. Далее, положим $A(t) = A(t, \boldsymbol{\theta}) =: \mathcal{A}(t\boldsymbol{\theta})$. Ядро $\mathfrak{N} = \operatorname{Ker} X_0 = \operatorname{Ker} \mathcal{A}(0)$ описано в (2.31), $\dim \mathfrak{N} = n$. Число d^0 удовлетворяет оценке (2.33). Как показано в [13, гл. 2, §3], условие $n \leqslant n_* = \dim \operatorname{Ker} X_0^*$ также выполнено. Более того, либо $n_* = n$ (если $m = n$), либо $n_* = \infty$ (если $m > n$).

Роль $Y(t)$ играет оператор $Y(t; \boldsymbol{\theta}) := \mathcal{Y}(t\boldsymbol{\theta})$. В силу (2.34) имеет место равенство

$$Y(t; \boldsymbol{\theta}) = Y_0 + tY_1(\boldsymbol{\theta}),$$

где

$$\begin{gathered} Y_0\mathbf{u} = \mathbf{D}(f\mathbf{u}) = \{D_1 f\mathbf{u}, \dots, D_d f\mathbf{u}\}^{\mathrm{T}}, \quad \operatorname{Dom} Y_0 = \mathfrak{d}, \\ Y_1(\boldsymbol{\theta})\mathbf{u} = \{\theta_1 f\mathbf{u}, \dots, \theta_d f\mathbf{u}\}^{\mathrm{T}}. \end{gathered} \tag{2.47}$$

Условие 1.1.1 выполнено благодаря оценке (2.35). Оператор Y_2 определён в (2.36). Условие 1.1.2 выполнено в силу (2.37). Роль формы $\mathfrak{q}$ из п. 1.1.3 играет форма $q_\Omega[f\ \cdot\ , f\,\cdot]$, определённая в (2.38). Условие 1.1.3 выполнено благодаря оценкам (2.39).

Наконец, роль оператора $\mathfrak{B}(t,\varepsilon)$ играет $\mathfrak{B}(t,\varepsilon;\boldsymbol{\theta}) := \mathcal{B}(t\boldsymbol{\theta},\varepsilon)$. Роль оператора Q_0 из п. 1.1.4 играет оператор умножения на матричнозначную функцию $f(\mathbf{x})^*\mathcal{Q}_0(\mathbf{x})f(\mathbf{x})$. Ограничение (1.6) на параметр λ выполнено благодаря (2.23).

Следуя пунктам 1.1.1, 1.1.5 мы должны фиксировать числа $\delta_{\mathfrak{a}}, \delta_{\mathfrak{b}} > 0$ такие, что $\delta_{\mathfrak{a}} < d^0/8$ и $\delta_{\mathfrak{b}} < \kappa d^0/13$. Учитывая (2.30) и (2.33), положим

$$\delta_{\mathfrak{a}} = \frac{1}{4}c_* r_0^2 = \frac{1}{4}\alpha_0 \|f^{-1}\|^{-2}_{L_\infty}\|g^{-1}\|^{-1}_{L_\infty} r_0^2, \tag{2.48}$$

$$\delta_{\mathfrak{b}} = \frac{1}{4}\kappa c_* r_0^2 = \frac{1}{4}\kappa\alpha_0 \|f^{-1}\|^{-2}_{L_\infty}\|g^{-1}\|^{-1}_{L_\infty} r_0^2. \tag{2.49}$$

Отметим, что в силу (2.7), (2.8) и (2.47) справедливы оценки

$$\|X_1(\boldsymbol{\theta})\| \leqslant \alpha_1^{1/2}\|h\|_{L_\infty}\|f\|_{L_\infty}, \quad \|Y_1(\boldsymbol{\theta})\| \leqslant \|f\|_{L_\infty}, \qquad \boldsymbol{\theta}\in\mathbb{S}^{d-1}. \tag{2.50}$$

Для t^0 и τ^0 (см. (1.1) и (1.10)) примем следующие значения:

$$t^0 = \delta_{\mathfrak{a}}^{1/2}\alpha_1^{-1/2}\|h\|^{-1}_{L_\infty}\|f\|^{-1}_{L_\infty} = \frac{r_0}{2}\alpha_0^{1/2}\alpha_1^{-1/2}\left(\|h\|_{L_\infty}\|h^{-1}\|_{L_\infty}\|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty}\right)^{-1}, \tag{2.51}$$

$$\tau^0 = \delta_{\mathfrak{b}}^{1/2}\left((2+c_1^2+c_2)\alpha_1\|g\|_{L_\infty}\|f\|^2_{L_\infty} + C(1) + c_3 + |\lambda|\|f\|^2_{L_\infty}\|\mathcal{Q}_0\|_{L_\infty}\right)^{-1/2}. \tag{2.52}$$

Отметим, что $t^0 \leqslant r_0/2$. Следовательно, шар $|\mathbf{k}| \leqslant t^0$ целиком лежит внутри $\widetilde{\Omega}$. Важно, что величины c_*, $\delta_{\mathfrak{a}}$, $\delta_{\mathfrak{b}}$, t^0, τ^0 (см. (2.30), (2.48), (2.49), (2.51), (2.52)) не зависят от $\boldsymbol{\theta}$.

В силу (2.30) выполнено условие 1.1.10. Росток $S(\boldsymbol{\theta})$ оператора $A(t,\boldsymbol{\theta})$ невырожден равномерно по $\boldsymbol{\theta}$ (ср. (1.47)):

$$S(\boldsymbol{\theta}) \geqslant c_* I_{\mathfrak{N}}, \qquad \boldsymbol{\theta}\in\mathbb{S}^{d-1}.$$

2.2 Эффективные характеристики оператора $\widehat{\mathcal{A}} = b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})$

2.2.1 Случай $f = \mathbf{1}_n$

Приведём в этом пункте эффективные характеристики для случая $f = \mathbf{1}_n$, которые были построены в [31, пп. 6.3, 6.4, 7.1].

Все объекты, отвечающие случаю $f = \mathbf{1}_n$, *далее помечаются значком* “$\widehat{\ }$”. В частности, для операторов

$$\widehat{\mathcal{A}} = b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}), \tag{2.53}$$

$$\widehat{\mathcal{B}}(\varepsilon) = \widehat{\mathcal{A}} + \varepsilon \sum_{j=1}^{d} (a_j(\mathbf{x}) D_j + D_j a_j(\mathbf{x})^*) + \varepsilon^2 \mathcal{Q}(\mathbf{x}) + \varepsilon^2 \lambda \mathcal{Q}_0(\mathbf{x})$$

соответствующие операторные семейства $\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$, $\widehat{\mathcal{B}}(\mathbf{k}, \varepsilon)$ обозначаются $\widehat{A}(t, \boldsymbol{\theta})$ и $\widehat{\mathfrak{B}}(t, \varepsilon; \boldsymbol{\theta})$.

Имеем:

$$\widehat{\mathfrak{H}} = \mathfrak{H} = L_2(\Omega; \mathbb{C}^n),$$

$$\widehat{X}_0 = h(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}), \quad \operatorname{Dom} \widehat{X}_0 = \widetilde{H}^1(\Omega; \mathbb{C}^n),$$

$\widehat{X}_1(\boldsymbol{\theta})$ — ограниченный оператор умножения на матрицу $h(\mathbf{x}) b(\boldsymbol{\theta})$,

$$\widehat{\mathfrak{N}} = \left\{ \mathbf{u} \in \widehat{\mathfrak{H}} \colon \mathbf{u} = \mathbf{c} \in \mathbb{C}^n \right\}, \quad \dim \widehat{\mathfrak{N}} = n, \tag{2.54}$$

$$\widehat{P}\mathbf{u} = |\Omega|^{-1} \int_\Omega \mathbf{u}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \text{ — ортопроектор на } \widehat{\mathfrak{N}}, \tag{2.55}$$

$$\widehat{Y}_0 \mathbf{u} = \mathbf{D}\mathbf{u} = \{D_1 \mathbf{u}, \dots, D_d \mathbf{u}\}^{\mathrm{T}}, \quad \operatorname{Dom} \widehat{Y}_0 = \widetilde{H}^1(\Omega; \mathbb{C}^n),$$

$$\widehat{Y}_1(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{u} = \{\theta_1 \mathbf{u}, \dots, \theta_d \mathbf{u}\}^{\mathrm{T}},$$

$$\widehat{Y}_2 \mathbf{u} = \{a_1(\mathbf{x})^* \mathbf{u}, \dots, a_d(\mathbf{x})^* \mathbf{u}\}^{\mathrm{T}}, \quad \operatorname{Dom} \widehat{Y}_2 = \widetilde{H}^1(\Omega; \mathbb{C}^n).$$

Согласно п. 1.1.6 введём операторы $\widehat{Z}$ и $\widehat{\widehat{Z}}$. Оператор $\widehat{Z}$ зависит от $\boldsymbol{\theta}$. Как показано в [15, п. 4.1], $\widehat{Z}(\boldsymbol{\theta}) = \Lambda b(\boldsymbol{\theta}) \widehat{P}$, где $\Lambda(\mathbf{x})$ — Γ-периодическая $(n \times m)$-матричнозначная функция, удовлетворяющая уравнению

$$b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) (b(\mathbf{D}) \Lambda(\mathbf{x}) + \mathbf{1}_m) = 0, \qquad \int_\Omega \Lambda(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0. \tag{2.56}$$

В соответствии с [31, п. 6.3], $\widehat{\widehat{Z}} = \widetilde{\Lambda} \widehat{P}$, где $\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x})$ — Γ-периодическая $(n \times n)$-матричнозначная функция, удовлетворяющая уравнению

$$b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) \widetilde{\Lambda}(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{d} D_j a_j(\mathbf{x})^* = 0, \quad \int_\Omega \widetilde{\Lambda}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0. \tag{2.57}$$

Оператор $\widehat{S}$, определённый в п. 1.1.6, теперь зависит от $\boldsymbol{\theta}$. Согласно [13, гл. 3, §1], оператор $\widehat{S}(\boldsymbol{\theta}) \colon \widehat{\mathfrak{N}} \to \widehat{\mathfrak{N}}$ действует как умножение на матрицу $\widehat{S}(\boldsymbol{\theta}) =$

$b(\boldsymbol{\theta})^* g^0 b(\boldsymbol{\theta})$. Здесь g^0 — постоянная положительная $(m \times m)$-матрица, называемая *эффективной* матрицей. Она определяется формулами

$$\widetilde{g}(\mathbf{x}) := g(\mathbf{x})(b(\mathbf{D})\Lambda(\mathbf{x}) + \mathbf{1}_m), \tag{2.58}$$

$$g^0 = |\Omega|^{-1} \int_\Omega \widetilde{g}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}. \tag{2.59}$$

Рассмотрим символ

$$\widehat{S}(\mathbf{k}) := t^2 \widehat{S}(\boldsymbol{\theta}) = b(\mathbf{k})^* g^0 b(\mathbf{k}), \quad \mathbf{k} \in \mathbb{R}^d. \tag{2.60}$$

Выражение (2.60) является символом ДО

$$\widehat{\mathcal{A}}^0 = b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D}), \tag{2.61}$$

действующего в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ и называемого *эффективным оператором* для оператора $\widehat{\mathcal{A}}$.

Пусть $\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})$ — операторное семейство в $L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)$, отвечающее эффективному оператору (2.61). Тогда $\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k}) = b(\mathbf{D} + \mathbf{k})^* g^0 b(\mathbf{D} + \mathbf{k})$ при периодических граничных условиях. Отсюда с учётом (2.55) и (2.60) вытекает тождество

$$\widehat{S}(\mathbf{k})\widehat{P} = \widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})\widehat{P}. \tag{2.62}$$

Далее, в соответствии с [31, (7.2), (7.3)] введём постоянные матрицы:

$$V := |\Omega|^{-1} \int_\Omega (b(\mathbf{D})\Lambda(\mathbf{x}))^* g(\mathbf{x})(b(\mathbf{D})\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x}))\, d\mathbf{x}, \tag{2.63}$$

$$W := |\Omega|^{-1} \int_\Omega (b(\mathbf{D})\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x}))^* g(\mathbf{x})(b(\mathbf{D})\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x}))\, d\mathbf{x}. \tag{2.64}$$

Оператор $\widehat{L}(t, \varepsilon)$, определённый в (1.26), теперь зависит от $\boldsymbol{\theta}$. Для него справедливо представление (см. [31, (7.8)]):

$$\begin{aligned} \widehat{L}(t, \varepsilon; \boldsymbol{\theta}) =: \widehat{L}(\mathbf{k}, \varepsilon) = b(\mathbf{k})^* g^0 b(\mathbf{k}) - \varepsilon\, (b(\mathbf{k})^* V + V^* b(\mathbf{k})) \\ + \varepsilon \sum_{j=1}^d (\overline{a_j + a_j^*}) k_j + \varepsilon^2 (-W + \overline{\mathcal{Q}} + \lambda \overline{\mathcal{Q}_0}), \end{aligned}$$

где используются обозначения

$$\overline{\mathcal{Q}} = |\Omega|^{-1} \int_\Omega d\mu(\mathbf{x}), \qquad \overline{\mathcal{Q}_0} = |\Omega|^{-1} \int_\Omega \mathcal{Q}_0(\mathbf{x})\, d\mathbf{x},$$

$$\overline{a_j + a_j^*} = |\Omega|^{-1} \int_\Omega (a_j(\mathbf{x}) + a_j^*(\mathbf{x}))\, d\mathbf{x}.$$

В $L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)$ рассмотрим оператор

$$\widehat{\mathcal{B}}^0(\mathbf{k},\varepsilon) = b(\mathbf{D}+\mathbf{k})^* g^0 b(\mathbf{D}+\mathbf{k}) - \varepsilon\big(b(\mathbf{D}+\mathbf{k})^* V + V^* b(\mathbf{D}+\mathbf{k})\big)$$
$$+\,\varepsilon\sum_{j=1}^{d}(\overline{a_j + a_j^*})(D_j + k_j) + \varepsilon^2(-W + \overline{\mathcal{Q}} + \lambda\overline{\mathcal{Q}_0})$$

при периодических граничных условиях. Имеет место равенство

$$\widehat{L}(\mathbf{k},\varepsilon)\widehat{P} = \widehat{\mathcal{B}}^0(\mathbf{k},\varepsilon)\widehat{P}. \tag{2.65}$$

2.2.2 Свойства эффективной матрицы

Следующие свойства матрицы g^0 были проверены в [13, гл. 3, теорема 1.5].

Предложение 2.2.1 ([13]). *Для эффективной матрицы справедливы оценки*

$$\underline{g} \leqslant g^0 \leqslant \overline{g}, \tag{2.66}$$

где $\overline{g} := |\Omega|^{-1}\int_\Omega g(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$ *и* $\underline{g} := \big(|\Omega|^{-1}\int_\Omega g(\mathbf{x})^{-1}\,d\mathbf{x}\big)^{-1}$. *В случае* $m = n$ *всегда выполнено* $g^0 = \underline{g}$.

Оценки (2.66) известны в теории усреднения для конкретных ДО как вилка Фойгта–Рейсса.

Теперь выделим условия, при которых реализуется верхняя или нижняя грань в (2.66); см. [13, гл. 3, предложения 1.6, 1.7].

Предложение 2.2.2 ([13]). *Равенство* $g^0 = \overline{g}$ *равносильно соотношениям*

$$b(\mathbf{D})^*\mathbf{g}_k(\mathbf{x}) = 0, \quad k = 1,\dots,m, \tag{2.67}$$

где $\mathbf{g}_k(\mathbf{x})$, $k = 1,\dots,m$, *— столбцы матрицы* $g(\mathbf{x})$.

Предложение 2.2.3 ([13]). *Равенство* $g^0 = \underline{g}$ *равносильно представлениям*

$$\mathbf{l}_k(\mathbf{x}) = \mathbf{l}_k^0 + b(\mathbf{D})\mathbf{w}_k(\mathbf{x}), \quad \mathbf{l}_k^0 \in \mathbb{C}^m, \quad \mathbf{w}_k \in \widetilde{H}^1(\Omega;\mathbb{C}^n), \quad k = 1,\dots,m, \tag{2.68}$$

где $\mathbf{l}_k(\mathbf{x})$, $k = 1,\dots,m$, *— столбцы матрицы* $g(\mathbf{x})^{-1}$.

2.3 Операторы $\mathcal{A}(\mathbf{k})$ и $\mathcal{B}(\mathbf{k},\varepsilon)$. Применение схемы п. 1.5

2.3.1 Применение схемы п. 1.5 к операторам $\mathcal{A}(\mathbf{k})$ и $\mathcal{B}(\mathbf{k},\varepsilon)$

Операторы $\mathcal{A}(\mathbf{k}) = f^*\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})f$, $\mathcal{B}(\mathbf{k},\varepsilon) = f^*\widehat{\mathcal{B}}(\mathbf{k},\varepsilon)f$ изучаются на основании схемы п. 1.5. Сейчас $\mathfrak{H} = \widehat{\mathfrak{H}} = L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)$, $\mathfrak{H}_* = L_2(\Omega;\mathbb{C}^m)$, роль операторов $A(t)$, $\mathfrak{B}(t,\varepsilon)$ играют $A(t,\boldsymbol{\theta}) = \mathcal{A}(\mathbf{k})$ и $\mathfrak{B}(t,\varepsilon;\boldsymbol{\theta}) = \mathcal{B}(\mathbf{k},\varepsilon)$; роль операторов $\widehat{A}(t)$, $\widehat{\mathfrak{B}}(t,\varepsilon)$ играют $\widehat{A}(t,\boldsymbol{\theta}) = \widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$ и $\widehat{\mathfrak{B}}(t,\varepsilon;\boldsymbol{\theta}) = \mathcal{B}(\mathbf{k},\varepsilon)$. В качестве изоморфизма M выступает оператор умножения на матричнозначную функцию $f(\mathbf{x})$. В качестве оператора $\mathfrak{Q}$ (см. (1.251)) выступает оператор умножения на матричнозначную функцию $\mathfrak{Q}(\mathbf{x}) := (f(\mathbf{x})f(\mathbf{x})^*)^{-1}$. Блок $\mathfrak{Q}$ в ядре $\widehat{\mathfrak{N}}$ — оператор умножения на постоянную матрицу $\overline{\mathfrak{Q}} = |\Omega|^{-1}\int_\Omega (f(\mathbf{x})f(\mathbf{x})^*)^{-1}d\mathbf{x}$. Роль оператора M_0 (см. (1.271)) играет оператор умножения на постоянную матрицу

$$f_0 := (\overline{\mathfrak{Q}})^{-1/2} = \left(|\Omega|^{-1}\int_\Omega (f(\mathbf{x})f(\mathbf{x})^*)^{-1}d\mathbf{x}\right)^{-1/2}.$$

Отметим, что

$$|f_0| \leqslant \|f\|_{L_\infty}, \quad |f_0^{-1}| \leqslant \|f^{-1}\|_{L_\infty}. \tag{2.69}$$

В $L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)$ определим операторы $\mathcal{A}^0(\mathbf{k}) := f_0\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})f_0$ и $\mathcal{B}^0(\mathbf{k},\varepsilon) := f_0\widehat{\mathcal{B}}^0(\mathbf{k},\varepsilon)f_0$. Согласно (2.55), (2.62), (2.65) справедливы равенства

$$f_0\widehat{S}(\mathbf{k})f_0\widehat{P} = \mathcal{A}^0(\mathbf{k})\widehat{P}, \tag{2.70}$$

$$f_0\widehat{L}(\mathbf{k},\varepsilon)f_0\widehat{P} = \mathcal{B}^0(\mathbf{k},\varepsilon)\widehat{P}. \tag{2.71}$$

2.3.2 Аналитические ветви собственных значений и собственных элементов оператора $\mathcal{A}(\mathbf{k})$

Согласно (1.253), спектральный росток $S(\boldsymbol{\theta})$ оператора $A(t,\boldsymbol{\theta})$, действующий в подпространстве $\mathfrak{N}$ (см. (2.31)), представляется в виде $S(\boldsymbol{\theta}) = Pf^*b(\boldsymbol{\theta})^*g^0b(\boldsymbol{\theta})f|_{\mathfrak{N}}$, где P — ортопроектор пространства $L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)$ на $\mathfrak{N}$. Положим $S(\mathbf{k}) := t^2S(\boldsymbol{\theta}) = Pf^*b(\mathbf{k})^*g^0b(\mathbf{k})f|_{\mathfrak{N}}$.

Аналитические (по t) ветви собственных значений $\lambda_l^{\mathfrak{a}}(t,\boldsymbol{\theta})$ и собственных элементов $\varphi_l^{\mathfrak{a}}(t,\boldsymbol{\theta})$ оператора $A(t,\boldsymbol{\theta})$ допускают степенные разложения вида (1.19), (1.20) с коэффициентами, зависящими от $\boldsymbol{\theta}$:

$$\begin{aligned} &\lambda_l^{\mathfrak{a}}(t,\boldsymbol{\theta}) = \gamma_l^{\mathfrak{a}}(\boldsymbol{\theta})t^2 + \mu_l^{\mathfrak{a}}(\boldsymbol{\theta})t^3 + \nu_l^{\mathfrak{a}}(\boldsymbol{\theta})t^4 + \dots, \qquad && l = 1,\dots,n,\\ &\varphi_l^{\mathfrak{a}}(t,\boldsymbol{\theta}) = \omega_l^{\mathfrak{a}}(\boldsymbol{\theta}) + t\psi_l^{\mathfrak{a},(1)}(\boldsymbol{\theta}) + \dots, && l = 1,\dots,n. \end{aligned} \tag{2.72}$$

При этом $\omega_1^{\mathfrak{a}}(\boldsymbol{\theta}),\dots,\omega_n^{\mathfrak{a}}(\boldsymbol{\theta})$ образуют ортонормированный базис в подпространстве $\mathfrak{N}$, а векторы $\zeta_l^{\mathfrak{a}}(\boldsymbol{\theta}) = f\omega_l^{\mathfrak{a}}(\boldsymbol{\theta})$, $l = 1,\dots,n$, образуют базис в $\widehat{\mathfrak{N}}$ (см. (2.54)), ортонормированный с весом: $(\overline{\mathfrak{Q}}\zeta_l^{\mathfrak{a}}(\boldsymbol{\theta}),\zeta_j^{\mathfrak{a}}(\boldsymbol{\theta})) = \delta_{jl}$, $j,l = 1,\dots,n$.

Числа $\gamma_l^{\mathfrak{a}}(\boldsymbol{\theta})$ и элементы $\omega_l^{\mathfrak{a}}(\boldsymbol{\theta})$ являются собственными для спектрального ростка $S(\boldsymbol{\theta})$. Согласно (1.265) числа $\gamma_l^{\mathfrak{a}}(\boldsymbol{\theta})$ и элементы $\zeta_l^{\mathfrak{a}}(\boldsymbol{\theta})$ являются собственными значениями и собственными элементами следующей обобщённой спектральной задачи:

$$b(\boldsymbol{\theta})^* g^0 b(\boldsymbol{\theta})\zeta_l^{\mathfrak{a}}(\boldsymbol{\theta}) = \gamma_l^{\mathfrak{a}}(\boldsymbol{\theta})\overline{\mathfrak{Q}}\zeta_l^{\mathfrak{a}}(\boldsymbol{\theta}), \qquad l = 1,\dots,n. \tag{2.73}$$

2.3.3 Операторы $\widehat{Z}_{\mathfrak{Q}}(\boldsymbol{\theta})$, $\widehat{N}_{\mathfrak{Q}}(\boldsymbol{\theta})$

Опишем операторы $\widehat{Z}_{\mathfrak{Q}}$, $\widehat{N}_{\mathfrak{Q}}$ (определённые в абстрактных терминах в п. 1.5.3). Для этого введём Γ-периодическое решение $\Lambda_{\mathfrak{Q}}(\mathbf{x})$ задачи

$$b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x})(b(\mathbf{D})\Lambda_{\mathfrak{Q}}(\mathbf{x}) + \mathbf{1}_m) = 0, \qquad \int_\Omega \mathfrak{Q}(\mathbf{x})\Lambda_{\mathfrak{Q}}(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = 0.$$

Ясно, что $\Lambda_{\mathfrak{Q}}(\mathbf{x})$ отличается от периодического решения $\Lambda(\mathbf{x})$ задачи (2.56) на постоянное слагаемое: $\Lambda_{\mathfrak{Q}}(\mathbf{x}) = \Lambda(\mathbf{x}) + \Lambda_{\mathfrak{Q}}^0$, $\Lambda_{\mathfrak{Q}}^0 = -(\overline{\mathfrak{Q}})^{-1}(\overline{\mathfrak{Q}\Lambda})$. Как проверено в [15, §5], операторы $\widehat{Z}_{\mathfrak{Q}}(\boldsymbol{\theta})$ и $\widehat{N}_{\mathfrak{Q}}(\boldsymbol{\theta})$ сейчас принимают вид

$$\begin{aligned} \widehat{Z}_{\mathfrak{Q}}(\boldsymbol{\theta}) &= \Lambda_{\mathfrak{Q}} b(\boldsymbol{\theta})\widehat{P},\\ \widehat{N}_{\mathfrak{Q}}(\boldsymbol{\theta}) &= b(\boldsymbol{\theta})^* L_{\mathfrak{Q}}(\boldsymbol{\theta}) b(\boldsymbol{\theta})\widehat{P}, \end{aligned} \tag{2.74}$$

где $L_{\mathfrak{Q}}(\boldsymbol{\theta})$ — $(m \times m)$-матрица, заданная соотношением

$$L_{\mathfrak{Q}}(\boldsymbol{\theta}) = |\Omega|^{-1} \int_\Omega (\Lambda_{\mathfrak{Q}}(\mathbf{x})^* b(\boldsymbol{\theta})^* \widetilde{g}(\mathbf{x}) + \widetilde{g}(\mathbf{x})^* b(\boldsymbol{\theta})\Lambda_{\mathfrak{Q}}(\mathbf{x}))\,d\mathbf{x}.$$

В [15, §5] указаны некоторые достаточные условия, когда $\widehat{N}_{\mathfrak{Q}}(\boldsymbol{\theta}) \equiv 0$.

Предложение 2.3.1 ([15]). *Пусть выполнено хотя бы одно из следующих предположений:*

а) *Оператор $\mathcal{A}$ имеет вид $\mathcal{A} = f(\mathbf{x})^*\mathbf{D}^*g(\mathbf{x})\mathbf{D}f(\mathbf{x})$, где $g(\mathbf{x})$ — симметричная матрица с вещественными элементами.*

б) *Выполнены соотношения (2.67), т. е. $g^0 = \overline{g}$.*

в) *Выполнены соотношения (2.68) , т. е. $g^0 = \underline{g}$, и $f = \mathbf{1}_n$.*

Тогда $\widehat{N}_{\mathfrak{Q}}(\boldsymbol{\theta}) = 0$ при всех $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$.

Напомним (см. п. 1.5.3), что справедливо представление

$$\widehat{N}_{\mathfrak{Q}}(\boldsymbol{\theta}) = \widehat{N}_{0,\mathfrak{Q}}(\boldsymbol{\theta}) + \widehat{N}_{*,\mathfrak{Q}}(\boldsymbol{\theta}).$$

Согласно (1.267)

$$\widehat{N}_{0,\mathfrak{Q}}(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{l=1}^{n} \mu_l^{\mathfrak{a}}(\boldsymbol{\theta})(\cdot, \overline{\mathfrak{Q}}\zeta_l^{\mathfrak{a}}(\boldsymbol{\theta}))_{L_2(\Omega)}\overline{\mathfrak{Q}}\zeta_l^{\mathfrak{a}}(\boldsymbol{\theta}).$$

При этом

$$(\widehat{N}_{\mathfrak{Q}}(\boldsymbol{\theta})\zeta_l^{\mathfrak{a}}(\boldsymbol{\theta}), \zeta_l^{\mathfrak{a}}(\boldsymbol{\theta}))_{L_2(\Omega)} = (\widehat{N}_{0,\mathfrak{Q}}(\boldsymbol{\theta})\zeta_l^{\mathfrak{a}}(\boldsymbol{\theta}), \zeta_l^{\mathfrak{a}}(\boldsymbol{\theta}))_{L_2(\Omega)} = \mu_l^{\mathfrak{a}}(\boldsymbol{\theta}), \qquad l = 1, \dots, n.$$

В [15, §5] проверено следующее утверждение.

Предложение 2.3.2. *Пусть $b(\boldsymbol{\theta})$, $g(\mathbf{x})$ и $\mathfrak{Q}(\mathbf{x})$ — матрицы с вещественными элементами. Пусть в разложениях (2.72) для аналитических ветвей собственных векторов оператора $A(t, \boldsymbol{\theta})$ “зародыши” $\omega_l^{\mathfrak{a}}(\boldsymbol{\theta})$, $l = 1, \dots, n$, можно выбрать так, чтобы векторы $\zeta_l^{\mathfrak{a}}(\boldsymbol{\theta}) = f\omega_l^{\mathfrak{a}}(\boldsymbol{\theta})$ оказались вещественными. Тогда $\mu_l^{\mathfrak{a}}(\boldsymbol{\theta}) = 0$, $l = 1, \dots, n$, то есть, $\widehat{N}_{0,\mathfrak{Q}}(\boldsymbol{\theta}) = 0$.*

В рассматриваемом “вещественном” случае росток $\widehat{S}(\boldsymbol{\theta})$ представляет собой симметричную вещественную матрицу; матрица $\overline{\mathfrak{Q}}$ тоже вещественна и симметрична. Ясно, что в случае простого собственного значения $\gamma_j^{\mathfrak{a}}(\boldsymbol{\theta})$ задачи (2.73) собственный вектор $\zeta_j^{\mathfrak{a}}(\boldsymbol{\theta}) = f\omega_j^{\mathfrak{a}}(\boldsymbol{\theta})$ определяется однозначно с точностью до фазового множителя, и его всегда можно выбрать вещественным. Мы получаем следствие.

Следствие 2.3.3. *Пусть $b(\boldsymbol{\theta})$, $g(\mathbf{x})$ и $\mathfrak{Q}(\mathbf{x})$ — матрицы с вещественными элементами. Пусть задача (2.73) имеет простой спектр. Тогда $\widehat{N}_{0,\mathfrak{Q}}(\boldsymbol{\theta}) = 0$.*

2.3.4 Операторы $\widehat{Z}_{2,\mathfrak{Q}}(\boldsymbol{\theta})$, $\widehat{R}_{2,\mathfrak{Q}}(\boldsymbol{\theta})$ и $\widehat{N}^0_{1,\mathfrak{Q}}(\boldsymbol{\theta})$

Опишем операторы $\widehat{Z}_{2,\mathfrak{Q}}$, $\widehat{R}_{2,\mathfrak{Q}}$ и $\widehat{N}^0_{1,\mathfrak{Q}}$ (см. п. 1.5.4) для семейства $A(t,\boldsymbol{\theta})$. Пусть $\Lambda^{(2)}_{l,\mathfrak{Q}}(\mathbf{x})$ — Γ-периодическое решение задачи

$$b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x})\big(b(\mathbf{D})\Lambda^{(2)}_{l,\mathfrak{Q}}(\mathbf{x}) + b_l \Lambda_{\mathfrak{Q}}(\mathbf{x})\big) = -b_l^* \widetilde{g}(\mathbf{x}) + \mathfrak{Q}(\mathbf{x})(\overline{\mathfrak{Q}})^{-1} b_l^* g^0,$$
$$\int_\Omega \mathfrak{Q}(\mathbf{x})\Lambda^{(2)}_{l,\mathfrak{Q}}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0.$$

Положим $\Lambda^{(2)}_{\mathfrak{Q}}(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta}) := \sum_{l=1}^d \Lambda^{(2)}_{l,\mathfrak{Q}}(\mathbf{x})\theta_l$. Как проверено в [26, п. 8.4],

$$\widehat{Z}_{2,\mathfrak{Q}}(\boldsymbol{\theta}) = \Lambda^{(2)}_{\mathfrak{Q}}(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta}) b(\boldsymbol{\theta})\widehat{P}, \quad \widehat{R}_{2,\mathfrak{Q}}(\boldsymbol{\theta}) = h(\mathbf{x})\big(b(\mathbf{D})\Lambda^{(2)}_{\mathfrak{Q}}(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta}) + b(\boldsymbol{\theta})\Lambda_{\mathfrak{Q}}(\mathbf{x})\big) b(\boldsymbol{\theta}).$$

Наконец, в [26, п. 8.5] было получено представление

$$\widehat{N}^0_{1,\mathfrak{Q}}(\boldsymbol{\theta}) = b(\boldsymbol{\theta})^* L_{2,\mathfrak{Q}}(\boldsymbol{\theta}) b(\boldsymbol{\theta})\widehat{P},$$
$$L_{2,\mathfrak{Q}}(\boldsymbol{\theta}) = |\Omega|^{-1}\int_\Omega \Big(\Lambda^{(2)}_{\mathfrak{Q}}(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta})^* b(\boldsymbol{\theta})^* \widetilde{g}(\mathbf{x}) + \widetilde{g}(\mathbf{x})^* b(\boldsymbol{\theta})\Lambda^{(2)}_{\mathfrak{Q}}(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta})\Big)\, d\mathbf{x}$$
$$+ |\Omega|^{-1}\int_\Omega \Big(b(\mathbf{D})\Lambda^{(2)}_{\mathfrak{Q}}(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta}) + b(\boldsymbol{\theta})\Lambda_{\mathfrak{Q}}(\mathbf{x})\Big)^* g(\mathbf{x})\Big(b(\mathbf{D})\Lambda^{(2)}_{\mathfrak{Q}}(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta}) + b(\boldsymbol{\theta})\Lambda_{\mathfrak{Q}}(\mathbf{x})\Big)\, d\mathbf{x}.$$

2.3.5 Кратности собственных значений ростка

В данном пункте считаем, что $n \geqslant 2$. Перейдём к обозначениям, принятым в п. 1.1.11. Вообще говоря, количество $p(\boldsymbol{\theta})$ различных собственных значений $\gamma_1^{\mathfrak{a},\circ}(\boldsymbol{\theta}), \dots, \gamma_{p(\boldsymbol{\theta})}^{\mathfrak{a},\circ}(\boldsymbol{\theta})$ спектрального ростка $S(\boldsymbol{\theta})$ (или задачи (2.73)) и их кратности $k_1(\boldsymbol{\theta}), \dots, k_{p(\boldsymbol{\theta})}(\boldsymbol{\theta})$ зависят от параметра $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$. Через $\mathfrak{N}_j(\boldsymbol{\theta})$ обозначим собственное подпространство ростка $S(\boldsymbol{\theta})$, отвечающее собственному значению $\gamma_j^{\mathfrak{a},\circ}(\boldsymbol{\theta})$. Тогда $f\mathfrak{N}_j(\boldsymbol{\theta}) = \operatorname{Ker}\big(\widehat{S}(\boldsymbol{\theta}) - \gamma_j^{\mathfrak{a},\circ}(\boldsymbol{\theta})\overline{\mathfrak{Q}}\big) =: \widehat{\mathfrak{N}}_{j,\mathfrak{Q}}(\boldsymbol{\theta})$ — собственное подпространство задачи (2.73), отвечающее тому же значению $\gamma_j^{\mathfrak{a},\circ}(\boldsymbol{\theta})$. Введём обозначение $\mathcal{P}_j(\boldsymbol{\theta})$ для "косого" проектора пространства $L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)$ на подпространство $\widehat{\mathfrak{N}}_{j,\mathfrak{Q}}(\boldsymbol{\theta})$; $\mathcal{P}_j(\boldsymbol{\theta})$ ортогонален относительно скалярного произведения с весом $\overline{\mathfrak{Q}}$. Согласно (1.268) справедливы инвариантные представления для операторов $\widehat{N}_{0,\mathfrak{Q}}(\theta)$ и $\widehat{N}_{*,\mathfrak{Q}}(\theta)$:

$$\widehat{N}_{0,\mathfrak{Q}}(\theta) = \sum_{j=1}^{p(\theta)} \mathcal{P}_j(\theta)^* \widehat{N}_{\mathfrak{Q}}(\theta)\mathcal{P}_j(\theta), \tag{2.75}$$

$$\widehat{N}_{*,\mathfrak{Q}}(\theta) = \sum_{1\leqslant j,l\leqslant p(\theta):\ j\neq l} \mathcal{P}_j(\theta)^* \widehat{N}_{\mathfrak{Q}}(\theta)\mathcal{P}_l(\theta). \tag{2.76}$$

2.3.6 Коэффициенты $\nu_l^{\mathfrak{a}}(\theta)$

Согласно (1.58), числа $\mu_l^{\mathfrak{a}}(\theta)$ и элементы $\omega_l^{\mathfrak{a}}(\theta)$, $l = i(q,\theta),\dots,i(q,\theta) + k_q(\theta) - 1$, где $i(q,\theta) = k_1(\theta) + \ldots + k_{q-1}(\theta) + 1$, являются собственными для оператора $P_q(\theta)N(\theta)|_{\mathfrak{N}_q(\theta)}$. Тогда, в силу (1.269),

$$\begin{gathered}\widehat{P}_{q,\mathfrak{Q}}(\theta)\widehat{N}_{\mathfrak{Q}}(\theta)\zeta_l^{\mathfrak{a}}(\theta) = \mu_l^{\mathfrak{a}}(\theta)\widehat{P}_{q,\mathfrak{Q}}\overline{\mathfrak{Q}}\zeta_l^{\mathfrak{a}}(\theta),\\ l = i(q,\theta),\dots,i(q,\theta) + k_q(\theta) - 1,\end{gathered} \tag{2.77}$$

где $\widehat{P}_{q,\mathfrak{Q}}(\theta)$ — ортопроектор на $\widehat{\mathfrak{N}}_{q,\mathfrak{Q}}(\theta)$.

Количество $p'(q,\theta)$ различных собственных чисел $\mu_{1,q}^{\mathfrak{a},\circ}(\theta),\dots,\mu_{p'(q,\theta),q}^{\mathfrak{a},\circ}(\theta)$ оператора $P_q(\theta)N(\theta)|_{\mathfrak{N}_q(\theta)}$ и их кратности $k_{1,q}(\theta),\dots,k_{p'(\theta),q}(\theta)$ зависят от параметра $\theta \in \mathbb{S}^{d-1}$. При каждом фиксированном θ через $\mathfrak{N}_{q',q}^{\mathfrak{a}}(\theta)$ обозначим собственное подпространство, отвечающее собственному значению $\mu_{q',q}^{\mathfrak{a},\circ}(\theta)$. Тогда $\widehat{\mathfrak{N}}_{q',q,\mathfrak{Q}}^{\mathfrak{a}}(\theta) := f\mathfrak{N}_{q',q}^{\mathfrak{a}}(\theta)$ — собственное подпространство задачи (2.77), отвечающее тому же значению $\mu_{q',q}^{\mathfrak{a},\circ}(\theta)$.

Наконец, согласно (1.270), числа $\nu_l^{\mathfrak{a}}(\theta)$ и элементы $\zeta_l^{\mathfrak{a}}(\theta)$, $l = i'(q',q,\theta),\dots,i'(q',q,\theta) + k_{q',q}(\theta) - 1$, где $i'(q',q,\theta) = i(q,\theta) + k_{1,q}(\theta) + \ldots + k_{q'-1,q}(\theta)$, являются собственными значениями и собственными элементами следующей обобщённой спектральной задачи:

$$\begin{gathered}\widehat{\mathcal{N}}_Q^{(q',q)}(\theta)\zeta_l^{\mathfrak{a}}(\theta) = \nu_l^{\mathfrak{a}}(\theta)\widehat{P}_{q',q,\mathfrak{Q}}^{\mathfrak{a}}(\theta)\overline{\mathfrak{Q}}\zeta_l^{\mathfrak{a}}(\theta),\\ l = i'(q',q,\theta),\dots,i'(q',q,\theta) + k_q(\theta) - 1,\end{gathered}$$

где

$$\widehat{\mathcal{N}}_{\mathfrak{Q}}^{(q',q)}(\theta) := \widehat{P}^{\mathfrak{a}}_{q',q,\mathfrak{Q}}(\theta) \left(\widehat{N}^0_{1,\mathfrak{Q}}(\theta) - \mathscr{W}_{\mathfrak{Q}}(\theta) - \mathscr{W}_{\mathfrak{Q}}(\theta)^*\right)\Big|_{\widehat{\mathfrak{N}}^{\mathfrak{a}}_{q',q,\mathfrak{Q}}(\theta)}$$
$$+ \sum_{\substack{j\in\{1,\dots,p(\theta)\}\\ j\neq q}} \left(\gamma_q^{\mathfrak{a},\circ}(\theta)-\gamma_j^{\mathfrak{a},\circ}(\theta)\right)^{-1} \widehat{P}^{\mathfrak{a}}_{q',q,\mathfrak{Q}}(\theta)\widehat{N}_{\mathfrak{Q}}(\theta)\widehat{P}_{j,\mathfrak{Q}}(\theta)\mathfrak{Q}^{-1}\widehat{P}_{j,\mathfrak{Q}}(\theta)\widehat{N}_{\mathfrak{Q}}(\theta)|_{\widehat{\mathfrak{N}}^{\mathfrak{a}}_{q',q,\mathfrak{Q}}(\theta)}, \tag{2.78}$$

$\mathscr{W}_{\mathfrak{Q}}(\theta) := \frac{1}{2}\widehat{Z}^*_{\mathfrak{Q}}(\theta)\mathfrak{Q}\widehat{Z}_{\mathfrak{Q}}(\theta)\mathfrak{Q}^{-1}\widehat{S}(\theta)\widehat{P}$ и $\widehat{P}^{\mathfrak{a}}_{q',q,\mathfrak{Q}}(\theta)$ — ортопроектор на $\widehat{\mathfrak{N}}^{\mathfrak{a}}_{q',q,\mathfrak{Q}}(\theta)$.

Отметим, что в случае, когда $\widehat{N}_{0,\mathfrak{Q}}(\theta) = 0$, имеет место $\widehat{\mathfrak{N}}^{\mathfrak{a}}_{1,q,\mathfrak{Q}}(\theta) = \widehat{\mathfrak{N}}_{q,\mathfrak{Q}}(\theta)$, $q = 1,\dots,p(\theta)$. Тогда вместо $\widehat{\mathcal{N}}_{\mathfrak{Q}}^{(1,q)}(\theta)$ мы будем писать $\widehat{\mathcal{N}}_{\mathfrak{Q}}^{(q)}(\theta)$.

2.4 Аппроксимация окаймлённых операторов $\cos(\varepsilon^{-1}s\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2})$, $\mathcal{A}(\mathbf{k})^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}s\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2})$, $e^{-i\varepsilon^{-2}s\mathcal{A}(\mathbf{k})}$ и $e^{-i\varepsilon^{-2}s\mathcal{B}(\mathbf{k},\varepsilon)}$

2.4.1 Общий случай

Рассмотрим оператор $\mathcal{H}_0 = -\Delta$ в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. При разложении в прямой интеграл оператору $\mathcal{H}_0$ отвечает семейство операторов $\mathcal{H}_0(\mathbf{k})$, действующих в $L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)$. Оператор $\mathcal{H}_0(\mathbf{k})$ задаётся дифференциальным выражением $|\mathbf{D}+\mathbf{k}|^2$ при периодических граничных условиях. Обозначим

$$\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon) := \varepsilon^2(\mathcal{H}_0(\mathbf{k}) + \varepsilon^2 I)^{-1}. \tag{2.79}$$

Отметим очевидное тождество

$$\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)^{q/2}\widehat{P} = \varepsilon^q(t^2+\varepsilon^2)^{-q/2}\widehat{P}, \qquad q > 0. \tag{2.80}$$

Заметим, что при $|\mathbf{k}| > t^0$ справедливо неравенство

$$\|\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)^{q/2}\widehat{P}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant (t^0)^{-q}\varepsilon^q, \qquad \varepsilon > 0,\, \mathbf{k}\in\widetilde{\Omega},\ |\mathbf{k}| > t^0. \tag{2.81}$$

Аналогично, при $\sqrt{|\mathbf{k}|^2+\varepsilon^2} > \tau^0$ выполнено

$$\|\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)^{q/2}\widehat{P}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant (\tau^0)^{-q}\varepsilon^q, \quad \varepsilon > 0,\ \mathbf{k}\in\widetilde{\Omega},\ \sqrt{|\mathbf{k}|^2+\varepsilon^2} > \tau^0. \tag{2.82}$$

Далее, используя дискретное преобразование Фурье, получаем оценку

$$\|\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)^{q/2}(I-\widehat{P})\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \sup_{0\neq\mathbf{b}\in\widetilde{\Gamma}} \varepsilon^q(|\mathbf{b}+\mathbf{k}|^2+\varepsilon^2)^{-q/2} \leqslant r_0^{-q}\varepsilon^q, \qquad \varepsilon>0,\ \mathbf{k}\in\widetilde{\Omega}. \tag{2.83}$$

Положим

$$J_1(\mathbf{k},s) := f\cos\big(s\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2}\big)f^{-1} - f_0\cos\big(s\mathcal{A}^0(\mathbf{k})^{1/2}\big)f_0^{-1}, \tag{2.84}$$

$$J_{2,a}(\mathbf{k},s) := f\mathcal{A}(\mathbf{k})^{-1/2}\sin\big(s\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2}\big)f^{-1} - f_0\mathcal{A}^0(\mathbf{k})^{-1/2}\sin\big(s\mathcal{A}^0(\mathbf{k})^{1/2}\big)f_0^{-1}, \tag{2.85}$$

$$J_{2,b}(\mathbf{k},s) := f\mathcal{A}(\mathbf{k})^{-1/2}\sin\big(s\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2}\big)f^{*} - f_0\mathcal{A}^0(\mathbf{k})^{-1/2}\sin\big(s\mathcal{A}^0(\mathbf{k})^{1/2}\big)f_0, \tag{2.86}$$

$$J_3(\mathbf{k},s) := fe^{-is\mathcal{A}(\mathbf{k})}f^{-1} - f_0e^{-is\mathcal{A}^0(\mathbf{k})}f_0^{-1}, \tag{2.87}$$

$$J_4(\mathbf{k},\varepsilon,s) := fe^{-is\mathcal{B}(\mathbf{k},\varepsilon)}f^{-1} - f_0e^{-is\mathcal{B}^0(\mathbf{k},\varepsilon)}f_0^{-1} \tag{2.88}$$

Мы применим к операторам $A(t,\theta)=\mathcal{A}(\mathbf{k})$ и $\mathfrak{B}(t,\varepsilon;\theta)=\mathcal{B}(\mathbf{k},\varepsilon)$ теоремы из п. 1.5. В силу замечания 1.2.16 мы можем отследить зависимость постоянных в оценках от данных задачи. Отметим, что c_*, $\delta_{\mathfrak{a}}$ и t^0 (см. (2.30), (2.48), (2.51)), как и c_1, c_2, $\varkappa$, $C(1)$, $\delta_{\mathfrak{b}}$ и τ^0 (см. (2.12), (2.14), (2.17), (2.49), (2.52)) не зависят от θ. Согласно (2.50) норму $\|X_1(\theta)\|$ можно заменить на $\alpha_1^{1/2}\|g\|_{L_\infty}^{1/2}\|f\|_{L_\infty}$, а норму $\|Y_1(\theta)\|$ — на $\|f\|_{L_\infty}$. Поэтому постоянные из теоремы 1.5.7 (применённые к операторам $\mathcal{A}(\mathbf{k})$ и $\mathcal{B}(\mathbf{k},\varepsilon)$) не будут зависеть от θ. Они будут зависеть только от

$$\alpha_0, \alpha_1, \|g\|_{L_\infty}, \|g^{-1}\|_{L_\infty}, \|f\|_{L_\infty}, \|f^{-1}\|_{L_\infty}, r_0 \tag{2.89}$$

в случае оператора $\mathcal{A}(\mathbf{k})$ или только от

$$\left.\begin{array}{l} d, m, n, \rho; \alpha_0, \alpha_1, \|g\|_{L_\infty}, \|g^{-1}\|_{L_\infty}, \|f\|_{L_\infty}, \|f^{-1}\|_{L_\infty}, \\ \|a_j\|_{L_\rho(\Omega)},\ j=1,\dots,d;\ \ \widetilde{c}, \widehat{c}_0, \widetilde{c}_2, \widehat{c}_3 \text{ из условия 2.1.1}; \\ \lambda, \|\mathcal{Q}_0\|_{L_\infty}, \|\mathcal{Q}_0^{-1}\|_{L_\infty};\quad \text{параметры решётки } \Gamma \end{array}\right\} \tag{2.90}$$

в случае оператора $\mathcal{B}(\mathbf{k},\varepsilon)$.

Теорема 2.4.1. *Пусть операторы* $J_1(\mathbf{k},s)$, $J_{2,a}(\mathbf{k},s)$, $J_{2,b}(\mathbf{k},s)$, $J_3(\mathbf{k},s)$ *и* $J_4(\mathbf{k},\varepsilon,s)$ *определены* (2.84)–(2.88). *При* $s\in\mathbb{R}$, $\varepsilon>0$ *и* $\mathbf{k}\in\widetilde{\Omega}$ *выполнены оценки*

$$\|J_1(\mathbf{k},\varepsilon^{-1}s)\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \mathcal{C}_1(1+|s|)\varepsilon, \tag{2.91}$$

$$\|J_{2,a}(\mathbf{k},\varepsilon^{-1}s)\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)^{1/2}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \mathcal{C}_2(1+|s|), \tag{2.92}$$

$$\begin{aligned}
\|J_{2,b}(\mathbf{k},\varepsilon^{-1}s)\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)^{1/2}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} &\leqslant \widetilde{\mathcal{C}}_2(1+|s|),\\
\|J_3(\mathbf{k},\varepsilon^{-2}s)\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)^{3/2}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} &\leqslant \mathcal{C}_3(1+|s|)\varepsilon, \qquad (2.93)\\
\|J_4(\mathbf{k},\varepsilon,\varepsilon^{-2}s)\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)^{3/2}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} &\leqslant \mathcal{C}_4(1+|s|)\varepsilon. \qquad (2.94)
\end{aligned}$$

Постоянные $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\widetilde{\mathcal{C}}_2$ и $\mathcal{C}_3$ зависят лишь от параметров (2.89)*, постоянная $\mathcal{C}_4$ — лишь от параметров* (2.90).

Теорема 2.4.1 выводится из теоремы 1.5.7 и соотношений (2.80)–(2.83). Следует учесть также очевидные оценки

$$\|J_1(\mathbf{k},\varepsilon^{-1}s)\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant 2\|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty}, \qquad (2.95)$$

$$\begin{aligned}
\|J_{2,a}(\mathbf{k},\varepsilon^{-1}s)\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} &\leqslant 2\|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty}\varepsilon^{-1}|s|,\\
\|J_{2,b}(\mathbf{k},\varepsilon^{-1}s)\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} &\leqslant 2\|f\|^2_{L_\infty}\varepsilon^{-1}|s|, \qquad (2.96)\\
\|J_3(\mathbf{k},\varepsilon^{-2}s)\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} &\leqslant 2\|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty},\\
\|J_4(\mathbf{k},\varepsilon,\varepsilon^{-2}s)\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} &\leqslant 2\|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty}.
\end{aligned}$$

Ранее оценки (2.91), (2.93) были получены в [54, теоремы 8.2, 8.1], неравенство (2.92) было установлено в [55, (7.32)].

Ниже нам понадобится также следующее утверждение.

Предложение 2.4.2. *При $s\in\mathbb{R}$, $\varepsilon>0$ и $\mathbf{k}\in\widetilde{\Omega}$ справедлива оценка*

$$\|J_{2,b}(\mathbf{k},\varepsilon^{-1}s)\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \mathcal{C}_2'(1+\varepsilon^{-1/2}|s|^{1/2}), \qquad (2.97)$$

где $\mathcal{C}_2'$ зависит лишь от параметров (2.89).

Доказательство. Из (1.117) (с заменой s на $\varepsilon^{-1}s$), (1.286) и (1.296) следует, что

$$\begin{aligned}
\|J_{2,b}(\mathbf{k},\varepsilon^{-1}s)\widehat{P}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \mathcal{C}_2^{(1)}(1+\varepsilon^{-1}|s||\mathbf{k}|),&\\
s\in\mathbb{R},\ \varepsilon>0,\ |\mathbf{k}|\leqslant t^0.&
\end{aligned} \qquad (2.98)$$

Оценим теперь оператор $J_{2,b}(\mathbf{k},\varepsilon^{-1}s)(I-\widehat{P})$ при $|\mathbf{k}|\leqslant t^0$. Очевидно,

$$\begin{aligned}
\|J_{2,b}(\mathbf{k},\varepsilon^{-1}s)(I-\widehat{P})\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \|f\|_{L_\infty}\|\mathcal{A}(\mathbf{k})^{-1/2}f^*(I-\widehat{P})\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}&\\
+\|f\|^2_{L_\infty}\|\mathcal{A}^0(\mathbf{k})^{-1/2}(I-\widehat{P})\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}.&
\end{aligned}$$

Второе слагаемое равномерно ограничено, что легко проверить с помощью дискретного преобразования Фурье. Чтобы оценить первое слагаемое, заметим, что

$Pf^*(I-\widehat{P}) = 0$ в силу тождества $Pf^* = f^{-1}(\overline{Q})^{-1}\widehat{P}$ (см. (1.252)). Следовательно, $f^*(I-\widehat{P}) = (I-P)f^*(I-\widehat{P})$, а потому

$$\|\mathcal{A}(\mathbf{k})^{-1/2}f^*(I-\widehat{P})\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \|f\|_{L_\infty}\|\mathcal{A}(\mathbf{k})^{-1/2}(I-P)\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}.$$

Эта величина равномерно ограничена за счёт (1.27) и (2.30). В итоге получаем

$$\|J_{2,b}(\mathbf{k},\varepsilon^{-1}s)(I-\widehat{P})\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \mathcal{C}_2^{(2)}, \quad s\in\mathbb{R},\ \varepsilon>0,\ |\mathbf{k}|\leqslant t^0. \tag{2.99}$$

Если $\varepsilon|s|^{-1} > (t^0)^2$, то искомая оценка (2.97) прямо вытекает из (2.96). Будем считать, что $\varepsilon|s|^{-1} \leqslant (t^0)^2$. Тогда из (2.98) следует, что

$$\|J_{2,b}(\mathbf{k},\varepsilon^{-1}s)\widehat{P}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \mathcal{C}_2^{(1)}(1+\varepsilon^{-1/2}|s|^{1/2}), \qquad |\mathbf{k}|\leqslant \varepsilon^{1/2}|s|^{-1/2}.$$

Вместе с (2.99) это влечёт оценку (2.97) при $|\mathbf{k}|\leqslant\varepsilon^{1/2}|s|^{-1/2}$.

Наконец, из (2.30) (для операторов $\mathcal{A}(\mathbf{k})$ и $\mathcal{A}^0(\mathbf{k})$) вытекает нужная оценка

$$\|J_{2,b}(\mathbf{k},\varepsilon^{-1}s)\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant 2\|f\|^2_{L_\infty}c_*^{-1/2}|\mathbf{k}|^{-1} \leqslant 2\|f\|^2_{L_\infty}c_*^{-1/2}\varepsilon^{-1/2}|s|^{1/2}$$

при $|\mathbf{k}|>\varepsilon^{1/2}|s|^{-1/2}$. □

2.4.2 Случай, когда $\widehat{N}_{\mathfrak{Q}}(\boldsymbol{\theta})=0$

Теперь мы усиливаем результат теоремы 2.4.1 (кроме оценки (2.92)) при дополнительных предположениях. Наложим следующее условие.

Условие 2.4.3. *Пусть оператор* $\widehat{N}_{\mathfrak{Q}}(\boldsymbol{\theta})$ *определён в* (2.74)*. Предположим, что* $\widehat{N}_{\mathfrak{Q}}(\boldsymbol{\theta})=0$ *при всех* $\boldsymbol{\theta}\in\mathbb{S}^{d-1}$.

Теорема 2.4.4. *Пусть выполнено условие* 2.4.3*. Тогда при* $s\in\mathbb{R}$, $\varepsilon>0$ *и* $\mathbf{k}\in\widetilde{\Omega}$ *справедливы оценки*

$$\|J_1(\mathbf{k},\varepsilon^{-1}s)\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)^{3/4}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \mathcal{C}_5(1+|s|)^{1/2}\varepsilon, \tag{2.100}$$

$$\|J_{2,b}(\mathbf{k},\varepsilon^{-1}s)\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)^{1/4}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \mathcal{C}_6(1+|s|)^{1/2}, \tag{2.101}$$

$$\|J_3(\mathbf{k},\varepsilon^{-2}s)\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \mathcal{C}_7(1+|s|)^{1/2}\varepsilon, \tag{2.102}$$

$$\|J_4(\mathbf{k},\varepsilon,\varepsilon^{-2}s)\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \mathcal{C}_8(1+|s|)\varepsilon, \qquad 0<\varepsilon\leqslant 1. \tag{2.103}$$

Постоянные $\mathcal{C}_5$, $\mathcal{C}_6$, $\mathcal{C}_7$ *зависят лишь от параметров* (2.89), $\mathcal{C}_8$ *— лишь от параметров* (2.90).

Доказательство. Начнём с проверки неравенства (2.100). Применяя (1.301) и учитывая (2.70), (2.80), имеем

$$\|J_1(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}s)\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)^{3/4}\widehat{P}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \mathcal{C}_5^\circ(1+|s|)^{1/2}\varepsilon, \\ s\in\mathbb{R},\ \varepsilon>0,\ |\mathbf{k}|\leqslant t^0. \tag{2.104}$$

Из (2.81) при $q=1$ и (2.95) видно, что левая часть в (2.104) не превосходит $2\|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty}(t^0)^{-1}\varepsilon$ при $|\mathbf{k}|>t^0$. Наконец, в силу (2.83) при $q=1$ и (2.95), величина $\|J_1(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}s)\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)^{3/4}(I-\widehat{P})\|$ не превосходит $2\|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty}r_0^{-1}\varepsilon$ при всех $\mathbf{k}\in\widetilde{\Omega}$. В итоге приходим к неравенству (2.100).

Перейдём к доказательству оценки (2.101). В силу (1.303), (2.80) и (2.70)

$$\|J_{2,b}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}s)\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)^{1/4}\widehat{P}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \mathcal{C}_6^\circ(1+|s|)^{1/2}, \quad s\in\mathbb{R},\ \varepsilon>0,\ |\mathbf{k}|\leqslant t^0.$$

Далее, в силу (2.99) норма оператора $J_{2,b}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}s)\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)^{1/4}(I-\widehat{P})$ не превосходит константы $\mathcal{C}_2^{(2)}$ при $|\mathbf{k}|\leqslant t^0$.

При $|\mathbf{k}|>t^0$ неравенство (2.101) вытекает из (2.30) и аналогичного неравенства для $\mathcal{A}^0(\mathbf{k})$.

Оценки (2.102), (2.103) выводятся из (1.304), (1.305) и соотношений (2.70), (2.71), (2.80)–(2.83). $\square$

Нам понадобится также следующее утверждение.

Предложение 2.4.5. *В условиях теоремы 2.4.4 при $s\in\mathbb{R}$, $\varepsilon>0$ и $\mathbf{k}\in\widetilde{\Omega}$*

$$\|J_{2,b}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}s)\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \mathcal{C}_6'(1+\varepsilon^{-1/3}|s|^{1/3}). \tag{2.105}$$

Постоянная $\mathcal{C}_6'$ зависит от параметров (2.89).

Доказательство. Из (1.119) (с заменой s на $\varepsilon^{-1}s$), (1.286) и (1.296) следует, что

$$\|J_{2,b}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}s)\widehat{P}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \mathcal{C}_6^{(1)}(1+\varepsilon^{-1}|s||\mathbf{k}|^2), \quad s\in\mathbb{R},\ \varepsilon>0,\ |\mathbf{k}|\leqslant t^0. \tag{2.106}$$

Если $\varepsilon|s|^{-1}>(t^0)^3$, то искомая оценка (2.105) прямо вытекает из (2.96). Будем считать, что $\varepsilon|s|^{-1}\leqslant(t^0)^3$. Тогда из (2.106) следует, что

$$\|J_{2,b}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}s)\widehat{P}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \mathcal{C}_6^{(1)}(1+\varepsilon^{-1/3}|s|^{1/3}), \quad |\mathbf{k}|\leqslant\varepsilon^{1/3}|s|^{-1/3}.$$

Вместе с (2.99) это приводит к оценке (2.105) при $|\mathbf{k}|\leqslant\varepsilon^{1/3}|s|^{-1/3}$.

Наконец, из (2.30) и аналогичного неравенства для $\mathcal{A}^0(\mathbf{k})$ следует нужная оценка

$$\|J_{2,b}(\mathbf{k},\varepsilon^{-1}s)\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant 2\|f\|^2_{L_\infty} c_*^{-1/2}|\mathbf{k}|^{-1} \leqslant 2\|f\|^2_{L_\infty} c_*^{-1/2}\varepsilon^{-1/3}|s|^{1/3}$$

при $|\mathbf{k}| > \varepsilon^{1/3}|s|^{-1/3}$. $\square$

Замечание 2.4.6. а) *В условиях теоремы 2.4.4 не удаётся вывести из абстрактного неравенства (1.302) аналог оценки (2.101) с заменой $J_{2,b}(\mathbf{k},\varepsilon^{-1}s)$ на $J_{2,a}(\mathbf{k},\varepsilon^{-1}s)$. Причина в том, что оператор $J_{2,a}(\mathbf{k},\varepsilon^{-1}s)\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)^{1/4}(I-\widehat{P})$ не допускает нужной оценки. По той же причине в условиях теоремы 2.4.10 (см. ниже) нет аналога оценки (2.109) для $J_{2,a}(\mathbf{k},\varepsilon^{-1}s)$.* б) *Аналогов предложений 2.4.2, 2.4.5 и 2.4.12 (см. ниже) для оператора $J_{2,a}(\mathbf{k},\varepsilon^{-1}s)$ также нет, поскольку не удаётся нужным образом оценить оператор $J_{2,a}(\mathbf{k},\varepsilon^{-1}s)(I-\widehat{P})$.*

2.4.3 Случай, когда $\widehat{N}_{0,\mathfrak{Q}}(\theta) = 0$

Теперь мы отказываемся от условия 2.4.3, но взамен предположим, что $\widehat{N}_{0,\mathfrak{Q}}(\theta) = 0$ при всех θ. Нам хотелось бы применить теорему 1.2.14. Однако, возникает осложнение, связанное с тем, что в некоторых точках θ может меняться кратность спектра ростка $S(\theta)$. При приближении к таким точкам расстояние между какой-то парой различных собственных значений ростка стремится к нулю и мы не можем выбрать величины c°_{jl}, t^{00}_{jl} не зависящими от θ. Поэтому мы вынуждены накладывать дополнительное условие. Заботиться надо только о тех собственных значениях, для которых соответствующее слагаемое в представлении (2.76) отлично от нуля. Используем исходную нумерацию собственных значений $\gamma^{\mathfrak{a}}_1(\theta),\dots,\gamma^{\mathfrak{a}}_n(\theta)$ ростка $S(\theta)$, условившись нумеровать их в порядке неубывания:

$$\gamma^{\mathfrak{a}}_1(\theta) \leqslant \gamma^{\mathfrak{a}}_2(\theta) \leqslant \ldots \leqslant \gamma^{\mathfrak{a}}_n(\theta). \tag{2.107}$$

Как уже отмечалось, числа (2.107) одновременно являются собственными значениями обобщённой спектральной задачи (2.73). При каждом θ через $\mathcal{P}^{(k)}(\theta)$ обозначим “косой” (ортогональный с весом $\overline{\mathfrak{Q}}$) проектор пространства $L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)$ на собственное подпространство задачи (2.73), отвечающее собственному значению $\gamma^{\mathfrak{a}}_k(\theta)$. Ясно, что при каждом θ оператор $\mathcal{P}^{(k)}(\theta)$ совпадает с одним из проекторов $\mathcal{P}_j(\theta)$, введённых в п. 2.3.5 (но номер j может зависеть от θ и меняется в точках перемены кратности спектра ростка).

Условие 2.4.7. а) $\widehat{N}_{0,\mathfrak{Q}}(\theta) = 0$ *при всех* $\theta \in \mathbb{S}^{d-1}$. б) *Для каждой пары индексов* $(k,r), 1 \leqslant k,r \leqslant n, k \neq r$, *такой что* $\gamma_k^{\mathfrak{a}}(\theta_0) = \gamma_r^{\mathfrak{a}}(\theta_0)$ *при некотором* $\theta_0 \in \mathbb{S}^{d-1}$, *выполнено* $(\mathcal{P}^{(k)}(\theta))^* \widehat{N}_{\mathfrak{Q}}(\theta) \mathcal{P}^{(r)}(\theta) = 0$ *при всех* $\theta \in \mathbb{S}^{d-1}$.

Условие б) можно переформулировать: мы требуем, чтобы для ненулевых (тождественно) “блоков” $(\mathcal{P}^{(k)}(\theta))^* \widehat{N}_{\mathfrak{Q}}(\theta) \mathcal{P}^{(r)}(\theta)$ оператора $\widehat{N}_{\mathfrak{Q}}(\theta)$ ветви собственных значений $\gamma_k^{\mathfrak{a}}(\theta)$ и $\gamma_r^{\mathfrak{a}}(\theta)$ не пересекались. Разумеется, выполнение условия 2.4.7 гарантируется следующим более сильным условием.

Условие 2.4.8. а) $\widehat{N}_{0,\mathfrak{Q}}(\theta) = 0$ *при всех* $\theta \in \mathbb{S}^{d-1}$. б) *Предположим, что количество* p *различных собственных значений обобщённой спектральной задачи* (2.73) *не зависит от* $\theta \in \mathbb{S}^{d-1}$.

Замечание 2.4.9. *Предположение пункта* б) *условия* 2.4.8 *заведомо выполнено, если спектр задачи* (2.73) *простой при всех* $\theta \in \mathbb{S}^{d-1}$.

Итак, предполагаем выполненным условие 2.4.7. Нас интересуют только пары индексов из множества

$$\mathcal{K} := \{(k,r) \colon 1 \leqslant k,r \leqslant n,\ k \neq r,\ (\mathcal{P}^{(k)}(\theta))^* \widehat{N}_{\mathfrak{Q}}(\theta) \mathcal{P}^{(r)}(\theta) \not\equiv 0\}.$$

Введём обозначение

$$c^{\circ}_{kr}(\theta) := \min\{c_*, n^{-1}|\gamma_k^{\mathfrak{a}}(\theta) - \gamma_r^{\mathfrak{a}}(\theta)|\}, \quad (k,r) \in \mathcal{K}.$$

Поскольку оператор $S(\theta)$ непрерывно зависит от θ, то $\gamma_j^{\mathfrak{a}}(\theta)$ — непрерывные функции на сфере $\mathbb{S}^{d-1}$. В силу условия 2.4.7(б) при $(k,r) \in \mathcal{K}$ и всех $\theta \in \mathbb{S}^{d-1}$ выполнено $|\gamma_k^{\mathfrak{a}}(\theta) - \gamma_r^{\mathfrak{a}}(\theta)| > 0$, а тогда $c^{\circ}_{kr} := \min_{\theta \in \mathbb{S}^{d-1}} c^{\circ}_{kr}(\theta) > 0$, $(k,r) \in \mathcal{K}$. Положим

$$c^{\circ} := \min_{(k,r) \in \mathcal{K}} c^{\circ}_{kr}. \tag{2.108}$$

Ясно, что число (2.108) — это реализация величины (1.105), выбранная не зависящей от θ. Число t^{00}, подчинённое (1.106), при условии 2.4.7 также можно выбрать не зависящим от $\theta \in \mathbb{S}^{d-1}$. С учётом (2.48) и (2.50) положим

$$t^{00} = (8\beta_2)^{-1} r_0 \alpha_1^{-3/2} \alpha_0^{1/2} \|g\|_{L_\infty}^{-3/2} \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{-1/2} \|f\|_{L_\infty}^{-3} \|f^{-1}\|_{L_\infty}^{-1} c^{\circ}.$$

(Условие $t^{00} \leqslant t_0$ выполнено, поскольку $c^\circ \leqslant \|S(\boldsymbol{\theta})\| \leqslant \alpha_1 \|g\|_{L_\infty} \|f\|^2_{L_\infty}$.)

По аналогии с доказательством теоремы 2.4.4 из теоремы 1.5.9 выводится следующий результат.

Теорема 2.4.10. *Пусть выполнено условие* 2.4.7 (*или более сильное условие* 2.4.8). *Тогда при* $s \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ *и* $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ *справедливы оценки*

$$\|J_1(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}s)\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{3/4}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \mathcal{C}_9(1+|s|)^{1/2}\varepsilon,$$

$$\|J_{2,b}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}s)\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{1/4}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \mathcal{C}_{10}(1+|s|)^{1/2}, \tag{2.109}$$

$$\|J_3(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}s)\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \mathcal{C}_{11}(1+|s|)^{1/2}\varepsilon, \tag{2.110}$$

Постоянные $\mathcal{C}_9$, $\mathcal{C}_{10}$ *и* $\mathcal{C}_{11}$ *зависят от параметров* (2.89), *а также от* n *и* c°.

Замечание 2.4.11. *Оценки* (2.102) *и* (2.110) *усиливают результаты теорем* 11.2 *и* 11.6 *из* [57] *в отношении зависимости оценок от* s.

Следующее утверждение проверяется по аналогии с доказательством предложения 2.4.5.

Предложение 2.4.12. *В условиях теоремы* 2.4.10 *при* $s \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ *и* $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$

$$\|J_{2,b}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}s)\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \mathcal{C}'_{10}(1+\varepsilon^{-1/3}|s|^{1/3}). \tag{2.111}$$

Постоянная $\mathcal{C}'_{10}$ *зависит от параметров* (2.89), *а также от* n *и* c°.

2.5 Подтверждение точности результатов п. 2.4

2.5.1 Точность результатов для операторов $\cos(\varepsilon^{-1}s\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2})$, $\mathcal{A}(\mathbf{k})^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}s\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2})$, $e^{-i\varepsilon^{-2}s\mathcal{A}(\mathbf{k})}$ относительно сглаживающего множителя

В утверждениях настоящего пункта мы накладываем одно из следующих двух условий.

Условие 2.5.1. *Пусть оператор* $\widehat{N}_{0,\mathfrak{Q}}(\boldsymbol{\theta})$ *определён в* (2.75). *Предположим, что* $\widehat{N}_{0,\mathfrak{Q}}(\boldsymbol{\theta}_0) \neq 0$ *в некоторой точке* $\boldsymbol{\theta}_0 \in \mathbb{S}^{d-1}$.

Условие 2.5.2. *Пусть операторы* $\widehat{N}_{0,\mathfrak{Q}}(\theta)$ *и* $\widehat{N}_Q^{(q)}(\theta)$ *определены в* (2.75) *и* (2.78) *соответственно. Предположим, что* $\widehat{N}_{0,\mathfrak{Q}}(\theta) = 0$ *при всех* $\theta \in \mathbb{S}^{d-1}$ *и для некоторых* $\theta_0 \in \mathbb{S}^{d-1}$ *и* $q \in \{1, \dots, p(\theta_0)\}$ *выполнено* $\widehat{N}_Q^{(q)}(\theta_0) \neq 0$.

Нам понадобится следующая лемма, которая является аналогом леммы 9.9 из [57].

Лемма 2.5.3. *Пусть число* $\delta_{\mathfrak{a}}$ *определено в* (2.48), *а* t^0 *определено в* (2.51). *Пусть* $F(\mathbf{k}) = F(t, \theta)$ — *спектральный проектор оператора* $\mathcal{A}(\mathbf{k})$ *для промежутка* $[0, \delta]$. *Тогда при* $|\mathbf{k}| \leqslant t^0$, $|\mathbf{k}_0| \leqslant t^0$ *справедливы оценки*

$$\|F(\mathbf{k}) - F(\mathbf{k}_0)\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant C'|\mathbf{k} - \mathbf{k}_0|, \tag{2.112}$$

$$\|\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2}F(\mathbf{k}) - \mathcal{A}(\mathbf{k}_0)^{1/2}F(\mathbf{k}_0)\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant C''|\mathbf{k} - \mathbf{k}_0|, \tag{2.113}$$

$$\|\cos(s\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2})F(\mathbf{k}) - \cos(s\mathcal{A}(\mathbf{k}_0)^{1/2})F(\mathbf{k}_0)\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant (2C' + C''|s|)|\mathbf{k} - \mathbf{k}_0|, \tag{2.114}$$

$$\begin{aligned}\|\mathcal{A}(\mathbf{k})^{-1/2}\sin(s\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2})F(\mathbf{k}) - \mathcal{A}(\mathbf{k}_0)^{-1/2}\sin(s\mathcal{A}(\mathbf{k}_0)^{1/2})F(\mathbf{k}_0)\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}& \\ \leqslant (2C'|s| + C''s^2/2)|\mathbf{k} - \mathbf{k}_0|.&\end{aligned} \tag{2.115}$$

Доказательство. Оценка (2.112) была доказана в [57, лемма 9.9].

Докажем (2.113). Предположим, что $\mathbf{k}, \mathbf{k}_0 \neq 0$. Используя представление вида (1.62) для $\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2}F(\mathbf{k})$, имеем

$$\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2}F(\mathbf{k}) - \mathcal{A}(\mathbf{k}_0)^{1/2}F(\mathbf{k}_0) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \zeta^{-1/2}\Upsilon(\zeta, \mathbf{k}, \mathbf{k}_0)\, d\zeta,$$

где $\Upsilon(\zeta, \mathbf{k}, \mathbf{k}_0) := (\mathcal{A}(\mathbf{k})F(\mathbf{k}) + \zeta I)^{-1}\mathcal{A}(\mathbf{k})F(\mathbf{k}) - (\mathcal{A}(\mathbf{k}_0)F(\mathbf{k}_0) + \zeta I)^{-1}\mathcal{A}(\mathbf{k}_0)F(\mathbf{k}_0)$. Далее,

$$\begin{aligned}&\Upsilon(\zeta, \mathbf{k}, \mathbf{k}_0) \\ &\quad= \zeta(\mathcal{A}(\mathbf{k})F(\mathbf{k}) + \zeta I)^{-1}\left(\mathcal{A}(\mathbf{k})F(\mathbf{k}) - \mathcal{A}(\mathbf{k}_0)F(\mathbf{k}_0)\right)\left(\mathcal{A}(\mathbf{k}_0)F(\mathbf{k}_0) + \zeta I\right)^{-1} \\ &\qquad= \Upsilon_1(\zeta, \mathbf{k}, \mathbf{k}_0) + \Upsilon_2(\zeta, \mathbf{k}, \mathbf{k}_0) + \Upsilon_3(\zeta, \mathbf{k}, \mathbf{k}_0),\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}&\Upsilon_1(\zeta, \mathbf{k}, \mathbf{k}_0) \\ &\quad= \zeta(\mathcal{A}(\mathbf{k}) + \zeta I)^{-1}\left(F(\mathbf{k})\mathcal{A}(\mathbf{k})F(\mathbf{k}_0) - F(\mathbf{k})\mathcal{A}(\mathbf{k}_0)F(\mathbf{k}_0)\right)(\mathcal{A}(\mathbf{k}_0) + \zeta I)^{-1}, \\ &\Upsilon_2(\zeta, \mathbf{k}, \mathbf{k}_0) = -(I - F(\mathbf{k}))\mathcal{A}(\mathbf{k}_0)F(\mathbf{k}_0)(\mathcal{A}(\mathbf{k}_0) + \zeta I)^{-1} \\ &\qquad= (F(\mathbf{k}) - F(\mathbf{k}_0))\mathcal{A}(\mathbf{k}_0)F(\mathbf{k}_0)(\mathcal{A}(\mathbf{k}_0) + \zeta I)^{-1},\end{aligned}$$

$$\Upsilon_3(\zeta,\mathbf{k},\mathbf{k}_0) = (\mathcal{A}(\mathbf{k})+\zeta I)^{-1}F(\mathbf{k})\mathcal{A}(\mathbf{k})(I - F(\mathbf{k}_0))$$
$$= (\mathcal{A}(\mathbf{k})+\zeta I)^{-1}F(\mathbf{k})\mathcal{A}(\mathbf{k})(F(\mathbf{k}) - F(\mathbf{k}_0)).$$

Поэтому $\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2}F(\mathbf{k}) - \mathcal{A}(\mathbf{k}_0)^{1/2}F(\mathbf{k}_0) = \Omega_1(\mathbf{k},\mathbf{k}_0) + \Omega_2(\mathbf{k},\mathbf{k}_0) + \Omega_3(\mathbf{k},\mathbf{k}_0)$, где

$$\Omega_j(\mathbf{k},\mathbf{k}_0) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \zeta^{-1/2}\Upsilon_j(\zeta,\mathbf{k},\mathbf{k}_0)\,d\zeta, \qquad j = 1,2,3.$$

Оценим $\Omega_1(\mathbf{k},\mathbf{k}_0)$. Для этого рассмотрим разность полуторалинейных форм операторов $\mathcal{A}(\mathbf{k})$ и $\mathcal{A}(\mathbf{k}_0)$ на элементах $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathfrak{d}$:

$$\mathfrak{a}(\mathbf{k})[\mathbf{u},\mathbf{v}] - \mathfrak{a}(\mathbf{k}_0)[\mathbf{u},\mathbf{v}]$$
$$= (gb(\mathbf{k}-\mathbf{k}_0)f\mathbf{u}, b(\mathbf{D}+\mathbf{k}_0)f\mathbf{v})_{L_2(\Omega)} + (gb(\mathbf{D}+\mathbf{k})f\mathbf{u}, b(\mathbf{k}-\mathbf{k}_0)f\mathbf{v})_{L_2(\Omega)}.$$

Применяя (2.7), легко получить оценку

$$|\mathfrak{a}(\mathbf{k})[\mathbf{u},\mathbf{v}] - \mathfrak{a}(\mathbf{k}_0)[\mathbf{u},\mathbf{v}]|$$
$$\leqslant \alpha_1^{1/2}\|g\|_{L_\infty}^{1/2}\|f\|_{L_\infty}|\mathbf{k}-\mathbf{k}_0|\left(\|\mathbf{u}\|_{L_2}\|\mathcal{A}(\mathbf{k}_0)^{1/2}\mathbf{v}\|_{L_2} + \|\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2}\mathbf{u}\|_{L_2}\|\mathbf{v}\|_{L_2}\right).$$

Подставляя сюда $\mathbf{u} = F(\mathbf{k})\boldsymbol{\varphi}$, $\mathbf{v} = F(\mathbf{k}_0)\boldsymbol{\psi}$, где $\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\psi}\in L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)$, и принимая во внимание оценку (которая следует из (1.29) и (2.50))

$$\|\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2}F(\mathbf{k})\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant (1+\beta_2)^{1/2}\alpha_1^{1/2}\|g\|_{L_\infty}^{1/2}\|f\|_{L_\infty}|\mathbf{k}|, \qquad |\mathbf{k}|\leqslant t^0, \tag{2.116}$$

имеем

$$\|F(\mathbf{k})\mathcal{A}(\mathbf{k})F(\mathbf{k}_0) - F(\mathbf{k})\mathcal{A}(\mathbf{k}_0)F(\mathbf{k}_0)\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}$$
$$\leqslant (1+\beta_2)^{1/2}\alpha_1\|g\|_{L_\infty}\|f\|_{L_\infty}^2(|\mathbf{k}|+|\mathbf{k}_0|)|\mathbf{k}-\mathbf{k}_0|$$

при $|\mathbf{k}|, |\mathbf{k}_0|\leqslant t^0$. Отсюда с учётом (2.30) получаем

$$\|\Omega_1(\mathbf{k},\mathbf{k}_0)\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant (1+\beta_2)^{1/2}\alpha_1\|g\|_{L_\infty}\|f\|_{L_\infty}^2 c_*^{-1/2}|\mathbf{k}-\mathbf{k}_0|,$$
$$0<|\mathbf{k}|, |\mathbf{k}_0|\leqslant t^0.$$

Теперь, используя (2.30), (2.112) и (2.116), оценим $\Omega_2(\mathbf{k},\mathbf{k}_0)$:

$$\|\Omega_2(\mathbf{k},\mathbf{k}_0)\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant C'(1+\beta_2)\alpha_1\|g\|_{L_\infty}\|f\|_{L_\infty}^2 c_*^{-1/2}t^0|\mathbf{k}-\mathbf{k}_0|,$$
$$0<|\mathbf{k}|, |\mathbf{k}_0|\leqslant t^0.$$

Член $\Omega_3(\mathbf{k},\mathbf{k}_0)$ допускает такую же оценку. Таким образом, оценка (2.113) доказана в предположении $\mathbf{k},\mathbf{k}_0 \neq 0$. Если же, например, $\mathbf{k}_0 = 0$, то (2.113) непосредственно следует из (2.116) и равенства $\mathcal{A}(0)^{1/2}F(0) = 0$.

Перейдём к доказательству оценки (2.114). Имеем:

$$\begin{aligned} e^{is\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2}}F(\mathbf{k}) - e^{is\mathcal{A}(\mathbf{k}_0)^{1/2}}F(\mathbf{k}_0) = e^{is\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2}}F(\mathbf{k})(F(\mathbf{k}) - F(\mathbf{k}_0)) \\ + (F(\mathbf{k}) - F(\mathbf{k}_0))e^{is\mathcal{A}(\mathbf{k}_0)^{1/2}}F(\mathbf{k}_0) + \Xi(s,\mathbf{k},\mathbf{k}_0), \end{aligned} \tag{2.117}$$

где $\Xi(s,\mathbf{k},\mathbf{k}_0) = e^{is\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2}}F(\mathbf{k})F(\mathbf{k}_0) - F(\mathbf{k})e^{is\mathcal{A}(\mathbf{k}_0)^{1/2}}F(\mathbf{k}_0)$. Сумма первых двух слагаемых в (2.117) оценивается через $2C'|\mathbf{k}-\mathbf{k}_0|$ ввиду (2.112). Третье слагаемое запишем в виде

$$\begin{aligned} &\Xi(s,\mathbf{k},\mathbf{k}_0) = e^{is\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2}}\Sigma(s,\mathbf{k},\mathbf{k}_0), \\ &\Sigma(s,\mathbf{k},\mathbf{k}_0) = F(\mathbf{k})F(\mathbf{k}_0) - e^{-is\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2}}F(\mathbf{k})e^{is\mathcal{A}(\mathbf{k}_0)^{1/2}}F(\mathbf{k}_0). \end{aligned}$$

Имеем $\Sigma(0,\mathbf{k},\mathbf{k}_0) = 0$,

$$\frac{d\Sigma(s,\mathbf{k},\mathbf{k}_0)}{ds} = iF(\mathbf{k})e^{-is\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2}}(\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2}F(\mathbf{k}) - \mathcal{A}(\mathbf{k}_0)^{1/2}F(\mathbf{k}_0))e^{is\mathcal{A}(\mathbf{k}_0)^{1/2}}F(\mathbf{k}_0).$$

Отсюда интегрированием по промежутку $[0,s]$ с учётом оценки (2.113) получаем

$$\|\Xi(s,\mathbf{k},\mathbf{k}_0)\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} = \|\Sigma(s,\mathbf{k},\mathbf{k}_0)\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant C''|s||\mathbf{k}-\mathbf{k}_0|.$$

Из сказанного выше вытекает (2.114).

Оценка (2.115) следует из (2.114) интегрированием по промежутку $[0,s]$. $\square$

Применение теоремы 1.6.1 подтверждает точность теоремы 2.4.1.

Теорема 2.5.4. *Пусть выполнено условие* 2.5.1.

а) *Пусть* $0 \neq s \in \mathbb{R}$ *и* $0 \leqslant q_1 < 2$. *Тогда не существует такой постоянной* $\mathcal{C}(s) > 0$, *чтобы при почти всех* $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ *и достаточно малом* $\varepsilon > 0$ *выполнялось*

$$\left\| J_1(\mathbf{k},\varepsilon^{-1}s)\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)^{s/2} \right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \mathcal{C}(s)\varepsilon. \tag{2.118}$$

б) *Пусть* $0 \neq s \in \mathbb{R}$ *и* $0 \leqslant q_2 < 1$. *Тогда не существует такой постоянной* $\mathcal{C}(s) > 0$, *чтобы при почти всех* $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ *и достаточно малом* $\varepsilon > 0$ *выполнялось*

$$\left\| J_{2,a}(\mathbf{k},\varepsilon^{-1}s)\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)^{q_2/2} \right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \mathcal{C}(s). \tag{2.119}$$

в) *Пусть* $0 \neq s \in \mathbb{R}$ *и* $0 \leqslant q_2 < 1$. *Тогда не существует такой постоянной* $\mathcal{C}(s) > 0$, *чтобы при почти всех* $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ *и достаточно малом* $\varepsilon > 0$ *выполнялось*

$$\bigl\| J_{2,b}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}s)\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{q_2/2}\bigr\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \mathcal{C}(s). \tag{2.120}$$

г) *Пусть* $0 \neq s \in \mathbb{R}$ *и* $0 \leqslant q_3 < 3$. *Тогда не существует такой постоянной* $\mathcal{C}(s) > 0$, *чтобы при почти всех* $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ *и достаточно малом* $\varepsilon > 0$ *выполнялось*

$$\bigl\| J_3(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}s)\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{q_3/2}\bigr\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \mathcal{C}(s)\varepsilon. \tag{2.121}$$

Доказательство. Проверим утверждение а). (В доказательстве индекс операторной нормы в $L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)$ опускаем.) Рассуждая от противного, получаем, что для некоторых $s \neq 0$ и $1 \leqslant q_1 < 2$ выполнена оценка

$$\bigl\| J_1(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}s)\widehat{P}\bigr\| \varepsilon^{q_1}(|\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2)^{-q_1/2} \leqslant \mathcal{C}(s)\varepsilon \tag{2.122}$$

при почти всех $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ и достаточно малом ε.

Пусть $|\mathbf{k}| \leqslant t^0$. Используя тождество $f^{-1}\widehat{P} = Pf^*\overline{Q}$ (см. (1.252)) и неравенство

$$\|F(\mathbf{k}) - P\| \leqslant C_1|\mathbf{k}|, \qquad |\mathbf{k}| \leqslant t^0, \tag{2.123}$$

из (2.122) выводим оценку (с некоторой постоянной $\widetilde{\mathcal{C}}(s) > 0$)

$$\begin{aligned} &\|f \cos(\varepsilon^{-1}s\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2})F(\mathbf{k})f^*\overline{Q} - f_0 \cos(\varepsilon^{-1}s\mathcal{A}^0(\mathbf{k})^{1/2})f_0^{-1}\widehat{P}\| \\ &\qquad\qquad \times \varepsilon^{q_1}(|\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2)^{-q_1/2} \leqslant \widetilde{\mathcal{C}}(s)\varepsilon \end{aligned} \tag{2.124}$$

при почти всех $\mathbf{k}$ в шаре $|\mathbf{k}| \leqslant t^0$ и достаточно малом ε. Из леммы 2.5.3 следует, что оператор под знаком нормы в (2.124) непрерывен по $\mathbf{k}$ в шаре $|\mathbf{k}| \leqslant t^0$. Следовательно, оценка (2.124) справедлива при всех значениях $\mathbf{k}$ из этого шара. В частности, она выполнена в точке $\mathbf{k} = t\boldsymbol{\theta}_0$, если $t \leqslant t^0$. Применяя снова неравенство (2.123) и тождество $Pf^*\overline{Q} = f^{-1}\widehat{P}$, получаем оценку

$$\begin{aligned} &\|\bigl(f \cos(\varepsilon^{-1}s\mathcal{A}(t\boldsymbol{\theta}_0)^{1/2})f^{-1} - f_0 \cos(\varepsilon^{-1}s\mathcal{A}^0(t\boldsymbol{\theta}_0)^{1/2})f_0^{-1}\bigr)\widehat{P}\| \\ &\qquad\qquad \times \varepsilon^{q_1}(|\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2)^{-q_1/2} \leqslant \widehat{\mathcal{C}}(s)\varepsilon \end{aligned}$$

с некоторой постоянной $\widehat{\mathcal{C}}(s) > 0$ при $t \leqslant t^0$ и достаточно малом ε. Это противоречит утверждению а) теоремы 1.6.1.

Теперь проверим утверждение б). Рассуждая от противного, получаем, что для некоторых $s \neq 0$ и $0 \leqslant q_2 < 1$ выполнена оценка

$$\big\| J_{2,a}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}s)\widehat{P}\big\| \varepsilon^{q_2}(|\mathbf{k}|^2+\varepsilon^2)^{-q_2/2} \leqslant \mathcal{C}(s) \tag{2.125}$$

при почти всех $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ и достаточно малом ε. Очевидно,

$$\big\| f\mathcal{A}(\mathbf{k})^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}s\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2})F(\mathbf{k})^{\perp}f^{-1}\big\| \leqslant \|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty}\delta_{\mathfrak{a}}^{-1/2}. \tag{2.126}$$

Отсюда и из (2.125) следует, что для некоторой константы $\widetilde{\mathcal{C}}(s) > 0$ выполнено

$$\begin{aligned}\big\|\big(f\mathcal{A}(\mathbf{k})^{-1/2}&\sin(\varepsilon^{-1}s\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2})F(\mathbf{k})f^{-1}\\ &- f_0\mathcal{A}^0(\mathbf{k})^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}s\mathcal{A}^0(\mathbf{k})^{1/2})f_0^{-1}\big)\widehat{P}\big\|\varepsilon^{q_2}(|\mathbf{k}|^2+\varepsilon^2)^{-q_2/2} \leqslant \widetilde{\mathcal{C}}(s)\end{aligned} \tag{2.127}$$

при почти всех $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ и достаточно малом ε.

Пусть $|\mathbf{k}| \leqslant t^0$. Из леммы 2.5.3 следует, что оператор под знаком нормы в (2.127) непрерывен по $\mathbf{k}$ в шаре $|\mathbf{k}| \leqslant t^0$. Следовательно, оценка (2.127) справедлива при всех значениях $\mathbf{k}$ из этого шара, в частности, в точке $\mathbf{k} = t\boldsymbol{\theta}_0$, если $t \leqslant t^0$. Применяя снова неравенство (2.126), получаем оценку

$$\begin{aligned}\|\big(f\mathcal{A}(t\boldsymbol{\theta}_0)^{-1/2}&\sin(\varepsilon^{-1}s\mathcal{A}(t\boldsymbol{\theta}_0)^{1/2})f^{-1}\\ &- f_0\mathcal{A}^0(t\boldsymbol{\theta}_0)^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}s\mathcal{A}^0(t\boldsymbol{\theta}_0)^{1/2})f_0^{-1}\big)\widehat{P}\|\varepsilon^{q_2}(|\mathbf{k}|^2+\varepsilon^2)^{-q_2/2} \leqslant \widehat{\mathcal{C}}(s)\end{aligned}$$

с некоторой постоянной $\widehat{\mathcal{C}}(s) > 0$ при $t \leqslant t^0$ и достаточно малом ε. Эта оценка в абстрактных терминах соответствует неравенству (1.308). Поскольку по условию $\widehat{N}_{0,\mathfrak{Q}}(\boldsymbol{\theta}_0) \neq 0$, условие теоремы 1.6.1 выполнено. Утверждение б) этой теоремы приводит нас к противоречию.

Перейдём к доказательству утверждения в). Рассуждая от противного, получаем, что для некоторых $s \neq 0$ и $0 \leqslant q_2 < 1$ выполнена оценка

$$\big\| J_{2,b}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}s)\widehat{P}\big\| \varepsilon^{q_2}(|\mathbf{k}|^2+\varepsilon^2)^{-q_2/2} \leqslant \mathcal{C}(s) \tag{2.128}$$

при почти всех $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ и достаточно малом ε. Очевидно,

$$\big\| f\mathcal{A}(\mathbf{k})^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}s\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2})F(\mathbf{k})^{\perp}f^{*}\big\| \leqslant \|f\|^2_{L_\infty}\delta_{\mathfrak{a}}^{-1/2}. \tag{2.129}$$

Отсюда и из (2.128) следует, что для некоторой константы $\widetilde{\mathcal{C}}(s) > 0$ выполнено

$$\begin{aligned}\big\|\big(f\mathcal{A}(\mathbf{k})^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}s\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2})F(\mathbf{k})f^{*} - f_0\mathcal{A}^0(\mathbf{k})^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}s\mathcal{A}^0(\mathbf{k})^{1/2})f_0\big)\widehat{P}\big\|&\\ \times \varepsilon^{q_2}(|\mathbf{k}|^2+\varepsilon^2)^{-q_2/2} \leqslant \widetilde{\mathcal{C}}(s)&\end{aligned} \tag{2.130}$$

при почти всех $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ и достаточно малом ε. Из леммы 2.5.3 следует, что оператор под знаком нормы в (2.130) непрерывен по $\mathbf{k}$ в шаре $|\mathbf{k}| \leqslant t^0$. Следовательно, оценка (2.130) справедлива при всех значениях $\mathbf{k}$ из этого шара. В частности, она выполнена в точке $\mathbf{k} = t\boldsymbol{\theta}_0$, если $t \leqslant t^0$. Применяя снова неравенство (2.129), получаем оценку

$$\|\big(f\mathcal{A}(t\boldsymbol{\theta}_0)^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}s\mathcal{A}(t\boldsymbol{\theta}_0)^{1/2})f^* - f_0\mathcal{A}^0(t\boldsymbol{\theta}_0)^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}s\mathcal{A}^0(t\boldsymbol{\theta}_0)^{1/2})f_0\big)\widehat{P}\| \\ \times \varepsilon^{q_2}(|\mathbf{k}|^2+\varepsilon^2)^{-q_2/2} \leqslant \widehat{\mathcal{C}}(s)$$

с некоторой постоянной $\widehat{\mathcal{C}}(s) > 0$ при $t \leqslant t^0$ и достаточно малом ε. Это противоречит утверждению в) теоремы 1.6.1.

Утверждение г) было доказано в [57, теорема 11.7]. $\square$

Аналогичным образом, опираясь на теорему 1.6.3, мы подтверждаем точность теорем 2.4.4, 2.4.10.

Теорема 2.5.5. *Пусть выполнено условие 2.5.2.*

а) *Пусть $0 \neq s \in \mathbb{R}$ и $0 \leqslant q_1 < 3/2$. Тогда не существует такой постоянной $\mathcal{C}(s) > 0$, чтобы оценка (2.118) выполнялась при почти всех $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$.*

б) *Пусть $0 \neq s \in \mathbb{R}$ и $0 \leqslant q_2 < 1/2$. Тогда не существует такой постоянной $\mathcal{C}(s) > 0$, чтобы оценка (2.120) выполнялась при почти всех $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$.*

в) *Пусть $0 \neq s \in \mathbb{R}$ и $0 \leqslant q_3 < 2$. Тогда не существует такой постоянной $\mathcal{C}(s) > 0$, чтобы оценка (2.121) выполнялась при почти всех $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$.*

2.5.2 Точность результатов для операторов $\cos(\varepsilon^{-1}s\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2})$, $\mathcal{A}(\mathbf{k})^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}s\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2})$, $e^{-i\varepsilon^{-2}s\mathcal{A}(\mathbf{k})}$ относительно времени

В этом пункте мы подтверждаем точность результатов п. 2.4 относительно зависимости от s. Следующее утверждение демонстрирует точность теоремы 2.4.1. Оно легко выводится из теоремы 1.6.4 с помощью тех же соображений, что были использованы при доказательстве теоремы 2.5.4.

Теорема 2.5.6. *Пусть выполнено условие* 2.5.1.

а) *Пусть* $q_1 \geqslant 2$. *Тогда не существует положительной функции* $\mathcal{C}(s)$ *такой, что* $\lim_{s\to\infty} \mathcal{C}(s)/|s| = 0$ *и выполнена оценка* (2.118) *при всех* $s \in \mathbb{R}$, *почти всех* $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ *и достаточно малом* $\varepsilon > 0$.

б) *Пусть* $q_2 \geqslant 1$. *Тогда не существует положительной функции* $\mathcal{C}(s)$ *такой, что* $\lim_{s\to\infty} \mathcal{C}(s)/|s| = 0$ *и выполнена оценка* (2.119) *при всех* $s \in \mathbb{R}$, *почти всех* $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ *и достаточно малом* $\varepsilon > 0$.

в) *Пусть* $q_2 \geqslant 1$. *Тогда не существует положительной функции* $\mathcal{C}(s)$ *такой, что* $\lim_{s\to\infty} \mathcal{C}(s)/|s| = 0$ *и выполнена оценка* (2.120) *при всех* $s \in \mathbb{R}$, *почти всех* $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ *и достаточно малом* $\varepsilon > 0$.

г) *Пусть* $q_3 \geqslant 3$. *Тогда не существует положительной функции* $\mathcal{C}(s)$ *такой, что* $\lim_{s\to\infty} \mathcal{C}(s)/|s| = 0$ *и выполнена оценка* (2.121) *при всех* $s \in \mathbb{R}$, *почти всех* $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ *и достаточно малом* $\varepsilon > 0$.

Аналогичным образом из теоремы 1.6.5 выводится следующее утверждение, подтверждающее точность теорем 2.4.4 и 2.4.10.

Теорема 2.5.7. *Пусть выполнено условие* 2.5.2.

а) *Пусть* $q_1 \geqslant 3/2$. *Тогда не существует положительной функции* $\mathcal{C}(s)$ *такой, что* $\lim_{s\to\infty} \mathcal{C}(s)/|s|^{1/2} = 0$ *и выполнена оценка* (2.118) *при всех* $s \in \mathbb{R}$, *почти всех* $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ *и достаточно малом* $\varepsilon > 0$.

б) *Пусть* $q_2 \geqslant 1/2$. *Тогда не существует положительной функции* $\mathcal{C}(s)$ *такой, что* $\lim_{s\to\infty} \mathcal{C}(s)/|s|^{1/2} = 0$ *и выполнена оценка* (2.120) *при всех* $s \in \mathbb{R}$, *почти всех* $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ *и достаточно малом* $\varepsilon > 0$.

в) *Пусть* $q_3 \geqslant 2$. *Тогда не существует положительной функции* $\mathcal{C}(s)$ *такой, что* $\lim_{s\to\infty} \mathcal{C}(s)/|s|^{1/2} = 0$ *и выполнена оценка* (2.121) *при всех* $s \in \mathbb{R}$, *почти всех* $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ *и достаточно малом* $\varepsilon > 0$.

2.5.3 Точность результата теоремы 2.4.1 для оператора $e^{-i\varepsilon^{-2}s\mathcal{B}(\mathbf{k},\varepsilon)}$ относительно сглаживающего множителя

Коэффициенты $\lambda_l^{(4)}(\boldsymbol{\theta})$ и элементы $\omega_l(\boldsymbol{\theta})$, где $l = 1, \dots, n$, являются собственными значениями и собственными элементами оператора $S(\boldsymbol{\theta})$. Однако, удобнее перейти к обобщённой спектральной задаче для $\widehat{S}(\boldsymbol{\theta})$. Согласно (1.311) числа $\lambda_l^{(4)}(\theta)$ и элементы $\zeta_l(\theta) = f\omega_l(\theta)$, где $l = 1,\dots,n$, являются собственными значениями и собственными элементами обобщённой спектральной задачи:

$$b(\theta)^* g^0 b(\theta)\zeta_l(\theta) = \lambda_l^{(4)}(\theta)\overline{\mathfrak{Q}}\zeta_l(\theta), \quad l = 1,\dots,n. \tag{2.131}$$

При этом векторы $\zeta_l(\theta)$, где $l = 1,\dots,n$, образуют базис в $\widehat{\mathfrak{N}}$, ортонормированный с весом: $(\overline{\mathfrak{Q}}\zeta_l(\theta),\zeta_j(\theta)) = \delta_{jl}$, где $j,l = 1,\dots,n$.

Перейдём к обозначениям, принятым в замечании 1.4.1, следя за кратностями собственных значений спектрального ростка $S(\theta)$. В силу сказанного в п. 1.6.3 эти же значения являются собственными числами обобщённой задачи (2.131). Вообще говоря, количество $p(\theta)$ различных собственных значений $\lambda_1^{\circ,(4)}(\theta),\dots,\lambda_{p(\theta)}^{\circ,(4)}(\theta)$ оператора $S(\theta)$ и их кратности $k_1(\theta),\dots,k_{p(\theta)}(\theta)$ зависят от параметра $\theta \in \mathbb{S}^{d-1}$. При каждом фиксированном θ через $\mathfrak{N}_q(\theta)$ обозначим собственное подпространство оператора $S(\theta)$, отвечающее собственному значению $\lambda_q^{\circ,(4)}(\theta)$. Тогда $f\mathfrak{N}_q(\theta) = \widehat{\mathfrak{N}}_{q,\mathfrak{Q}}$ — собственное подпространство задачи (2.131), отвечающее тому же значению $\lambda_q^{\circ,(4)}(\theta)$.

Далее, коэффициенты $\lambda_l^{(5)}(\theta)$ и элементы $\omega_l(\theta)$, $l = i(q,\theta),\dots,i(q,\theta)+k_q(\theta)-1$, где $i(q,\theta) = k_1(\theta)+\ldots+k_{q-1}(\theta)+1$, являются собственными числами и собственными элементами оператора $\mathscr{Y}^{(q)}(\theta)$ (см. (1.208) при $c = 1$). Согласно (1.312) числа $\lambda_l^{(5)}(\theta)$ и элементы $\zeta_l(\theta)$, $l = i(q,\theta),\dots,i(q,\theta)+k_q(\theta)-1$, являются собственными значениями и собственными элементами следующей обобщённой спектральной задачи:

$$\begin{aligned} &\widehat{P}_{q,\mathfrak{Q}}(\theta)\Big(-b(\theta)^*V - V^*b(\theta) + \sum_{j=1}^{d}(\overline{a_j + a_j^*})\theta_j\Big)\zeta_l(\theta) \\ &\qquad = \lambda_l^{(5)}(\theta)\widehat{P}_{q,\mathfrak{Q}}(\theta)\overline{\mathfrak{Q}}\zeta_l(\theta), \quad l = i(q,\theta),\dots,i(q,\theta)+k_q(\theta)-1, \end{aligned} \tag{2.132}$$

где $\widehat{P}_{q,\mathfrak{Q}}(\theta)$ — ортопроектор на $\widehat{\mathfrak{N}}_{q,\mathfrak{Q}}$.

Количество $p'(q,\theta)$ различных собственных чисел $\lambda_{1,q}^{\circ,(5)}(\theta),\dots,\lambda_{p'(q,\theta),q}^{\circ,(5)}(\theta)$ задачи (2.132) и их кратности $k_{1,q}(\theta),\dots,k_{p'(\theta),q}(\theta)$ также зависят от параметра $\theta \in \mathbb{S}^{d-1}$. При каждом фиксированном θ через $\mathfrak{N}_{q',q}^{\mathfrak{b}}(\theta)$ обозначим собственное подпространство оператора $\mathscr{Y}^{(q)}(\theta)$, отвечающее собственному значению $\lambda_{q',q}^{\circ,(5)}(\theta)$. Тогда $f\mathfrak{N}_{q',q}^{\mathfrak{b}}(\theta) = \widehat{\mathfrak{N}}_{q',q,\mathfrak{Q}}^{\mathfrak{b}}$ — собственное подпространство задачи (2.132), отвечающее тому же значению $\lambda_{q',q}^{\circ,(5)}(\theta)$. Введём обозначение $\mathcal{P}_{q',q}^{\mathfrak{b}}(\theta)$ для “косого” проектора пространства $L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)$ на подпространство $\widehat{\mathfrak{N}}_{q',q,\mathfrak{Q}}^{\mathfrak{b}}$; $\mathcal{P}_{q',q}^{\mathfrak{b}}(\theta)$ ортогонален относительно скалярного произведения с весом $\overline{\mathfrak{Q}}$.

Условие 2.5.8. *Пусть оператор* $\widehat{N}_{\mathfrak{Q}}(\boldsymbol{\theta})$ *определён в* (2.74)*. Предположим, что хотя бы в одной точке* $\boldsymbol{\theta}_0 \in \mathbb{S}^{d-1}$ *имеет место* $(\mathcal{P}^{\mathfrak{b}}_{q',q})^*(\boldsymbol{\theta}_0)\widehat{N}_{\mathfrak{Q}}(\boldsymbol{\theta}_0)\mathcal{P}^{\mathfrak{b}}_{q',q}(\boldsymbol{\theta}_0) \neq 0$ *для некоторых* $q \in \{1, \dots, p(\boldsymbol{\theta}_0)\}$, $q' \in \{1, \dots, p'(q, \boldsymbol{\theta}_0)\}$.

Применяя теорему 1.6.7, подтвердим точность оценки (2.94) относительно сглаживающего множителя.

Теорема 2.5.9. *Пусть выполнено условие* 2.5.8*. Пусть* $s \neq 0$ *и* $0 \leqslant q_3 < 3$*. Тогда не существует такой константы* $\mathcal{C}(s) > 0$*, чтобы оценка*

$$\left\| \left(f e^{-is\varepsilon^{-2}\mathcal{B}(\mathbf{k},\varepsilon)} f^{-1} - f_0 e^{-is\varepsilon^{-2}\mathcal{B}^0(\mathbf{k},\varepsilon)} f_0^{-1} \right) \mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)^{q_3/2} \right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \mathcal{C}(s)\varepsilon$$

выполнялась при почти всех $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ *и достаточно малом* $\varepsilon > 0$.

Глава 3. Задачи усреднения для гиперболических уравнений

3.1 Аппроксимация операторов $\cos(s\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})$, $\mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2}\sin(s\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})$, $e^{-is\mathcal{A}_\varepsilon}$ и $e^{-is\mathcal{B}_\varepsilon}$

3.1.1 Операторы $\mathcal{A}_\varepsilon$ и $\mathcal{B}_\varepsilon$. Постановка задачи

Если $\psi(\mathbf{x})$ — измеримая Γ-периодическая функция в $\mathbb{R}^d$, условимся использовать обозначение $\psi^\varepsilon(\mathbf{x}) := \psi(\varepsilon^{-1}\mathbf{x})$, $\varepsilon > 0$. *Наши основные объекты* — операторы $\mathcal{A}_\varepsilon$ и $\mathcal{B}_\varepsilon$, действующие в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, формально заданные выражениями

$$\mathcal{A}_\varepsilon := f^\varepsilon(\mathbf{x})^* b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) f^\varepsilon(\mathbf{x}), \tag{3.1}$$

$$\begin{split}\mathcal{B}_\varepsilon := \mathcal{A}_\varepsilon + \sum_{j=1}^d f^\varepsilon(\mathbf{x})^* (a_j^\varepsilon(\mathbf{x}) D_j + D_j a_j^\varepsilon(\mathbf{x})^*) f^\varepsilon(\mathbf{x}) \\ + f^\varepsilon(\mathbf{x})^* \mathcal{Q}^\varepsilon(\mathbf{x}) f^\varepsilon(\mathbf{x}) + \lambda f^\varepsilon(\mathbf{x})^* \mathcal{Q}_0^\varepsilon(\mathbf{x}) f^\varepsilon(\mathbf{x}).\end{split} \tag{3.2}$$

Строгие определения даются через квадратичную форму (ср. пп. 2.1.2, 2.1.5). Коэффициенты операторов быстро осциллируют при $\varepsilon \to 0$.

Наша цель — получить аппроксимации операторов $\cos(s\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})$, $\mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2}\sin(s\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})$, $e^{-is\mathcal{A}_\varepsilon}$ и $e^{-is\mathcal{B}_\varepsilon}$ при малом ε и применить полученные результаты к усреднению решений задачи Коши для гиперболических уравнений и нестационарных уравнений типа Шрёдингера.

3.1.2 Масштабное преобразование

Пусть T_ε — *унитарный в* $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ *оператор масштабного преобразования*: $(T_\varepsilon \mathbf{u})(\mathbf{x}) = \varepsilon^{d/2}\mathbf{u}(\varepsilon\mathbf{x})$, $\varepsilon > 0$. Тогда справедливы тождества $\mathcal{A}_\varepsilon = \varepsilon^{-2} T_\varepsilon^* \mathcal{A} T_\varepsilon$, $\mathcal{B}_\varepsilon = \varepsilon^{-2} T_\varepsilon^* \mathcal{B}(\varepsilon) T_\varepsilon$, где $\mathcal{A}$ — оператор (2.9), а $\mathcal{B}(\varepsilon)$ — оператор (2.27). Следовательно,

$$\begin{aligned} \cos(s\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2}) &= T_\varepsilon^* \cos(\varepsilon^{-1} s\mathcal{A}^{1/2}) T_\varepsilon, & e^{-is\mathcal{A}_\varepsilon} &= T_\varepsilon^* e^{-i\varepsilon^{-2}s\mathcal{A}} T_\varepsilon, \\ \mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2}\sin(s\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2}) &= \varepsilon T_\varepsilon^* \mathcal{A}^{-1/2} \sin(\varepsilon^{-1} s\mathcal{A}^{1/2}) T_\varepsilon, & e^{-is\mathcal{B}_\varepsilon} &= T_\varepsilon^* e^{-i\varepsilon^{-2}s\mathcal{B}(\varepsilon)} T_\varepsilon. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Применяя масштабное преобразование к резольвенте оператора $\mathcal{H}_0 = -\Delta$, получаем

$$\mathcal{R}(\varepsilon) \coloneqq \varepsilon^2(\mathcal{H}_0 + \varepsilon^2 I)^{-1} = T_\varepsilon(\mathcal{H}_0 + I)^{-1}T_\varepsilon^*. \tag{3.4}$$

Наконец, если $\psi(\mathbf{x})$ — Γ-периодическая функция, то $[\psi^\varepsilon] = T_\varepsilon^*[\psi]T_\varepsilon$.

3.1.3 Аппроксимация окаймлённых операторов $\cos(s\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})$, $\mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2}\sin(s\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})$, $e^{-is\mathcal{A}_\varepsilon}$ и $e^{-is\mathcal{B}_\varepsilon}$

Пусть

$$\mathcal{A}^0 = f_0 b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D}) f_0, \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{B}^0 = \mathcal{A}^0 - f_0(b(\mathbf{D})^*V + V^*b(\mathbf{D}))f_0 \\ + \sum_{j=1}^d f_0(\overline{a_j + a_j^*})D_j f_0 + f_0(\overline{\mathcal{Q}} + \lambda\overline{\mathcal{Q}_0} - W)f_0.\end{aligned} \tag{3.6}$$

Положим:

$$J_{1,\varepsilon}(s) \coloneqq f^\varepsilon \cos(s\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})(f^\varepsilon)^{-1} - f_0\cos(s(\mathcal{A}^0)^{1/2})f_0^{-1}, \tag{3.7}$$

$$J_{2,a,\varepsilon}(s) \coloneqq f^\varepsilon \mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2}\sin(s\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})(f^\varepsilon)^{-1} - f_0(\mathcal{A}^0)^{-1/2}\sin(s(\mathcal{A}^0)^{1/2})f_0^{-1}, \tag{3.8}$$

$$J_{2,b,\varepsilon}(s) \coloneqq f^\varepsilon \mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2}\sin(s\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})(f^\varepsilon)^{*} - f_0(\mathcal{A}^0)^{-1/2}\sin(s(\mathcal{A}^0)^{1/2})f_0, \tag{3.9}$$

$$J_{3,\varepsilon}(s) \coloneqq f^\varepsilon e^{-is\mathcal{A}_\varepsilon}(f^\varepsilon)^{-1} - f_0 e^{-is\mathcal{A}^0} f_0^{-1}, \tag{3.10}$$

$$J_{4,\varepsilon}(s) \coloneqq f^\varepsilon e^{-is\mathcal{B}_\varepsilon}(f^\varepsilon)^{-1} - f_0 e^{-is\mathcal{B}^0} f_0^{-1}. \tag{3.11}$$

Из соотношений (3.3), (3.4) вытекают тождества

$$\begin{aligned}&J_{1,\varepsilon}(s)(\mathcal{H}_0 + I)^{-q/2} \\ &\quad = T_\varepsilon^*\left(f\cos(\varepsilon^{-1}s\mathcal{A}^{1/2})f^{-1} - f_0\cos(\varepsilon^{-1}s(\mathcal{A}^0)^{1/2})f_0^{-1}\right)\mathcal{R}(\varepsilon)^{q/2}T_\varepsilon,\end{aligned} \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned}&J_{2,a,\varepsilon}(s)(\mathcal{H}_0 + I)^{-q/2} \\ &\quad = \varepsilon T_\varepsilon^*\left(f\mathcal{A}^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}s\mathcal{A}^{1/2})f^{-1} - f_0(\mathcal{A}^0)^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}s(\mathcal{A}^0)^{1/2})f_0^{-1}\right)\mathcal{R}(\varepsilon)^{q/2}T_\varepsilon,\end{aligned} \tag{3.13}$$

$$\begin{aligned}&J_{2,b,\varepsilon}(s)(\mathcal{H}_0 + I)^{-q/2} \\ &\quad = \varepsilon T_\varepsilon^*\left(f\mathcal{A}^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}s\mathcal{A}^{1/2})f^{*} - f_0(\mathcal{A}^0)^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}s(\mathcal{A}^0)^{1/2})f_0\right)\mathcal{R}(\varepsilon)^{q/2}T_\varepsilon,\end{aligned} \tag{3.14}$$

$$J_{3,\varepsilon}(s)(\mathcal{H}_0+I)^{-q/2} = T_\varepsilon^* \left(f e^{-i\varepsilon^{-2}s\mathcal{A}} f^{-1} - f_0 e^{-i\varepsilon^{-2}s\mathcal{A}^0} f_0^{-1} \right) \mathcal{R}(\varepsilon)^{q/2} T_\varepsilon, \tag{3.15}$$

$$J_{4,\varepsilon}(s)(\mathcal{H}_0+I)^{-q/2} = T_\varepsilon^* \left(f e^{-i\varepsilon^{-2}s\mathcal{B}(\varepsilon)} f^{-1} - f_0 e^{-i\varepsilon^{-2}s\mathcal{B}^0(\varepsilon)} f_0^{-1} \right) \mathcal{R}(\varepsilon)^{q/2} T_\varepsilon. \tag{3.16}$$

Далее, оператор $\mathcal{R}(\varepsilon)$ раскладывается в прямой интеграл по операторам (2.79): $\mathcal{R}(\varepsilon) = \mathscr{U}^{-1} \left(\int_{\widetilde{\Omega}} \oplus \mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)\, d\mathbf{k} \right) \mathscr{U}$. Напомним также обозначения (2.84)–(2.88). В силу разложений (2.44), (2.45) имеем

$$\begin{aligned} &\left\| \left(f \cos(\varepsilon^{-1}s\mathcal{A}^{1/2}) f^{-1} - f_0 \cos(\varepsilon^{-1}s(\mathcal{A}^0)^{1/2}) f_0^{-1} \right) \mathcal{R}(\varepsilon)^{q/2} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\qquad = \operatorname*{ess-sup}_{\mathbf{k}\in\widetilde{\Omega}} \| J_1(\mathbf{k},\varepsilon^{-1}s) \mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)^{q/2} \|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}, \end{aligned} \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned} &\left\| \left(f \mathcal{A}^{-1/2} \sin(\varepsilon^{-1}s\mathcal{A}^{1/2}) f^{-1} \right.\right. \\ &\qquad \left.\left. - f_0 (\mathcal{A}^0)^{-1/2} \sin(\varepsilon^{-1}s(\mathcal{A}^0)^{1/2}) f_0^{-1} \right) \mathcal{R}(\varepsilon)^{q/2} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\qquad = \operatorname*{ess-sup}_{\mathbf{k}\in\widetilde{\Omega}} \| J_{2,a}(\mathbf{k},\varepsilon^{-1}s) \mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)^{q/2} \|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}, \end{aligned} \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned} &\left\| \left(f \mathcal{A}^{-1/2} \sin(\varepsilon^{-1}s\mathcal{A}^{1/2}) f^{*} \right.\right. \\ &\qquad \left.\left. - f_0 (\mathcal{A}^0)^{-1/2} \sin(\varepsilon^{-1}s(\mathcal{A}^0)^{1/2}) f_0 \right) \mathcal{R}(\varepsilon)^{q/2} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\qquad = \operatorname*{ess-sup}_{\mathbf{k}\in\widetilde{\Omega}} \| J_{2,b}(\mathbf{k},\varepsilon^{-1}s) \mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)^{q/2} \|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}, \end{aligned} \tag{3.19}$$

$$\begin{aligned} &\left\| \left(f e^{-i\tau\varepsilon^{-2}\mathcal{A}} f^{-1} - f_0 e^{-i\tau\varepsilon^{-2}\mathcal{A}^0} f_0^{-1} \right) \mathcal{R}(\varepsilon)^{q/2} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\qquad = \operatorname*{ess-sup}_{\mathbf{k}\in\widetilde{\Omega}} \| J_3(\mathbf{k},\varepsilon^{-2}s) \mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)^{q/2} \|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}, \end{aligned} \tag{3.20}$$

$$\begin{aligned} &\left\| \left(f e^{-i\tau\varepsilon^{-2}\mathcal{B}(\varepsilon)} f^{-1} - f_0 e^{-i\tau\varepsilon^{-2}\mathcal{B}^0(\varepsilon)} f_0^{-1} \right) \mathcal{R}(\varepsilon)^{q/2} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\qquad = \operatorname*{ess-sup}_{\mathbf{k}\in\widetilde{\Omega}} \| J_4(\mathbf{k},\varepsilon,\varepsilon^{-2}s) \mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)^{q/2} \|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Заметим, что оператор $(\mathcal{H}_0+I)^{q/2}$ осуществляет изометрический изоморфизм пространства Соболева $H^q(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ на $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. С учётом этого, применяя теоремы 2.4.1, 2.4.4, 2.4.10, и соотношения (3.12)–(3.21) непосредственно получаем следующие две теоремы. Ниже мы *объединяем формулировки* (по усилению результатов), поэтому нам удобно начать *новую нумерацию констант*.

Теорема 3.1.1. *Пусть $\mathcal{A}_\varepsilon$, $\mathcal{B}_\varepsilon$ — операторы* (3.1), (3.2) *и пусть $\mathcal{A}^0$, $\mathcal{B}^0$ — операторы* (3.5), (3.6). *Пусть операторы $J_{1,\varepsilon}(s)$, $J_{2,a,\varepsilon}(s)$, $J_{2,b,\varepsilon}(s)$ $J_{3,\varepsilon}(s)$, $J_{4,\varepsilon}(s)$ определены в* (3.7)–(3.11). *Тогда при $s\in\mathbb{R}$ и $\varepsilon>0$ справедливы оценки*

$$\left\| J_{1,\varepsilon}(s) \right\|_{H^2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathrm{C}_1(1+|s|)\varepsilon, \tag{3.22}$$

$$\left\|J_{2,a,\varepsilon}(s)\right\|_{H^1(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathrm{C}_2(1+|s|)\varepsilon, \tag{3.23}$$

$$\left\|J_{2,b,\varepsilon}(s)\right\|_{H^1(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widetilde{\mathrm{C}}_2(1+|s|)\varepsilon, \tag{3.24}$$

$$\left\|J_{3,\varepsilon}(s)\right\|_{H^3(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathrm{C}_3(1+|s|)\varepsilon, \tag{3.25}$$

$$\left\|J_{4,\varepsilon}(s)\right\|_{H^3(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathrm{C}_4(1+|s|)\varepsilon,$$

где C_1, C_2, $\widetilde{\mathrm{C}}_2$, C_3 *зависят от параметров* (2.89), C_4 *— от параметров* (2.90).

Теорема 3.1.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 3.1.1.

а) *Пусть выполнено условие* 2.4.3 *либо условие* 2.4.7 (*или более сильное условие* 2.4.8). *Тогда при* $s \in \mathbb{R}$ *и* $\varepsilon > 0$ *справедливы оценки*

$$\left\|J_{1,\varepsilon}(s)\right\|_{H^{3/2}(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathrm{C}_5(1+|s|)^{1/2}\varepsilon, \tag{3.26}$$

$$\left\|J_{2,b,\varepsilon}(s)\right\|_{H^{1/2}(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathrm{C}_6(1+|s|)^{1/2}\varepsilon, \tag{3.27}$$

$$\left\|J_{3,\varepsilon}(s)\right\|_{H^{2}(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathrm{C}_7(1+|s|)^{1/2}\varepsilon. \tag{3.28}$$

При условии 2.4.3 *постоянные* C_5, C_6, C_7 *зависят от параметров* (2.89). *При условии* 2.4.7 *эти константы зависят от тех же параметров, а также от от* n, c°.

б) *Пусть выполнено условие* 2.4.3. *Тогда при* $s \in \mathbb{R}$ *и* $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *справедлива оценка*

$$\left\|J_{4,\varepsilon}(s)\right\|_{H^{2}(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathrm{C}_8(1+|s|)\varepsilon.$$

Постоянная C_8 *зависит от параметров* (2.90).

Отметим, что оценки (3.22), (3.25) были получены в [54, теоремы 13.3, 12.4], а неравенство (3.23) установлено в [55, теорема 9.1]; оценка (3.28) усиливает результаты теорем 13.8 и 13.10 из [57] в отношении зависимости оценок от s.

С помощью интерполяции из теорем 3.1.1, 3.1.2 выводим следствия.

Следствие 3.1.3. *В условиях теоремы* 3.1.1 *справедливы оценки*

$$\left\|J_{1,\varepsilon}(s)\right\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathfrak{C}_1(q_1)(1+|s|)^{q_1/2}\varepsilon^{q_1/2}, \quad 0 \leqslant q_1 \leqslant 2,\ s \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0; \tag{3.29}$$

$$\left\|J_{2,b,\varepsilon}(s)\right\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathfrak{C}_2(q_2)(1+|s|)^{(q_2+1)/2}\varepsilon^{(q_2+1)/2}, \quad 0 \leqslant q_2 \leqslant 1,\ s \in \mathbb{R},\ 0 < \varepsilon \leqslant 1; \tag{3.30}$$

$$\left\| J_{2,b,\varepsilon}(s)\mathbf{D}^* \right\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathfrak{C}_2'(q_1)(1+|s|)^{q_1/2}\varepsilon^{q_1/2}, \quad 0 \leqslant q_1 \leqslant 2,\ s\in\mathbb{R},\ \varepsilon>0; \tag{3.31}$$

$$\left\| J_{3,\varepsilon}(s) \right\|_{H^{q_3}(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathfrak{C}_3(q_3)(1+|s|)^{q_3/3}\varepsilon^{q_3/3}, \quad 0 \leqslant q_3 \leqslant 3,\ s\in\mathbb{R},\ \varepsilon>0; \tag{3.32}$$

$$\left\| J_{4,\varepsilon}(s) \right\|_{H^{q_3}(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathfrak{C}_4(q_3)(1+|s|)^{q_3/3}\varepsilon^{q_3/3}, \quad 0 \leqslant q_3 \leqslant 3,\ s\in\mathbb{R},\ \varepsilon>0. \tag{3.33}$$

Доказательство. С учётом (2.69) имеем

$$\left\| J_{1,\varepsilon}(s) \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant 2\|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty}, \quad s\in\mathbb{R},\ \varepsilon>0. \tag{3.34}$$

Интерполируя между (3.34) и (3.22), приходим к оценке (3.29) с постоянной $\mathfrak{C}_1(q_1) = (2\|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty})^{1-q_1/2}\mathrm{C}_1^{q_1/2}$. Аналогично получаются оценки (3.32), (3.33) с постоянными $\mathfrak{C}_3(q_3) = (2\|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty})^{1-q_3/3}\mathrm{C}_3^{q_3/3}$, $\mathfrak{C}_4(q_3) = (2\|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty})^{1-q_3/3}\mathrm{C}_4^{q_3/3}$.

Далее, в силу (2.97) и (3.14) (при $q_2=0$) при $s\in\mathbb{R}$ и $0<\varepsilon\leqslant 1$ выполнено

$$\left\| J_{2,b,\varepsilon}(s) \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathrm{C}_2'\varepsilon(1+\varepsilon^{-1/2}|s|^{1/2}) \leqslant 2\mathrm{C}_2'\varepsilon^{1/2}(1+|s|)^{1/2}. \tag{3.35}$$

Интерполируя между (3.35) и (3.24), получаем оценку (3.30) с постоянной $\mathfrak{C}_2(q_2) = (2\mathrm{C}_2')^{1-q_2}\widetilde{\mathrm{C}}_2^{q_2}$.

Далее, используя аналог (2.10) для оператора $\mathcal{A}_\varepsilon$, получаем оценку

$$\left\| \mathbf{D} f^\varepsilon \mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2}\sin(s\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})(f^\varepsilon)^* \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \|f\|_{L_\infty}\widehat{c}_*^{\,-1/2}.$$

Применяя аналогичную оценку для оператора $\mathbf{D} f_0(\mathcal{A}^0)^{-1/2}\sin(s(\mathcal{A}^0)^{1/2})f_0$ и переходя к сопряжённым операторам, получаем

$$\left\| J_{2,b,\varepsilon}(s)\mathbf{D}^* \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant 2\|f\|_{L_\infty}\widehat{c}_*^{\,-1/2}. \tag{3.36}$$

Интерполируя между (3.36) и оценкой $\|J_{2,b,\varepsilon}(s)\mathbf{D}^*\|_{H^2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widetilde{\mathrm{C}}_2(1+|s|)\varepsilon$ (очевидным образом следующей из (3.24)), получаем (3.31) с константой $\mathfrak{C}_2'(q_1) = (2\|f\|_{L_\infty}\widehat{c}_*^{\,-1/2})^{1-q_1/2}\widetilde{\mathrm{C}}_2^{q_1/2}$. □

Замечание 3.1.4. *В условиях теоремы 3.1.1 можно получить результат и для оператора $J_{2,a,\varepsilon}(s)$, интерполируя между очевидной оценкой $\|J_{2,a,\varepsilon}(s)\|_{L_2\to L_2} \leqslant 2|s|\|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty}$ и (3.23). Это даёт неравенство*

$$\|J_{2,a,\varepsilon}(s)\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widetilde{\mathfrak{C}}_2(q_2)(1+|s|)\varepsilon^{q_2}, \qquad 0\leqslant q_2\leqslant 1,\ s\in\mathbb{R},\ \varepsilon>0.$$

Получить аналог оценки (3.30) для $J_{2,a,\varepsilon}(s)$ не удаётся: см. замечание 2.4.6.

Следствие 3.1.5. *В условиях пункта а) теоремы 3.1.2 справедливы оценки*

$$\begin{aligned}\left\|J_{1,\varepsilon}(s)\right\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathfrak{C}_5(q_1)(1+|s|)^{q_1/3}\varepsilon^{2q_1/3},\\ 0\leqslant q_1\leqslant 3/2,\ s\in\mathbb{R},\ \varepsilon>0;\end{aligned}\tag{3.37}$$

$$\begin{aligned}\left\|J_{2,b,\varepsilon}(s)\right\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathfrak{C}_6(q_2)(1+|s|)^{(q_2+1)/3}\varepsilon^{2(q_2+1)/3},\\ 0\leqslant q_2\leqslant 1/2,\ s\in\mathbb{R},\ 0<\varepsilon\leqslant 1;\end{aligned}\tag{3.38}$$

$$\begin{aligned}\left\|J_{2,b,\varepsilon}(s)\mathbf{D}^*\right\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathfrak{C}_6'(q_1)(1+|s|)^{q_1/3}\varepsilon^{2q_1/3},\\ 0\leqslant q_1\leqslant 3/2,\ s\in\mathbb{R},\ \varepsilon>0;\end{aligned}\tag{3.39}$$

$$\begin{aligned}\left\|J_{3,\varepsilon}(s)\right\|_{H^{q_3}(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathfrak{C}_7(q_3)(1+|s|)^{q_3/4}\varepsilon^{q_3/2},\\ 0\leqslant q_3\leqslant 2,\ s\in\mathbb{R},\ \varepsilon>0.\end{aligned}\tag{3.40}$$

В условиях пункта б) теоремы 3.1.2 справедлива оценка

$$\begin{aligned}\left\|J_{4,\varepsilon}(s)\right\|_{H^{q_3}(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathfrak{C}_8(q_3)(1+|s|)^{q_3/2}\varepsilon^{q_3/2},\\ 0\leqslant q_3\leqslant 2,\ s\in\mathbb{R},\ \varepsilon>0.\end{aligned}\tag{3.41}$$

Доказательство. Интерполируя между (3.34) и (3.26), приходим к оценке (3.37) с постоянной $\mathfrak{C}_5(q_1) = (2\|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty})^{1-2q_1/3}\mathrm{C}_5^{2q_1/3}$. Аналогично получаются оценки (3.40), (3.41) с постоянными $\mathfrak{C}_7(q_3) = (2\|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty})^{1-q_3/2}\mathrm{C}_7^{q_3/2}$, $\mathfrak{C}_8(q_3) = (2\|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty})^{1-q_3/2}\mathrm{C}_8^{q_3/2}$.

В силу (2.105), (2.111) и (3.14) (при $q_2 = 0$) при $s\in\mathbb{R}$ и $0<\varepsilon\leqslant 1$ выполнено

$$\left\|J_{2,b,\varepsilon}(s)\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathrm{C}_6'\varepsilon(1+\varepsilon^{-1/3}|s|^{1/3}) \leqslant 2\mathrm{C}_6'\varepsilon^{2/3}(1+|s|)^{1/3}.\tag{3.42}$$

Интерполируя между (3.42) и (3.27), получаем оценку (3.38) с постоянной $\mathfrak{C}_6(q_2) = (2\mathrm{C}_6')^{1-2q_2}\mathrm{C}_6^{2q_2}$.

Наконец, интерполируя между (3.36) и оценкой

$$\|J_{2,b,\varepsilon}(s)\mathbf{D}^*\|_{H^{3/2}(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathrm{C}_6(1+|s|)^{1/2}\varepsilon$$

(которая очевидным образом следует из (3.27)) получаем (3.39) с константой $\mathfrak{C}_6'(s) = (2\|f\|_{L_\infty}\widehat{c}_*^{\,-1/2})^{1-2q_1/3}\mathrm{C}_6^{2q_1/3}$. □

Замечание 3.1.6

а) *В условиях теоремы 3.1.1 при $s = O(\varepsilon^{-\alpha})$, $0<\alpha<1$, получаем квалифицированные оценки*:

$$\left\|J_{1,\varepsilon}(s)\right\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} = O(\varepsilon^{q_1(1-\alpha)/2}),\qquad 0\leqslant q_1\leqslant 2;$$

$$\left\|J_{2,b,\varepsilon}(s)\right\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} = O(\varepsilon^{(q_2+1)(1-\alpha)/2}), \qquad 0 \leqslant q_2 \leqslant 1;$$
$$\left\|J_{2,b,\varepsilon}(s)\mathbf{D}^*\right\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} = O(\varepsilon^{q_1(1-\alpha)/2}), \qquad 0 \leqslant q_1 \leqslant 2;$$
$$\left\|J_{3,\varepsilon}(s)\right\|_{H^{q_3}(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} = O(\varepsilon^{q_3(1-\alpha)/3}), \qquad 0 \leqslant q_1 \leqslant 3;$$
$$\left\|J_{4,\varepsilon}(s)\right\|_{H^{q_3}(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} = O(\varepsilon^{q_3(1-\alpha)/3}), \qquad 0 \leqslant q_1 \leqslant 3.$$

б) *В условиях теоремы 3.1.2 при* $s = O(\varepsilon^{-\alpha})$, $0 < \alpha < 2$, *получаем квалифицированные оценки*:

$$\left\|J_{1,\varepsilon}(s)\right\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} = O(\varepsilon^{q_1(2-\alpha)/3}), \qquad 0 \leqslant q_1 \leqslant 3/2;$$
$$\left\|J_{2,b,\varepsilon}(s)\right\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} = O(\varepsilon^{(q_2+1)(2-\alpha)/3}), \qquad 0 \leqslant q_2 \leqslant 1/2;$$
$$\left\|J_{2,b,\varepsilon}(s)\mathbf{D}^*\right\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} = O(\varepsilon^{q_1(2-\alpha)/3}), \qquad 0 \leqslant q_1 \leqslant 3/2;$$
$$\left\|J_{3,\varepsilon}(s)\right\|_{H^{q_3}(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} = O(\varepsilon^{q_3(2-\alpha)/4}), \qquad 0 \leqslant q_3 \leqslant 2.$$

3.1.4 Подтверждение точности результатов пункта 3.1.3

Применяя теоремы из пункта 2.5, подтвердим точность результатов пункта 3.1.3. Сначала обсудим точность результатов относительно типа операторной нормы. Следующие два утверждения, подтверждающее точность теоремы 3.1.1, выводятся из теорем 2.5.4, 2.5.9 с помощью масштабного преобразования и соотношений (3.17)–(3.21).

Теорема 3.1.7. *Пусть выполнено условие* 2.5.1.

а) *Пусть* $0 \neq s \in \mathbb{R}$ *и* $0 \leqslant q_1 < 2$. *Тогда не существует такой постоянной* $\mathcal{C}(s) > 0$, *чтобы при всех достаточно малых* $\varepsilon > 0$ *выполнялась оценка*

$$\|J_{1,\varepsilon}(s)\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathcal{C}(s)\varepsilon. \qquad (3.43)$$

б) *Пусть* $0 \neq s \in \mathbb{R}$ *и* $0 \leqslant q_2 < 1$. *Тогда не существует такой постоянной* $\mathcal{C}(s) > 0$, *чтобы при всех достаточно малых* $\varepsilon > 0$ *выполнялась оценка*

$$\|J_{2,a,\varepsilon}(s)\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathcal{C}(s)\varepsilon. \qquad (3.44)$$

в) *Пусть* $0 \neq s \in \mathbb{R}$ *и* $0 \leqslant q_2 < 1$. *Тогда не существует такой постоянной* $\mathcal{C}(s) > 0$, *чтобы при всех достаточно малых* $\varepsilon > 0$ *выполнялась оценка*

$$\|J_{2,b,\varepsilon}(s)\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathcal{C}(s)\varepsilon. \qquad (3.45)$$

г) *Пусть* $0 \neq s \in \mathbb{R}$ *и* $0 \leqslant q_3 < 3$. *Тогда не существует такой постоянной* $\mathcal{C}(s) > 0$, *чтобы при всех достаточно малых* $\varepsilon > 0$ *выполнялась оценка*

$$\|J_{3,\varepsilon}(s)\|_{H^{q_3}(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathcal{C}(s)\varepsilon. \tag{3.46}$$

Теорема 3.1.8. *Пусть выполнено условие* 2.5.8. *Пусть* $0 \neq s \in \mathbb{R}$ *и* $0 \leqslant q_3 < 3$. *Тогда не существует такой постоянной* $\mathcal{C}(s) > 0$, *чтобы при всех достаточно малых* $\varepsilon > 0$ *выполнялась оценка*

$$\|J_{4,\varepsilon}(s)\|_{H^{q_3}(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathcal{C}(s)\varepsilon.$$

Утверждение пункта г) теоремы 3.1.7 было доказано в [57, теорема 13.12]. Далее, теорема 2.5.5 подтверждает точность оценок (3.26)–(3.28).

Теорема 3.1.9. *Пусть выполнено условие* 2.5.2.

а) *Пусть* $0 \neq s \in \mathbb{R}$ *и* $0 \leqslant q_1 < 3/2$. *Тогда не существует такой постоянной* $\mathcal{C}(s) > 0$, *чтобы оценка* (3.43) *выполнялась при всех достаточно малых* ε.

б) *Пусть* $0 \neq s \in \mathbb{R}$ *и* $0 \leqslant q_2 < 1/2$. *Тогда не существует такой постоянной* $\mathcal{C}(s) > 0$, *чтобы оценка* (3.45) *выполнялась при всех достаточно малых* ε.

в) *Пусть* $0 \neq s \in \mathbb{R}$ *и* $0 \leqslant q_3 < 2$. *Тогда не существует такой постоянной* $\mathcal{C}(s) > 0$, *чтобы оценка* (3.46) *выполнялась при всех достаточно малых* ε.

Обсудим теперь точность результатов относительно зависимости оценок от параметра s. Из теоремы 2.5.6 вытекает следующее утверждение, демонстрирующее точность оценок (3.22)–(3.25).

Теорема 3.1.10. *Пусть выполнено условие* 2.5.1.

а) *Пусть* $q_1 \geqslant 2$. *Тогда не существует положительной функции* $\mathcal{C}(s)$ *такой, что* $\lim_{s\to\infty}\mathcal{C}(s)/|s| = 0$ *и при* $s \in \mathbb{R}$ *и достаточно малом* $\varepsilon > 0$ *выполнено* (3.43).

б) *Пусть* $q_2 \geqslant 1$. *Тогда не существует положительной функции* $\mathcal{C}(s)$ *такой, что* $\lim_{s\to\infty}\mathcal{C}(s)/|s| = 0$ *и при* $s \in \mathbb{R}$ *и достаточно малом* $\varepsilon > 0$ *выполнено* (3.44).

в) *Пусть* $q_2 \geqslant 1$. *Тогда не существует положительной функции* $\mathcal{C}(s)$ *такой, что* $\lim_{s\to\infty}\mathcal{C}(s)/|s| = 0$ *и при* $s \in \mathbb{R}$ *и достаточно малом* $\varepsilon > 0$ *выполнено* (3.45).

г) *Пусть* $q_3 \geqslant 3$. *Тогда не существует положительной функции* $\mathcal{C}(s)$ *такой, что* $\lim_{s\to\infty}\mathcal{C}(s)/|s| = 0$ *и при* $s \in \mathbb{R}$ *и достаточно малом* $\varepsilon > 0$ *выполнено* (3.46).

Теорема 2.5.7 демонстрирует точность оценок (3.26)–(3.28).

Теорема 3.1.11. *Пусть выполнено условие* 2.5.2.

а) *Пусть* $q_1 \geqslant 3/2$. *Тогда не существует положительной функции* $\mathcal{C}(s)$ *такой, что* $\lim_{s\to\infty}\mathcal{C}(s)/|s|^{1/2} = 0$ *и при* $s \in \mathbb{R}$ *и достаточно малом* ε *выполнено* (3.43).

б) *Пусть* $q_2 \geqslant 1/2$. *Тогда не существует положительной функции* $\mathcal{C}(s)$ *такой, что* $\lim_{s\to\infty}\mathcal{C}(s)/|s|^{1/2} = 0$ *и при* $s \in \mathbb{R}$ *и достаточно малом* ε *выполнено* (3.45).

в) *Пусть* $q_3 \geqslant 2$. *Тогда не существует положительной функции* $\mathcal{C}(s)$ *такой, что* $\lim_{s\to\infty}\mathcal{C}(s)/|s|^{1/2} = 0$ *и при* $s \in \mathbb{R}$ *и достаточно малом* ε *выполнено* (3.46).

3.2 Усреднение задачи Коши для гиперболического уравнения

Возможны различные постановки задачи Коши, к которым применимы полученные выше результаты. Пользуясь линейностью задачи, мы рассмотрим единую постановку задачи в виде

$$\begin{cases} \mathfrak{Q}^\varepsilon(\mathbf{x})\dfrac{\partial^2 \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},s)}{\partial s^2} = -b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},s) \\ \qquad\qquad + \mathfrak{Q}^\varepsilon(\mathbf{x})\mathbf{F}_1(\mathbf{x},s) + \mathbf{F}_2(\mathbf{x},s) + \mathbf{D}^*\mathbf{G}(\mathbf{x},s), \\ \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}), \quad \dfrac{\partial \mathbf{u}_\varepsilon}{\partial s}(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\psi}_1(\mathbf{x}) + (\mathfrak{Q}^\varepsilon(\mathbf{x}))^{-1}(\boldsymbol{\psi}_2(\mathbf{x}) + \mathbf{D}^*\boldsymbol{\rho}(\mathbf{x})). \end{cases} \tag{3.47}$$

Здесь $\boldsymbol{\rho} = \operatorname{col}\{\boldsymbol{\rho}_1,\dots,\boldsymbol{\rho}_d\}$, $\mathbf{G} = \operatorname{col}\{\mathbf{G}_1,\dots,\mathbf{G}_d\}$, $\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\psi}_1,\boldsymbol{\psi}_2,\boldsymbol{\rho}_j \in L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, $\mathbf{F}_1,\mathbf{F}_2,\mathbf{G}_j \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R};L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n))$ — заданные функции, а $\mathfrak{Q}(\mathbf{x})$ — Г-периодическая эрмитова $(n\times n)$-матричнозначная функция такая, что $\mathfrak{Q}(\mathbf{x}) > 0$ и $\mathfrak{Q},\mathfrak{Q}^{-1} \in L_\infty$. Факторизуем матрицу $\mathfrak{Q}(\mathbf{x})^{-1}$: $\mathfrak{Q}(\mathbf{x})^{-1} = f(\mathbf{x})f^*(\mathbf{x})$. Без ограничения общности считаем $(n\times n)$-матрицу-функцию $f(\mathbf{x})$ периодической. Автоматически выполнено $f, f^{-1} \in L_\infty$. Пусть $\mathcal{A}_\varepsilon$ — оператор (3.1).

Делая замену $\widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon(\cdot, s) := (f^\varepsilon)^{-1}\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot, s)$, можно переписать задачу (3.47) следующим образом:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon(\mathbf{x}, s)}{\partial s^2} = -(\mathcal{A}_\varepsilon \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon)(\mathbf{x}, s) \\ \qquad\qquad + (f^\varepsilon(\mathbf{x}))^{-1}\mathbf{F}_1(\mathbf{x}, s) + (f^\varepsilon(\mathbf{x}))^*(\mathbf{F}_2(\mathbf{x}, s) + \mathbf{D}^*\mathbf{G}(\mathbf{x}, s)), \\ \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = (f^\varepsilon(\mathbf{x}))^{-1}\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}), \quad \dfrac{\partial \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon}{\partial s}(\mathbf{x}, 0) = (f^\varepsilon(\mathbf{x}))^{-1}\boldsymbol{\psi}_1(\mathbf{x}) \\ \qquad\qquad + (f^\varepsilon(\mathbf{x}))^*(\boldsymbol{\psi}_2(\mathbf{x}) + \mathbf{D}^*\boldsymbol{\rho}(\mathbf{x})). \end{cases}$$

Выписывая представление решения $\widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon$ этой задачи, приходим к следующему представлению для $\mathbf{u}_\varepsilon = f^\varepsilon \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon$:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_\varepsilon(\cdot, s) &= f^\varepsilon \cos(s\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})(f^\varepsilon)^{-1}\boldsymbol{\varphi} + f^\varepsilon \mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2}\sin(s\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})(f^\varepsilon)^{-1}\boldsymbol{\psi}_1 \\ &+ f^\varepsilon \mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2}\sin(s\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})(f^\varepsilon)^*(\boldsymbol{\psi}_2 + \mathbf{D}^*\boldsymbol{\rho}) + \int_0^s f^\varepsilon \mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2}\sin((s-\tilde{s})\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})(f^\varepsilon)^{-1}\mathbf{F}_1(\cdot, \tilde{s})\, d\tilde{s} \\ &+ \int_0^s f^\varepsilon \mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2}\sin((s-\tilde{s})\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})(f^\varepsilon)^*(\mathbf{F}_2(\cdot, \tilde{s}) + \mathbf{D}^*\mathbf{G}(\cdot, \tilde{s}))\, d\tilde{s}. \end{aligned} \tag{3.48}$$

Пусть $\mathbf{u}_0(\mathbf{x}, s)$ — решение “усреднённой” задачи

$$\begin{cases} \overline{\mathfrak{Q}}\dfrac{\partial^2 \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, s)}{\partial s^2} = -b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0(\mathbf{x}, s) + \overline{\mathfrak{Q}}\mathbf{F}_1(\mathbf{x}, s) + \mathbf{F}_2(\mathbf{x}, s) + \mathbf{D}^*\mathbf{G}(\mathbf{x}, s), \\ \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, 0) = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}), \quad \dfrac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial s}(\mathbf{x}, 0) = \boldsymbol{\psi}_1(\mathbf{x}) + (\overline{\mathfrak{Q}})^{-1}(\boldsymbol{\psi}_2(\mathbf{x}) + \mathbf{D}^*\boldsymbol{\rho}(\mathbf{x})), \end{cases} \tag{3.49}$$

где $\overline{\mathfrak{Q}}$ — среднее значение матрицы $\mathfrak{Q}(\mathbf{x})$ по Ω. Полагая $f_0 = (\overline{\mathfrak{Q}})^{-1/2}$ и делая замену $\widetilde{\mathbf{u}}_0(\cdot, s) := f_0^{-1}\mathbf{u}_0(\cdot, s)$, приходим к представлению

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_0(\cdot, s) &= f_0\cos(s(\mathcal{A}^0)^{1/2})f_0^{-1}\boldsymbol{\varphi} + f_0(\mathcal{A}^0)^{-1/2}\sin(s(\mathcal{A}^0)^{1/2})f_0^{-1}\boldsymbol{\psi}_1 \\ &+ f_0(\mathcal{A}^0)^{-1/2}\sin(s(\mathcal{A}^0)^{1/2})f_0(\boldsymbol{\psi}_2 + \mathbf{D}^*\boldsymbol{\rho}) \\ &+ \int_0^s f_0(\mathcal{A}^0)^{-1/2}\sin((s-\tilde{s})(\mathcal{A}^0)^{1/2})f_0^{-1}\mathbf{F}_1(\cdot, \tilde{s})\, d\tilde{s} \\ &+ \int_0^s f_0(\mathcal{A}^0)^{-1/2}\sin((s-\tilde{s})(\mathcal{A}^0)^{1/2})f_0(\mathbf{F}_2(\cdot, \tilde{s}) + \mathbf{D}^*\mathbf{G}(\cdot, \tilde{s}))\, d\tilde{s}. \end{aligned} \tag{3.50}$$

Применяя теорему 3.1.1, следствие 3.1.3 и замечание 3.1.4 и используя представления (3.48), (3.50), получаем следующий результат.

Теорема 3.2.1. *Пусть* $\mathbf{u}_\varepsilon$ *— решение задачи* (3.47) *и* $\mathbf{u}_0$ *— решение усреднённой задачи* (3.49).

а) *Если* $\boldsymbol{\rho} = 0$, $\mathbf{G} = 0$, $\boldsymbol{\varphi} \in H^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, $\boldsymbol{\psi}_1, \boldsymbol{\psi}_2 \in H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ *и* $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2 \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n))$, *то при* $s \in \mathbb{R}$ *и* $\varepsilon > 0$ *справедлива оценка*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot, s) - \mathbf{u}_0(\cdot, s)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathrm{C}_1(1 + |s|)\varepsilon\|\boldsymbol{\varphi}\|_{H^2(\mathbb{R}^d)} + \mathrm{C}_2(1 + |s|)\varepsilon\big(\|\boldsymbol{\psi}_1\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} + \|\mathbf{F}_1\|_{L_1((0,s);H^1(\mathbb{R}^d))}\big) + \widetilde{\mathrm{C}}_2(1 + |s|)\varepsilon\big(\|\boldsymbol{\psi}_2\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} + \|\mathbf{F}_2\|_{L_1((0,s);H^1(\mathbb{R}^d))}\big).$$

б) *Если* $\boldsymbol{\varphi} \in H^{q_1}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, $\boldsymbol{\psi}_1, \boldsymbol{\psi}_2 \in H^{q_2}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, $\boldsymbol{\rho} \in H^{q_1}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^{dn})$, $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2 \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; H^{q_1}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n))$, $\mathbf{G} \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; H^{q_2}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n))$, *где* $0 \leqslant q_1 \leqslant 2$, $0 \leqslant q_2 \leqslant 1$, *то при* $s \in \mathbb{R}$ *и* $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *справедлива оценка*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot, s) - \mathbf{u}_0(\cdot, s)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathfrak{C}_1(q_1)(1 + |s|)^{q_1/2}\varepsilon^{q_1/2}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d)} + \mathfrak{C}_2(q_2)(1 + |s|)^{(q_2+1)/2}\varepsilon^{(q_2+1)/2}\big(\|\boldsymbol{\psi}_2\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d)} + \|\mathbf{F}_2\|_{L_1((0,s);H^{q_2}(\mathbb{R}^d))}\big) + \mathfrak{C}_2'(q_1)(1 + |s|)^{q_1/2}\varepsilon^{q_1/2}\big(\|\boldsymbol{\rho}\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d)} + \|\mathbf{G}\|_{L_1((0,s);H^{q_1}(\mathbb{R}^d))}\big) + \widetilde{\mathfrak{C}}_2(q_2)(1 + |s|)\varepsilon^{q_2}\big(\|\boldsymbol{\psi}_1\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d)} + \|\mathbf{F}_1\|_{L_1((0,s);H^{q_2}(\mathbb{R}^d))}\big).$$

в) *Если*

$$\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi}_1, \boldsymbol{\psi}_2 \in L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n), \boldsymbol{\rho} \in L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^{dn}), \mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2 \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)), \mathbf{G} \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^{dn})),$$

то $\lim_{\varepsilon\to 0} \|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot, s) - \mathbf{u}_0(\cdot, s)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} = 0$ *при* $s \in \mathbb{R}$.

Поясним, что утверждение в) следует из утверждения б) при помощи теоремы Банаха–Штейнгауза. В случае, когда $\boldsymbol{\psi}_1 = 0$ и $\mathbf{F}_1 = 0$, можно усилить утверждения пунктов а) и б) теоремы 3.2.1 при дополнительных предположениях. Следствие 3.1.5 приводит к следующему результату.

Теорема 3.2.2. *Пусть* $\mathbf{u}_\varepsilon$ *— решение задачи* (3.47) *и* $\mathbf{u}_0$ *— решение усреднённой задачи* (3.49), *причём* $\boldsymbol{\psi}_1 = 0$ *и* $\mathbf{F}_1 = 0$. *Пусть выполнено условие* 2.4.3 *либо условие* 2.4.7 (*или более сильное условие* 2.4.8). *Если* $\boldsymbol{\varphi} \in H^{q_1}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, $\boldsymbol{\psi}_2 \in H^{q_2}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, $\boldsymbol{\rho} \in H^{q_1}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, $\mathbf{F}_2 \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; H^{q_2}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n))$, $\mathbf{G} \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; H^{q_1}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n))$, *где* $0 \leqslant q_1 \leqslant 3/2$, $0 \leqslant q_2 \leqslant 1/2$, *то при* $s \in \mathbb{R}$ *и* $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *справедлива оценка*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot, s) - \mathbf{u}_0(\cdot, s)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathfrak{C}_5(q_1)(1 + |s|)^{q_1/3}\varepsilon^{2q_1/3}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d)} + \mathfrak{C}_6(q_2)(1 + |s|)^{(q_2+1)/3}\varepsilon^{2(q_2+1)/3}\big(\|\boldsymbol{\psi}_2\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d)} + \|\mathbf{F}_2\|_{L_1((0,s);H^{q_2}(\mathbb{R}^d))}\big) + \mathfrak{C}_6'(q_1)(1 + |s|)^{q_1/3}\varepsilon^{2q_1/3}\big(\|\boldsymbol{\rho}\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d)} + \|\mathbf{G}\|_{L_1((0,s);H^{q_1}(\mathbb{R}^d))}\big).$$

3.3 Усреднение задачи Коши для нестационарного уравнения типа Шрёдингера

3.3.1 Задача Коши для уравнения с оператором $\mathcal{A}_\varepsilon$

Рассмотрим задачу Коши для нестационарного уравнения типа Шрёдингера с оператором $\mathcal{A}_\varepsilon$:

$$\begin{cases} i\dfrac{\partial \mathbf{v}_\varepsilon(\mathbf{x},s)}{\partial s} = f^\varepsilon(\mathbf{x})^* b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) f^\varepsilon(\mathbf{x}) \mathbf{v}_\varepsilon(\mathbf{x},s) + (f^\varepsilon(\mathbf{x}))^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{x},s), \\ f^\varepsilon(\mathbf{x})\mathbf{v}_\varepsilon(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}), \end{cases} \tag{3.51}$$

где $\boldsymbol{\varphi} \in L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, $\mathbf{F} \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n))$. Справедливо представление

$$\mathbf{v}_\varepsilon(\cdot,s) = e^{-is\mathcal{A}_\varepsilon}(f^\varepsilon)^{-1}\boldsymbol{\varphi} - i\int_0^s e^{-i(s-\tilde{s})\mathcal{A}_\varepsilon}(f^\varepsilon)^{-1}\mathbf{F}(\cdot,\tilde{s})\,d\tilde{s}.$$

Пусть $\mathbf{v}_0(\mathbf{x},s)$ — решение “усреднённой” задачи:

$$\begin{cases} i\dfrac{\partial \mathbf{v}_0(\mathbf{x},s)}{\partial s} = f_0 b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D}) f_0 \mathbf{v}_0(\mathbf{x},s) + f_0^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{x},s), \\ f_0\mathbf{v}_0(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}). \end{cases} \tag{3.52}$$

Тогда

$$\mathbf{v}_0(\cdot,s) = e^{-is\mathcal{A}^0} f_0^{-1}\boldsymbol{\varphi} - i\int_0^s e^{-i(s-\tilde{s})\mathcal{A}^0} f_0^{-1}\mathbf{F}(\cdot,\tilde{s})\,d\tilde{s}.$$

Из следствия 3.1.3 непосредственно вытекает следующий результат (доказанный ранее в [54, теорема 14.5]).

Теорема 3.3.1 ([54]). *Пусть $\mathbf{v}_\varepsilon$ — решение задачи* (3.51) *и $\mathbf{v}_0$ — решение задачи* (3.52).

а) *Если $\boldsymbol{\varphi} \in H^{q_3}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, $\mathbf{F} \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; H^{q_3}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n))$, где $0 \leqslant q_3 \leqslant 3$, то при $s \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ выполнена оценка*

$$\begin{aligned} &\| f^\varepsilon \mathbf{v}_\varepsilon(\cdot,s) - f_0\mathbf{v}_0(\cdot,s)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\qquad \leqslant \mathfrak{C}_3(q_3)(1+|s|)^{q_3/3}\varepsilon^{q_3/3}\left(\|\boldsymbol{\varphi}\|_{H^{q_3}(\mathbb{R}^d)} + \|\mathbf{F}\|_{L_1((0,s);H^{q_3}(\mathbb{R}^d))}\right). \end{aligned}$$

б) *Если $\boldsymbol{\varphi} \in L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ и $\mathbf{F} \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n))$, то*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\| f^\varepsilon \mathbf{v}_\varepsilon(\cdot,s) - f_0\mathbf{v}_0(\cdot,s)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} = 0, \qquad s \in \mathbb{R}.$$

Результаты теоремы 3.3.1 можно усилить при дополнительных предположениях. Применяя следствие 3.1.5, получаем следующее утверждение.

Теорема 3.3.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 3.3.1. *Пусть выполнено условие* 2.4.3 *либо условие* 2.4.7 (*или более сильное условие* 2.4.8). *Если* $\boldsymbol{\varphi} \in H^{q_3}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, $\mathbf{F} \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; H^{q_3}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n))$, *где* $0 \leqslant q_3 \leqslant 2$, *то при* $s \in \mathbb{R}$ *и* $\varepsilon > 0$ *выполнена оценка*

$$\|f^\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,s) - f_0\mathbf{u}_0(\cdot,s)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathfrak{C}_7(q_3)(1+|s|)^{q_3/4}\varepsilon^{q_3/2}\left(\|\boldsymbol{\varphi}\|_{H^{q_3}(\mathbb{R}^d)} + \|\mathbf{F}\|_{L_1((0,s);H^{q_3}(\mathbb{R}^d))}\right).$$

3.3.2 Задача Коши для уравнения с оператором $\mathcal{B}_\varepsilon$

Рассмотрим более общую задачу Коши для уравнения с оператором $\mathcal{B}_\varepsilon$:

$$\begin{cases} i\dfrac{\partial \mathbf{z}_\varepsilon(\mathbf{x},s)}{\partial s} = (\mathcal{B}_\varepsilon \mathbf{z}_\varepsilon)(\mathbf{x},s) + (f^\varepsilon(\mathbf{x}))^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{x},s), \\ f^\varepsilon(\mathbf{x})\mathbf{z}_\varepsilon(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}), \end{cases} \tag{3.53}$$

где $\boldsymbol{\varphi} \in L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, $\mathbf{F} \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n))$. Справедливо представление

$$\mathbf{z}_\varepsilon(\,\cdot\,,s) = e^{-is\mathcal{B}_\varepsilon}(f^\varepsilon)^{-1}\boldsymbol{\varphi} - i\int_0^s e^{-i(s-\tilde{s})\mathcal{B}_\varepsilon}(f^\varepsilon)^{-1}\mathbf{F}(\,\cdot\,,\tilde{s})\,d\tilde{s}.$$

Пусть $\mathbf{z}_0(\mathbf{x},s)$ — решение “усреднённой” задачи:

$$\begin{cases} i\dfrac{\partial \mathbf{z}_0(\mathbf{x},s)}{\partial s} = (\mathcal{B}^0 \mathbf{z}_0)(\mathbf{x},s) + f_0^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{x},s), \\ f_0\mathbf{z}_0(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}). \end{cases} \tag{3.54}$$

Тогда

$$\mathbf{z}_0(\,\cdot\,,s) = e^{-is\mathcal{B}^0}f_0^{-1}\boldsymbol{\varphi} - i\int_0^s e^{-i(s-\tilde{s})\mathcal{B}^0}f_0^{-1}\mathbf{F}(\,\cdot\,,\tilde{s})\,d\tilde{s}.$$

Из следствия 3.1.3 непосредственно вытекает следующий результат.

Теорема 3.3.3. *Пусть* $\mathbf{z}_\varepsilon$ — *решение задачи* (3.53) *и* $\mathbf{z}_0$ — *решение задачи* (3.54).

a) *Если* $\boldsymbol{\varphi} \in H^{q_3}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, $\mathbf{F} \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; H^{q_3}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n))$, *где* $0 \leqslant q_3 \leqslant 3$, *то при* $s \in \mathbb{R}$ *и* $\varepsilon > 0$ *выполнена оценка*

$$\left\|f^\varepsilon \mathbf{z}_\varepsilon(\,\cdot\,,s) - f_0\mathbf{z}_0(\,\cdot\,,s)\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathfrak{C}_4(q_3)(1+|s|)^{q_3/3}\varepsilon^{q_3/3}\left(\|\boldsymbol{\varphi}\|_{H^{q_3}(\mathbb{R}^d)} + \|\mathbf{F}\|_{L_1((0,s);H^{q_3}(\mathbb{R}^d))}\right).$$

б) *Если* $\boldsymbol{\varphi} \in L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ *и* $\mathbf{F} \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n))$, *то*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \| f^\varepsilon \mathbf{z}_\varepsilon(\,\cdot\,, s) - f_0 \mathbf{z}_0(\,\cdot\,, s)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} = 0, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Утверждение а) можно усилить при дополнительных предположениях. Применяя следствие 3.1.5, получаем следующую теорему.

Теорема 3.3.4. *Пусть выполнены условия теоремы* 3.3.3. *Пусть выполнено условие* 2.4.3. *Если* $\boldsymbol{\varphi} \in H^{q_3}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, $\mathbf{F} \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; H^{q_3}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n))$, *где* $0 \leqslant q_3 \leqslant 2$, *то при* $s \in \mathbb{R}$ *и* $\varepsilon > 0$ *выполнена оценка*

$$\big\| f^\varepsilon \mathbf{z}_\varepsilon(\,\cdot\,, s) - f_0 \mathbf{z}_0(\,\cdot\,, s)\big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\ \leqslant \mathfrak{C}_8(q_3)(1+|s|)^{q_3/2}\varepsilon^{q_3/2}\big(\|\boldsymbol{\varphi}\|_{H^{q_3}(\mathbb{R}^d)} + \|\mathbf{F}\|_{L_1((0,s);H^{q_3}(\mathbb{R}^d))}\big).$$

3.4 Применение общих результатов: уравнение акустики

3.4.1 Модельный оператор

В $L_2(\mathbb{R}^d)$ рассмотрим рассмотрим скалярный (то есть $n = 1$) оператор

$$\widehat{\mathcal{A}} = \mathbf{D}^* g(\mathbf{x})\mathbf{D} = -\operatorname{div} g(\mathbf{x})\nabla. \tag{3.55}$$

Здесь $g(\mathbf{x})$ — Γ-периодическая эрмитова $(d\times d)$-матрица-функция такая, что

$$g(\mathbf{x}) > 0 \quad \text{и} \quad g, g^{-1} \in L_\infty. \tag{3.56}$$

Оператор (3.55) является частным случаем оператора (2.53). В этом случае $n = 1$, $m = d$, $b(\mathbf{D}) = \mathbf{D}$. Очевидно, условие (2.7) выполнено при $\alpha_0 = \alpha_1 = 1$. Согласно (2.61) эффективный оператор для оператора (3.55) имеет вид

$$\widehat{\mathcal{A}}^0 = \mathbf{D}^* g^0\mathbf{D} = -\operatorname{div} g^0\nabla. \tag{3.57}$$

В соответствии с (2.56), (2.58), (2.59), эффективная матрица g^0 определяется следующим образом. Пусть $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_d$ — стандартный ортонормированный базис в $\mathbb{R}^d$. Пусть $\Phi_j \in \widetilde{H}^1(\Omega)$ — слабое Γ-периодическое решение задачи

$$\operatorname{div} g(\mathbf{x})\left(\nabla\Phi_j(\mathbf{x}) + \mathbf{e}_j\right) = 0, \qquad \int_\Omega \Phi_j(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = 0. \tag{3.58}$$

Тогда $\Lambda(\mathbf{x})$ — это матрица-строка $\Lambda(\mathbf{x}) = i(\Phi_1(\mathbf{x}),\dots,\Phi_d(\mathbf{x}))$, а $\widetilde{g}(\mathbf{x})$ — это $(d\times d)$-матрица со столбцами $\widetilde{\mathbf{g}}_j(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})\,(\nabla\Phi_j(\mathbf{x}) + \mathbf{e}_j)$, $j = 1,\dots,d$. Эффективная матрица определяется соотношением $g^0 = |\Omega|^{-1}\int_\Omega \widetilde{g}(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$. В случае $d = 1$ выполнено $m = n = 1$, а потому $g^0 = \underline{g}$.

Сейчас $f = \mathbf{1}_n$, поэтому $\mathfrak{Q} = \mathbf{1}_n$ и $f_0 = \mathbf{1}_n$. Если $g(\mathbf{x})$ — симметричная матрица с вещественными элементами, то в силу пункта a) предложения 2.3.1 выполнено $\widehat{N}_{\mathbf{1}_n}(\boldsymbol{\theta}) =: \widehat{N}(\boldsymbol{\theta}) = 0$ при всех $\boldsymbol{\theta}\in\mathbb{S}^{d-1}$. Если же $g(\mathbf{x})$ — эрмитова матрица с комплексными элементами, то в общей ситуации оператор $\widehat{N}(\boldsymbol{\theta})$ отличен от нуля. Поскольку $n = 1$, то оператор $\widehat{N}(\boldsymbol{\theta})$ есть оператор умножения на $\widehat{\mu}(\boldsymbol{\theta})$, где $\widehat{\mu}(\boldsymbol{\theta})$ — коэффициент при t^3 в разложении первого собственного значения $\widehat{\lambda}_1(t,\boldsymbol{\theta}) = \widehat{\gamma}(\boldsymbol{\theta})t^2 + \widehat{\mu}(\boldsymbol{\theta})t^3 + \widehat{\nu}(\boldsymbol{\theta})t^4 + \dots$ оператора $\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k}) = \widehat{A}(t,\boldsymbol{\theta})$. Вычисление (см. [15, п. 10.3]) показывает, что

$$\widehat{N}(\boldsymbol{\theta}) = \widehat{\mu}(\boldsymbol{\theta}) = -i\sum_{j,l,k=1}^{d}\left(a_{jlk} - a_{jlk}^*\right)\theta_j\theta_l\theta_k, \qquad \boldsymbol{\theta}\in\mathbb{S}^{d-1},$$

$$a_{jlk} = |\Omega|^{-1}\int_\Omega \Phi_j(\mathbf{x})^*\langle g(\mathbf{x})(\nabla\Phi_l(\mathbf{x}) + \mathbf{e}_l), \mathbf{e}_k\rangle\,d\mathbf{x}, \qquad j,l,k = 1,\dots,d.$$

В [15, п. 10.4] приведен пример оператора вида (3.55) с комплексной эрмитовой матрицей $g(\mathbf{x})$, в котором $\widehat{N}(\boldsymbol{\theta}) = \widehat{\mu}(\boldsymbol{\theta}) \not\equiv 0$.

Опишем теперь оператор $\widehat{\mathcal{N}}^{(1)}(\boldsymbol{\theta})$ — оператор умножения на $\widehat{\nu}(\boldsymbol{\theta})$. Пусть $\Psi_{jl}(\mathbf{x})$ — Γ-периодическое решение задачи

$$-\operatorname{div} g(\mathbf{x})\,(\nabla\Psi_{jl}(\mathbf{x}) - \Phi_j(\mathbf{x})\mathbf{e}_l) = g^0_{lj} - \widetilde{g}_{lj}(\mathbf{x}), \qquad \int_\Omega \Psi_{jl}(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = 0. \tag{3.59}$$

Как проверено в [26, п. 14.5],

$$\widehat{\mathcal{N}}^{(1)}(\boldsymbol{\theta}) = \widehat{\nu}(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{p,q,l,k=1}^{d}\left(\alpha_{pqlk} - (\overline{\Phi_p^*\Phi_q})g^0_{lk}\right)\theta_p\theta_q\theta_l\theta_k, \tag{3.60}$$

$$\begin{aligned}\alpha_{pqlk} &= |\Omega|^{-1}\int_\Omega (\widetilde{g}_{lp}(\mathbf{x})\Psi_{qk}(\mathbf{x}) + \widetilde{g}_{kq}(\mathbf{x})\Psi_{pl}(\mathbf{x}))\,d\mathbf{x}\\ &+ |\Omega|^{-1}\int_\Omega \langle g(\mathbf{x})(\nabla\Psi_{qk}(\mathbf{x}) - \Phi_q(\mathbf{x})\mathbf{e}_k, \nabla\Psi_{pl}(\mathbf{x}) - \Phi_p(\mathbf{x})\mathbf{e}_l\rangle\,d\mathbf{x}.\end{aligned}$$

В случае когда $g(\mathbf{x})$ имеет вещественные элементы, форма (3.60) изучалась в работе [70]; там было доказано, что форма (3.60) является отрицательно полуопределённой. Справедлива следующая простая лемма (см. также [70, замечание 3.3]).

Лемма 3.4.1. *Пусть* $d = 1$ *и* $\widehat{\mathcal{A}} = -\frac{d}{dx}g(x)\frac{d}{dx}$. *Если* $g \neq \mathrm{const}$, *то тогда* $\widehat{\nu}(-1) = \widehat{\nu}(1) < 0$.

Доказательство. Задача (3.58) сейчас принимает вид $\frac{d}{dx}g(x)(\frac{d}{dx}\Phi_1(x) + 1) = 0$, $\overline{\Phi_1} = 0$. Тогда $\frac{d}{dx}\Phi_1(x) = \underline{g}(g(x))^{-1} - 1$. Так как $g(x) \neq \mathrm{const}$, то $\underline{g}(g(x))^{-1} - 1 \not\equiv 0$, откуда следует, что $\Phi_1 \not\equiv 0$. Далее, $\widetilde{g}(x) = \underline{g} = g^0$ и уравнение (3.59) принимает вид $\frac{d}{dx}g(x)(\frac{d}{dx}\Psi_{11}(x) - \Phi_1(x)) = 0$, $\overline{\Psi_{11}} = 0$. Тогда $\frac{d}{dx}\Psi_{11}(x) - \Phi_1(x) = 0$. Легко проверить, что α_{1111} в (3.60) равно нулю: $\alpha_{1111} = 0$. Поскольку $\overline{\Phi_1^2} g^0 \neq 0$, получаем $\widehat{\nu}(-1) = \widehat{\nu}(1) < 0$. $\square$

Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_\varepsilon(\mathbf{x}, s)}{\partial s^2} = -\mathbf{D}^* g^\varepsilon(\mathbf{x})\mathbf{D}u_\varepsilon(\mathbf{x}, s), \\ u_\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = \varphi(\mathbf{x}), \quad \dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial s}(\mathbf{x}, 0) = \psi(\mathbf{x}) + \mathbf{D}^*\boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}), \end{cases} \tag{3.61}$$

где $\varphi, \psi \in L_2(\mathbb{R}^d)$, $\boldsymbol{\rho} \in L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^d)$. (Для простоты рассматриваем однородное уравнение.) Пусть u_0 — решение усреднённой задачи

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_0(\mathbf{x}, s)}{\partial s^2} = -\mathbf{D}^* g^0(\mathbf{x})\mathbf{D}u_0(\mathbf{x}, s), \\ u_0(\mathbf{x}, 0) = \varphi(\mathbf{x}), \quad \dfrac{\partial u_0}{\partial s}(\mathbf{x}, 0) = \psi(\mathbf{x}) + \mathbf{D}^*\boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}). \end{cases} \tag{3.62}$$

Применяя теорему 3.2.1 в общем случае и теорему 3.2.2 в “вещественном” случае, получаем следующий результат.

Предложение 3.4.2. *Пусть* u_ε *— решение задачи* (3.61) *и* u_0 *— решение усреднённой задачи* (3.62).

а) *Если* $\varphi \in H^{q_1}(\mathbb{R}^d)$, $\psi \in H^{q_2}(\mathbb{R}^d)$ *и* $\boldsymbol{\rho} \in H^{q_1}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^d)$, *где* $0 \leqslant q_1 \leqslant 2$, $0 \leqslant q_2 \leqslant 1$, *то при* $s \in \mathbb{R}$ *и* $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *справедлива оценка*

$$\begin{aligned} \|u_\varepsilon(\cdot, s) - u_0(\cdot, s)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} &\leqslant \widehat{\mathfrak{C}}_1(q_1)(1 + |s|)^{q_1/2}\varepsilon^{q_1/2}\|\varphi\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d)} \\ &+ \widehat{\mathfrak{C}}_2(q_2)(1 + |s|)^{(q_2+1)/2}\varepsilon^{(q_2+1)/2}\|\psi\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d)} \\ &+ \widehat{\mathfrak{C}}_2'(q_1)(1 + |s|)^{q_1/2}\varepsilon^{q_1/2}\|\boldsymbol{\rho}\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

Если $\varphi, \psi \in L_2(\mathbb{R}^d)$ *и* $\boldsymbol{\rho} \in L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^d)$, *то при* $s \in \mathbb{R}$ *выполнено*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|u_\varepsilon(\cdot, s) - u_0(\cdot, s)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} = 0.$$

б) *Пусть $g(\mathbf{x})$ — симметричная матрица с вещественными элементами. Если $\varphi \in H^{q_1}(\mathbb{R}^d)$, $\psi \in H^{q_2}(\mathbb{R}^d)$ и $\boldsymbol{\rho} \in H^{q_1}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^d)$, где $0 \leqslant q_1 \leqslant 3/2$, $0 \leqslant q_2 \leqslant 1/2$, то при $s \in \mathbb{R}$ и $0 < \varepsilon \leqslant 1$ справедлива оценка*

$$\begin{aligned}\|u_\varepsilon(\cdot, s) - u_0(\cdot, s)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} &\leqslant \widehat{\mathfrak{C}}_5(q_1)(1+|s|)^{q_1/3}\varepsilon^{2q_1/3}\|\varphi\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d)} \\ &+ \widehat{\mathfrak{C}}_6(q_2)(1+|s|)^{(q_2+1)/3}\varepsilon^{2(q_2+1)/3}\|\psi\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d)} \\ &+ \widehat{\mathfrak{C}}'_6(q_1)(1+|s|)^{q_1/3}\varepsilon^{2q_1/3}\|\boldsymbol{\rho}\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d)}.\end{aligned}$$

3.4.2 Уравнение акустики

В условиях пункта 3.4.1 предположим дополнительно, что $g(\mathbf{x})$ — симметричная матрица с вещественными элементами. Матрица $g(\mathbf{x})$ характеризует параметры акустической (вообще говоря, анизотропной) среды. Пусть $\mathfrak{Q}(\mathbf{x})$ — Γ-периодическая функция в $\mathbb{R}^d$, причём $\mathfrak{Q}(\mathbf{x}) > 0$; $\mathfrak{Q}, \mathfrak{Q}^{-1} \in L_\infty$. Эта функция играет роль плотности среды. Положим $f(\mathbf{x}) = \mathfrak{Q}(\mathbf{x})^{-1/2}$.

Рассмотрим задачу Коши для уравнения акустики в среде с быстро осциллирующими характеристиками:

$$\begin{cases}\mathfrak{Q}^\varepsilon(\mathbf{x})\dfrac{\partial^2 u_\varepsilon(\mathbf{x}, s)}{\partial s^2} = -\mathbf{D}^* g^\varepsilon(\mathbf{x})\mathbf{D}u_\varepsilon(\mathbf{x}, s), \\ u_\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = \varphi(\mathbf{x}), \quad \dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial s}(\mathbf{x}, 0) = \psi_1(\mathbf{x}) + (\mathfrak{Q}^\varepsilon)^{-1}(\psi_2(\mathbf{x}) + \mathbf{D}^*\boldsymbol{\rho}(\mathbf{x})),\end{cases} \tag{3.63}$$

где $\varphi, \psi_1, \psi_2 \in L_2(\mathbb{R}^d)$, $\boldsymbol{\rho} \in L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^d)$. (Для простоты рассматриваем однородное уравнение.) Пусть u_0 — решение усреднённой задачи

$$\begin{cases}\overline{\mathfrak{Q}}\dfrac{\partial^2 u_0(\mathbf{x}, s)}{\partial s^2} = -\mathbf{D}^* g^0(\mathbf{x})\mathbf{D}u_0(\mathbf{x}, s), \\ u_0(\mathbf{x}, 0) = \varphi(\mathbf{x}), \quad \dfrac{\partial u_0}{\partial s}(\mathbf{x}, 0) = \psi_1(\mathbf{x}) + (\overline{\mathfrak{Q}})^{-1}(\psi_2(\mathbf{x}) + \mathbf{D}^*\boldsymbol{\rho}(\mathbf{x})).\end{cases} \tag{3.64}$$

В силу пункта а) предложения 2.3.1 выполнено $\widehat{N}_{\mathfrak{Q}}(\boldsymbol{\theta}) = 0$ при всех $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$. В общем случае применима теорема 3.2.1, а в случае $\psi_1 = 0$ — теорема 3.2.2.

Предложение 3.4.3. *Пусть u_ε — решение задачи (3.63) и u_0 — решение усреднённой задачи (3.64). Если $\varphi \in H^{q_1}(\mathbb{R}^d)$, $\psi_1 \in H^{q_2}(\mathbb{R}^d)$, $\psi_2 \in H^{q_3}(\mathbb{R}^d)$,*

$\boldsymbol{\rho} \in H^{q_1}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^d)$, где $0 \leqslant q_1 \leqslant 3/2$, $0 \leqslant q_2 \leqslant 1$, $0 \leqslant q_3 \leqslant 1/2$, то при $s \in \mathbb{R}$ и $0 < \varepsilon \leqslant 1$ справедлива оценка

$$\|u_\varepsilon(\cdot,s) - u_0(\cdot,s)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathfrak{C}_5(q_1)(1+|s|)^{q_1/3}\varepsilon^{2q_1/3}\|\varphi\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d)} \\ + \widetilde{\mathfrak{C}}_2(q_2)(1+|s|)\varepsilon^{q_2}\|\psi_1\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d)} + \mathfrak{C}_6(q_2)(1+|s|)^{(1+q_3)/3}\varepsilon^{2(1+q_3)/3}\|\psi_2\|_{H^{q_3}(\mathbb{R}^d)} \\ + \mathfrak{C}_6'(q_1)(1+|s|)^{q_1/3}\varepsilon^{2q_1/3}\|\boldsymbol{\rho}\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d)}.$$

Если $\varphi,\psi_1,\psi_2 \in L_2(\mathbb{R}^d)$, $\boldsymbol{\rho} \in L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^d)$, то $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\|u_\varepsilon(\cdot,s) - u_0(\cdot,s)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} = 0$ при $s \in \mathbb{R}$.

3.5 Применение общих результатов: система теории упругости

3.5.1 Оператор теории упругости

Пусть $d \geqslant 2$. Мы записываем оператор теории упругости, следуя [13, глава 5, §2]. Пусть ζ — ортогональный тензор второго ранга в $\mathbb{R}^d$. В стандартном ортонормированном базисе в $\mathbb{R}^d$ он представляется в виде матрицы $\zeta = \{\zeta_{jl}\}_{j,l=1}^d$. Рассматриваем симметричные тензоры ζ и отождествляем их с векторами $\zeta_* \in \mathbb{C}^m$, $2m = d(d+1)$, по следующему правилу. Вектор ζ_* состоит из всех компонент ζ_{jl}, $j \leqslant l$, упорядоченных каким-либо фиксированным способом.

Для вектора смещений $\mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^d)$ введём тензор деформаций $e(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\{\partial_l u_j + \partial_j u_l\}$. Пусть $e_*(\mathbf{u})$ — вектор, отвечающий тензору $e(\mathbf{u})$ в соответствии с описанным правилом. Равенство $b(\mathbf{D})\mathbf{u} = -ie_*(\mathbf{u})$ определяет однозначно $(m\times d)$-матричный ДО $b(\mathbf{D})$ (причём символ $b(\boldsymbol{\xi})$ является матрицей с вещественными элементами). Например, при подходящем упорядочении

$$b(\mathbf{D}) = \begin{pmatrix} \xi_1 & 0 \\ \frac{1}{2}\xi_2 & \frac{1}{2}\xi_1 \\ 0 & \xi_2 \end{pmatrix}, \quad d = 2.$$

Сейчас $n = d$, $m = d(d+1)/2$. Легко видеть, что условие (2.7) выполнено, причём α_0, α_1 зависят только от d.

Пусть $\sigma(\mathbf{u})$ — тензор напряжений, а $\sigma_*(\mathbf{u})$ — соответствующий вектор. Тогда закон Гука о пропорциональности напряжений деформациям можно выразить соотношением $\sigma_*(\mathbf{u}) = g(\mathbf{x})e_*(\mathbf{u})$, где $g(\mathbf{x})$ — симметричная $(m \times m)$-матрица с вещественными элементами. Матрица g характеризует параметры упругой (вообще говоря, анизотропной) среды. Мы предполагаем, что матрица $g(\mathbf{x})$ периодична, $g(\mathbf{x}) > 0$ и $g, g^{-1} \in L_\infty$.

Энергия упругих деформаций задаётся квадратичной формой

$$w[\mathbf{u},\mathbf{u}] = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} \langle \sigma_*(\mathbf{u}), e_*(\mathbf{u})\rangle \, d\mathbf{x} = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} \langle g(\mathbf{x})b(\mathbf{D})\mathbf{u}, b(\mathbf{D})\mathbf{u}\rangle \, d\mathbf{x}, \quad \mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^d). \tag{3.65}$$

Оператор $\mathcal{W}$, порождённый этой формой в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^d)$, называют оператором упругости. Таким образом, $2\mathcal{W} = \widehat{\mathcal{A}} = b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})$.

В случае изотропной среды матрица $g(\mathbf{x})$ выражается через два функциональных параметра $\lambda(\mathbf{x})$ и $\mu(\mathbf{x})$ (параметры Ламе). Параметр μ — модуль сдвига. Часто вместо λ вводят другой параметр $K(\mathbf{x})$ — модуль объёмного сжатия. Нам понадобится ещё один модуль — $\beta(\mathbf{x})$. Выпишем соотношения: $K(\mathbf{x}) = \lambda(\mathbf{x}) + \frac{2\mu(\mathbf{x})}{d}$, $\beta(\mathbf{x}) = \mu(\mathbf{x}) + \frac{\lambda(\mathbf{x})}{2}$. Условия положительной определённости матрицы $g(\mathbf{x})$ в изотропном случае имеют вид: $\mu(\mathbf{x}) \geqslant \mu_0 > 0$, $K(\mathbf{x}) \geqslant K_0 > 0$. Для примера выпишем матрицу $g(\mathbf{x})$ в изотропном случае при $d = 2$:

$$g(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} K(\mathbf{x}) + \mu(\mathbf{x}) & 0 & K(\mathbf{x}) - \mu(\mathbf{x}) \\ 0 & 4\mu(\mathbf{x}) & 0 \\ K(\mathbf{x}) - \mu(\mathbf{x}) & 0 & K(\mathbf{x}) + \mu(\mathbf{x}) \end{pmatrix}.$$

3.5.2 Усреднение системы теории упругости

Рассмотрим теперь оператор упругости $\mathcal{W}_\varepsilon = \frac{1}{2}\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon = \frac{1}{2}b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})$ с быстро осциллирующими коэффициентами. Эффективная матрица g^0 и эффективный оператор $\mathcal{W}^0 = \frac{1}{2}\widehat{\mathcal{A}}^0 = \frac{1}{2}b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D})$ строятся по общим правилам (см. п. 2.2.1). В изотропном случае эффективная среда, вообще говоря, анизотропна.

Оператор $\widehat{N}_{\mathbf{1}_d}(\theta) =: \widehat{N}(\theta)$, вообще говоря, отличен от нуля. Более того, известны примеры, в которых $\widehat{N}_{0,\mathbf{1}_d}(\theta) =: \widehat{N}_0(\theta) \neq 0$ в некоторых точках $\theta \in \mathbb{S}^{d-1}$

(даже в изотропном случае): см. п. 3.5.3 ниже. Отметим также пример 8.7 из [57], в котором $\widehat{N}_0(\boldsymbol{\theta}) \neq 0$ в анизотропном случае.

Пусть $\mathfrak{Q}(\mathbf{x})$ — Γ-периодическая симметричная $(d \times d)$-матрица-функция с вещественными элементами, причём $\mathfrak{Q}(\mathbf{x}) > 0$; $\mathfrak{Q}, \mathfrak{Q}^{-1} \in L_\infty$. (Обычно $\mathfrak{Q}$ — скалярная функция, имеющая смысл плотности среды). Положим $f(\mathbf{x}) = \mathfrak{Q}(\mathbf{x})^{-1/2}$. Рассмотрим задачу Коши для системы теории упругости с быстро осциллирующими коэффициентами:

$$\begin{cases} \mathfrak{Q}^\varepsilon(\mathbf{x}) \dfrac{\partial^2 \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, s)}{\partial s^2} = -\mathcal{W}_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, s), \\ \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}), \quad \dfrac{\partial \mathbf{u}_\varepsilon}{\partial s}(\mathbf{x}, 0) = \boldsymbol{\psi}_1(\mathbf{x}) + (\mathfrak{Q}^\varepsilon)^{-1}(\boldsymbol{\psi}_2(\mathbf{x}) + \mathbf{D}^* \boldsymbol{\rho}(\mathbf{x})), \end{cases} \tag{3.66}$$

где $\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi}_1, \boldsymbol{\psi}_2 \in L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^d)$, $\boldsymbol{\rho} \in L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^{d^2})$. (Для простоты рассматриваем однородное уравнение.) Пусть $\mathbf{u}_0$ — решение усреднённой задачи

$$\begin{cases} \overline{\mathfrak{Q}} \dfrac{\partial^2 \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, s)}{\partial s^2} = -\mathcal{W}^0 \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, s), \\ \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, 0) = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}), \quad \dfrac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial s}(\mathbf{x}, 0) = \boldsymbol{\psi}_1(\mathbf{x}) + (\overline{\mathfrak{Q}})^{-1}(\boldsymbol{\psi}_2(\mathbf{x}) + \mathbf{D}^* \boldsymbol{\rho}(\mathbf{x})). \end{cases} \tag{3.67}$$

Применима теорема 3.2.1. Сформулируем результаты.

Предложение 3.5.1. *Пусть* $\mathbf{u}_\varepsilon$ *— решение задачи* (3.66) *и* $\mathbf{u}_0$ *— решение усреднённой задачи* (3.67). *Если* $\boldsymbol{\varphi} \in H^{q_1}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^d)$, $\boldsymbol{\psi}_1, \boldsymbol{\psi}_2 \in H^{q_2}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^d)$, $\boldsymbol{\rho} \in H^{q_1}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^{d^2})$, *где* $0 \leqslant q_1 \leqslant 2$, $0 \leqslant q_2 \leqslant 1$, *то при* $s \in \mathbb{R}$ *и* $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *справедлива оценка*

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot, s) - \mathbf{u}_0(\cdot, s)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} &\leqslant \mathfrak{C}_1(q_1)(1 + |s|)^{q_1/2} \varepsilon^{q_1/2} \|\boldsymbol{\varphi}\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d)} \\ &+ \widetilde{\mathfrak{C}}_2(q_2)(1 + |s|)\varepsilon^{q_2} \|\boldsymbol{\psi}_1\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d)} + \mathfrak{C}_2(q_2)(1 + |s|)^{(1+q_2)/2} \varepsilon^{(1+q_2)/2} \|\boldsymbol{\psi}_2\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d)} \\ &+ \mathfrak{C}_2'(q_1)(1 + |s|)^{q_1/2} \varepsilon^{q_1/2} \|\boldsymbol{\rho}\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

Если $\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi}_1, \boldsymbol{\psi}_2 \in L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^d)$, $\boldsymbol{\rho} \in L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^{d^2})$, *то* $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot, s) - \mathbf{u}_0(\cdot, s)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} = 0$ *при* $s \in \mathbb{R}$.

3.5.3 Пример

Рассмотрим оператор изотропной упругости в двумерном случае, считая, что модули K и μ периодичны и зависят лишь от x_1. Сейчас $d = 2$, $m = 3$, $n = 2$, $\Gamma = (2\pi\mathbb{Z})^2$ и $\mathfrak{Q}(\mathbf{x}) = \mathbf{1}_2$.

Периодическое решение $\Lambda(\mathbf{x})$ уравнения (2.56) ищем в виде

$$\Lambda(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \Lambda_{11}(x_1) & 0 & \Lambda_{13}(x_1) \\ 0 & \Lambda_{22}(x_1) & 0 \end{pmatrix},$$

где Λ_{11}, Λ_{22} и Λ_{13} — $(2\pi\mathbb{Z})$-периодические решения уравнений

$$\begin{aligned} & D_1(K(x_1)+\mu(x_1))(D_1\Lambda_{11}(x_1)+1)=0, && \int_0^{2\pi}\Lambda_{11}(x_1)\,dx_1=0, \\ & D_1\left(2\mu(x_1)\left(\frac{1}{2}D_1\Lambda_{22}(x_1)+1\right)\right)=0, && \int_0^{2\pi}\Lambda_{22}(x_1)\,dx_1=0, \\ & D_1\left((K(x_1)+\mu(x_1))D_1\Lambda_{13}(x_1)+K(x_1)-\mu(x_1)\right)=0, && \int_0^{2\pi}\Lambda_{13}(x_1)\,dx_1=0. \end{aligned} \tag{3.68}$$

Следовательно,

$$(K+\mu)(D_1\Lambda_{11}+1)=\underline{(K+\mu)}, \quad \mu\left(\frac{1}{2}D_1\Lambda_{22}+1\right)=\underline{\mu},$$
$$(K+\mu)D_1\Lambda_{13}+K-\mu=\underline{(K+\mu)}\overline{\left(\frac{K-\mu}{K+\mu}\right)}.$$

Матрица $\widetilde{g}(\mathbf{x})$ (см. (2.58)) сейчас равна

$$\widetilde{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \underline{(K+\mu)} & 0 & \underline{(K+\mu)}\overline{\left(\frac{K-\mu}{K+\mu}\right)} \\ 0 & 4\underline{\mu} & 0 \\ \underline{(K+\mu)}\left(\frac{K-\mu}{K+\mu}\right) & 0 & \frac{4K\mu}{K+\mu}+\frac{K-\mu}{K+\mu}\overline{\left(\frac{K-\mu}{K+\mu}\right)}\underline{(K+\mu)} \end{pmatrix}.$$

Вычисляя эффективную матрицу g^0 по формуле (2.59), получаем

$$g^0 = \begin{pmatrix} A & 0 & B \\ 0 & C & 0 \\ B & 0 & E \end{pmatrix},$$

где

$$A=\underline{(K+\mu)}, \quad B=\underline{(K+\mu)}\overline{\left(\frac{K-\mu}{K+\mu}\right)},$$
$$C=4\underline{\mu}, \quad E=4\overline{\left(\frac{K\mu}{K+\mu}\right)}+\overline{\left(\frac{K-\mu}{K+\mu}\right)}^{\,2}\underline{(K+\mu)}.$$

Вычисление ростка даёт

$$\widehat{S}(\theta) = \begin{pmatrix} A\theta_1^2 + \frac{1}{4}C\theta_2^2 & \left(B + \frac{1}{4}C\right)\theta_1\theta_2 \\ \left(B + \frac{1}{4}C\right)\theta_1\theta_2 & E\theta_2^2 + \frac{1}{4}C\theta_1^2 \end{pmatrix}. \tag{3.69}$$

Мы хотим подобрать пример, в котором $B + \frac{1}{4}C = 0$. Возьмём K и μ в виде

$$K(x_1) = a + 100 \cdot \begin{cases} -1, & \text{если } x_1 < \frac{\pi}{2}, \\ 1, & \text{если } x_1 \geqslant \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$
$$\mu(x_1) = 1 + 624 \cdot \cos^2 x_1.$$

Тогда

$$A^{-1} = \frac{1}{4q} + \frac{3}{4r}, \quad B = \frac{6(a+b)q + 2(a-b)r - 4qr}{r + 3q},$$
$$C = 4\sqrt{c+1}, \quad E = \frac{6br - 6bq - 12b^2 + 4qr}{r + 3q}.$$

Здесь $b = 100$, $c = 624$, $q = \sqrt{(a-b+c+1)(a-b+1)}$ и $r = \sqrt{(a+b+c+1)(a+b+1)}$. Таким образом, для того, чтобы $B + \frac{1}{4}C = 0$, нужно, чтобы число a было корнем уравнения

$$\frac{6(a+b)q + 2(a-b)r - 4qr}{r + 3q} = -25.$$

Существование корня следует из непрерывности левой части уравнения по a и из вычислений (левая часть при $a = 130$ приближённо равна -34.4, а при $a = 150$ приближённо равна -22.1), его приближённое значение: $a \approx 145.6581$. При таком выборе a совпадение собственных значений ростка (3.69) равносильно равенству $A\theta_1^2 + \frac{1}{4}C\theta_2^2 = E\theta_2^2 + \frac{1}{4}C\theta_1^2$. Поскольку $\theta_1^2 + \theta_2^2 = 1$, получаем, что это выполнено при

$$\theta_1^2 = \frac{E - \frac{1}{4}C}{A + E - \frac{1}{2}C} \approx 0.5394. \tag{3.70}$$

Далее, вычислим $L(\theta)$ и $\widehat{N}(\theta)$ (см. (2.74)):

$$L(\theta) = \begin{pmatrix} 0 & S\theta_2 & 0 \\ S^*\theta_2 & 0 & T^*\theta_2 \\ 0 & T\theta_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \widehat{N}(\theta) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & S\theta_1^2\theta_2 + T^*\theta_2^3 \\ S^*\theta_1^2\theta_2 + T\theta_2^3 & 0 \end{pmatrix},$$

где

$$S = \underline{K+\mu}\,\overline{\left(\frac{K-\mu}{K+\mu}\right)\Lambda_{22}}, \quad T = \overline{\left(\frac{4K\mu}{K+\mu} + \frac{K-\mu}{K+\mu}\overline{\left(\frac{K-\mu}{K+\mu}\right)}\,\underline{K+\mu}\right)\Lambda_{22}},$$

а Λ_{22} является решением уравнения (3.68):

$$\Lambda_{22}(x_1) = \begin{cases} 2i\,\mathrm{arctg}\left(\dfrac{1}{25}\,\mathrm{tg}(x_1)\right) - 2ix_1, & \text{если } 0 \leqslant x_1 < \dfrac{\pi}{2}, \\ 2i\,\mathrm{arctg}\left(\dfrac{1}{25}\,\mathrm{tg}(x_1)\right) - 2ix_1 + 2\pi i, & \text{если } \dfrac{\pi}{2} \leqslant x_1 < \dfrac{3\pi}{2}, \\ 2i\,\mathrm{arctg}\left(\dfrac{1}{25}\,\mathrm{tg}(x_1)\right) - 2ix_1 + 4\pi i, & \text{если } \dfrac{3\pi}{2} \leqslant x_1 \leqslant 2\pi. \end{cases}$$

Приближённые численные значения: $S \approx 65.6650i$, $T \approx 76.2833i$.

Для точек $\theta^{(j)}$, $j = 1,2,3,4$, удовлетворяющих (3.70), имеем $\widehat{\gamma}_1(\theta^{(j)}) = \widehat{\gamma}_2(\theta^{(j)})$ и $\widehat{N}(\theta^{(j)}) = \widehat{N}_0(\theta^{(j)}) \neq 0$. Применимы теоремы 3.1.7 и 3.1.10, которые подтверждают точность результата предложения 3.5.1.

3.5.4 Тело Хилла

Так в механике называют изотропную среду, когда $\mu(\mathbf{x}) = \mu_0 = \mathrm{const}$ (см., например, [8]). Для этого случая возможна более простая факторизация оператора $\mathcal{W}$; см. [13, глава 5, п. 2.3]. Форму (3.65) можно представить в виде

$$w[\mathbf{u},\mathbf{u}] = \int_{\mathbb{R}^d} \langle g_\wedge(\mathbf{x}) b_\wedge(\mathbf{D})\mathbf{u}, b_\wedge(\mathbf{D})\mathbf{u}\rangle\, d\mathbf{x}, \qquad \mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^d).$$

При этом $m_\wedge = 1 + d(d-1)/2$. Символ оператора $b_\wedge(\mathbf{D})$ — матрица $b_\wedge(\boldsymbol{\xi})$ размера $m_\wedge \times d$ определяется следующим образом. Первая строка есть $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_d)$. Остальные строки соответствуют парам индексов (j,l), $1 \leqslant j < l \leqslant d$. Элемент, стоящий в (j,l)-й строке и j-м столбце, есть ξ_l; элемент, стоящий в (j,l)-й строке и l-м столбце, есть $-\xi_j$; остальные элементы (j,l)-й строки равны нулю. Матрица $g_\wedge(\mathbf{x})$ диагональна и имеет вид

$$g_\wedge(\mathbf{x}) = \mathrm{diag}\{\beta(\mathbf{x}), \mu_0/2, \dots, \mu_0/2\}.$$

Эффективный оператор имеет вид $\mathcal{W}^0 = b_\wedge(\mathbf{D})^* g^0 b_\wedge(\mathbf{D})$, причём эффективная матрица g^0 совпадает с $\underline{g}$ и равна $g^0 = \underline{g} = \mathrm{diag}\{\underline{\beta}, \mu_0/2, \dots, \mu_0/2\}$.

Для задачи (3.66) применима теорема 3.2.1. Обсудим случай, когда $\mathfrak{Q}(\mathbf{x}) = \mathbf{1}_d$. В силу предложения 2.3.1 (пункт в) выполнено $\widehat{N}(\boldsymbol{\theta}) = 0$ при всех $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$. Поэтому применима теорема 3.2.2.

3.6 Применение общих результатов: магнитное уравнение Шрёдингера

3.6.1 Уравнение Шрёдингера с оператором $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon = -\operatorname{div} g^\varepsilon(\mathbf{x})\nabla$

Рассмотрим в $L_2(\mathbb{R}^d)$ оператор $\widehat{\mathcal{A}} = -\operatorname{div} g(\mathbf{x})\nabla$ (см. (3.55)) с периодической матрицей $g(\mathbf{x})$, удовлетворяющей (3.56). Соответствующий эффективный оператор имеет вид (3.57).

Рассмотрим задачу Коши

$$i\frac{\partial v_\varepsilon(\mathbf{x},s)}{\partial s} = \mathbf{D}^* g^\varepsilon(\mathbf{x})\mathbf{D} v_\varepsilon(\mathbf{x},s), \qquad v_\varepsilon(\mathbf{x},0) = \varphi(\mathbf{x}), \tag{3.71}$$

где $\varphi \in L_2(\mathbb{R}^d)$. (Для простоты рассматриваем однородное уравнение.) Пусть v_0 — решение усреднённой задачи

$$i\frac{\partial v_0(\mathbf{x},s)}{\partial s} = \mathbf{D}^* g^0(\mathbf{x})\mathbf{D} v_0(\mathbf{x},s), \qquad v_0(\mathbf{x},0) = \varphi(\mathbf{x}). \tag{3.72}$$

Применяя теорему 3.3.1 в общем случае и теорему 3.3.2 в “вещественном” случае, получаем следующий результат.

Предложение 3.6.1. *Пусть v_ε — решение задачи (3.71) и v_0 — решение усреднённой задачи (3.72).*

а) *Если $\varphi \in H^q(\mathbb{R}^d)$, где $0 \leqslant q \leqslant 3$, то при $s \in \mathbb{R}$ и $0 < \varepsilon \leqslant 1$ справедлива оценка*

$$\|v_\varepsilon(\cdot,s) - v_0(\cdot,s)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{\mathfrak{C}}_3(q)(1+|s|)^{q/3}\varepsilon^{q/3}\|\varphi\|_{H^q(\mathbb{R}^d)}.$$

Если $\varphi \in L_2(\mathbb{R}^d)$, то $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\|v_\varepsilon(\cdot,s) - v_0(\cdot,s)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} = 0$ при $s \in \mathbb{R}$.

б) *Пусть $g(\mathbf{x})$ — симметричная матрица с вещественными элементами. Если $\varphi \in H^q(\mathbb{R}^d)$, где $0 \leqslant q \leqslant 2$, то при $s \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедлива оценка*

$$\|v_\varepsilon(\cdot,s) - v_0(\cdot,s)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{\mathfrak{C}}_7(q)(1+|s|)^{q/4}\varepsilon^{q/2}\|\varphi\|_{H^q(\mathbb{R}^d)}.$$

3.6.2 Магнитное уравнение Шрёдингера с сингулярным электрическим потенциалом

В $L_2(\mathbb{R}^d)$ рассмотрим оператор

$$\mathcal{M}_\varepsilon = (\mathbf{D} - \mathbf{A}^\varepsilon(\mathbf{x}))^* g^\varepsilon(\mathbf{x})(\mathbf{D} - \mathbf{A}^\varepsilon(\mathbf{x})) + \varepsilon^{-1}\mathfrak{v}^\varepsilon(\mathbf{x}) + \mathcal{V}^\varepsilon(\mathbf{x}). \tag{3.73}$$

Здесь $g(\mathbf{x})$ — Γ-периодическая ограниченная и положительно определённая $(d \times d)$-матрица с вещественными элементами, $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \{A_1(\mathbf{x}), \dots, A_d(\mathbf{x})\}^{\mathrm{T}}$, где $A_j(\mathbf{x})$ — Γ-периодические вещественные функции, такие что

$$A_j \in L_\rho(\Omega), \quad \rho = 2 \ \text{при} \ d = 1, \quad \rho > d \ \text{при} \ d \geqslant 2; \quad j = 1, \dots, d. \tag{3.74}$$

Наконец, $\mathfrak{v}(\mathbf{x})$ и $\mathcal{V}(\mathbf{x})$ — Γ-периодические вещественные функции, причём

$$\mathfrak{v}, \mathcal{V} \in L_\varrho(\Omega), \quad \varrho = 1 \ \text{при} \ d = 1, \quad \varrho > \frac{d}{2} \ \text{при} \ d \geqslant 2; \quad \int_\Omega \mathfrak{v}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0. \tag{3.75}$$

Точное определение оператора $\mathcal{M}_\varepsilon$ даётся через квадратичную форму

$$\mathfrak{m}_\varepsilon[u,u] = \int_{\mathbb{R}^d} \big(\langle g^\varepsilon(\mathbf{x})(\mathbf{D} - \mathbf{A}^\varepsilon(\mathbf{x}))u, (\mathbf{D} - \mathbf{A}^\varepsilon(\mathbf{x}))u \rangle \\ + (\varepsilon^{-1}\mathfrak{v}^\varepsilon(\mathbf{x}) + \mathcal{V}^\varepsilon(\mathbf{x}))|u|^2 \big)\, d\mathbf{x}, \quad u \in H^1(\mathbb{R}^d).$$

Оператор (3.73) можно трактовать как оператор Шрёдингера с быстро осциллирующими метрикой g^ε, магнитным потенциалом $\mathbf{A}^\varepsilon$ и электрическим потенциалом $\varepsilon^{-1}\mathfrak{v}^\varepsilon(\mathbf{x}) + \mathcal{V}^\varepsilon(\mathbf{x})$, содержащим “сингулярное” первое слагаемое.

В [31, п. 13.1] показано, что оператор (3.73) можно представить в виде (3.2). Обозначим $g(\mathbf{x})\mathbf{A}(\mathbf{x}) =: \boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}) = \{\eta_1(\mathbf{x}), \dots, \eta_d(\mathbf{x})\}^{\mathrm{T}}$. Тогда первое слагаемое в (3.73) перепишется в виде

$$(\mathbf{D} - \mathbf{A}^\varepsilon)^* g^\varepsilon (\mathbf{D} - \mathbf{A}^\varepsilon) = -\operatorname{div} g^\varepsilon \nabla + i \sum_{j=1}^{d} \left(\eta_j^\varepsilon \partial_j + \partial_j(\eta_j^\varepsilon \,\cdot\,) \right) + \langle g^\varepsilon \mathbf{A}^\varepsilon, \mathbf{A}^\varepsilon \rangle .$$

Пусть Φ — Γ-периодическое решение уравнения $\Delta\Phi(\mathbf{x}) = \mathfrak{v}(\mathbf{x})$, $\int_\Omega \Phi(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0$. Определим функции $\zeta_j = -\partial_j \Phi$, $j = 1, \dots, d$. Тогда $\mathfrak{v} = -\sum_{j=1}^d \partial_j \zeta_j$. Положим

$$a_j = -\eta_j + i\zeta_j, \quad j = 1, \dots, d. \tag{3.76}$$

Можно убедиться (подробнее см. [31, п. 13.1]), что функции (3.76) удовлетворяют (2.13) с подходящим показателем ρ' (зависящим от ρ и ϱ); нормы $\|a_j\|_{L_{\rho'}(\Omega)}$

контролируются через $\|g\|_{L_\infty}$, $\|\mathbf{A}\|_{L_\rho(\Omega)}$, $\|\mathfrak{v}\|_{L_\varrho(\Omega)}$ и параметры решётки Γ. Видно, что

$$\sum_{j=1}^{d}\left(a_j^\varepsilon D_j + D_j (a_j^\varepsilon)^*\right) = i\sum_{j=1}^{d}(\eta_j^\varepsilon \partial_j + \partial_j(\eta_j^\varepsilon\,\cdot)) + \varepsilon^{-1}\mathfrak{v}^\varepsilon.$$

Функция $\mathcal{Q}(\mathbf{x}) := \mathcal{V}(\mathbf{x}) + \langle g(\mathbf{x})\mathbf{A}(\mathbf{x}), \mathbf{A}(\mathbf{x})\rangle$ удовлетворяет условию (2.18) с подходящим показателем $\varrho' = \min\{\varrho, \rho/2\}$. Реализуется пример 2.1.2. За счёт добавления слагаемого $\lambda\mathcal{Q}_0^\varepsilon(\mathbf{x})$ будем считать, что оператор $\mathcal{M}_\varepsilon + \lambda\mathcal{Q}_0^\varepsilon$ положительно определён. Здесь $\mathcal{Q}_0(\mathbf{x})$ — Γ-периодическая положительно определённая и ограниченная функция, а параметр λ подчинён ограничению (2.23) (при $f = 1$). Таким образом, *оператор* $\mathscr{M}_\varepsilon := \mathcal{M}_\varepsilon + \lambda\mathcal{Q}_0^\varepsilon$ *приведён к виду* (3.2):

$$\mathscr{M}_\varepsilon = -\operatorname{div} g^\varepsilon(\mathbf{x})\nabla + \sum_{j=1}^{d}\left(a_j^\varepsilon(\mathbf{x})D_j + D_j a_j^\varepsilon(\mathbf{x})^*\right) + \mathcal{Q}^\varepsilon(\mathbf{x}) + \lambda\mathcal{Q}_0^\varepsilon(\mathbf{x}).$$

Исходные данные (2.90) сейчас сводятся к следующему набору:

$$\begin{aligned}&d, \rho, \varrho; \|g\|_{L_\infty}, \|g^{-1}\|_{L_\infty}, \|\mathbf{A}\|_{L_\rho(\Omega)}, \|\mathfrak{v}\|_{L_\varrho(\Omega)}, \|\mathcal{V}\|_{L_\varrho(\Omega)},\\ &\lambda, \|\mathcal{Q}_0\|_{L_\infty}, \|\mathcal{Q}_0^{-1}\|_{L_\infty}, \quad \text{параметры решётки } \Gamma.\end{aligned}$$

Построим эффективный оператор. Эффективная матрица g^0 описана в п. 3.4.1. Функция $\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x})$, являющаяся Γ-периодическим решением задачи (2.57), представляется в виде $\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x}) = \widetilde{\Lambda}_1(\mathbf{x}) + i\widetilde{\Lambda}_2(\mathbf{x})$, где вещественные Γ-периодические функции $\widetilde{\Lambda}_1(\mathbf{x})$, $\widetilde{\Lambda}_2(\mathbf{x})$ являются решениями задач

$$\begin{aligned}-\operatorname{div} g(\mathbf{x})\nabla\widetilde{\Lambda}_1(\mathbf{x}) + \mathfrak{v}(\mathbf{x}) = 0, &\quad \int_\Omega \widetilde{\Lambda}_1(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = 0,\\ -\operatorname{div} g(\mathbf{x})\nabla\widetilde{\Lambda}_2(\mathbf{x}) + \operatorname{div} g(\mathbf{x})\mathbf{A}(\mathbf{x}) = 0, &\quad \int_\Omega \widetilde{\Lambda}_2(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = 0.\end{aligned}$$

Матрица-столбец V и число W определяются согласно (2.63) и (2.64). Имеем:

$$-\mathbf{D}^* V z - V^*\mathbf{D} z + \sum_{j=1}^{d}(\overline{a_j + a_j^*})D_j z = 2i\left\langle \nabla z, V_1 + \overline{\boldsymbol{\eta}}\right\rangle,$$

где $V_1 = \operatorname{Re} V$. В итоге эффективный оператор $\mathscr{M}^0$ принимает вид

$$\mathscr{M}^0 z = -\operatorname{div} g^0\nabla z + 2i\left\langle \nabla z, V_1 + \overline{\boldsymbol{\eta}}\right\rangle + (\overline{\mathcal{Q}} + \lambda\overline{\mathcal{Q}_0} - W)z,$$

что можно записать в виде

$$\mathscr{M}^0 z = (\mathbf{D} - \mathbf{A}^0)^* g^0 (\mathbf{D} - \mathbf{A}^0) z + \mathcal{V}^0 z, \tag{3.77}$$

$$\mathbf{A}^0 := \left(g^0\right)^{-1}(V_1 + \overline{g\mathbf{A}}), \quad \mathcal{V}^0 := \overline{\mathcal{V}} + \lambda\overline{\mathcal{Q}_0} + \overline{\langle g\mathbf{A}, \mathbf{A}\rangle} - \left\langle g^0\mathbf{A}^0, \mathbf{A}^0\right\rangle - W.$$

Рассмотрим задачу Коши

$$i\frac{\partial z_\varepsilon(\mathbf{x}, s)}{\partial s} = (\mathscr{M}_\varepsilon z_\varepsilon)(\mathbf{x}, s), \qquad z_\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = \varphi(\mathbf{x}), \tag{3.78}$$

где $\varphi \in L_2(\mathbb{R}^d)$, и соответствующую усреднённую задачу

$$i\frac{\partial z_0(\mathbf{x}, s)}{\partial s} = (\mathscr{M}^0 z_0)(\mathbf{x}, s), \qquad z_0(\mathbf{x}, 0) = \varphi(\mathbf{x}). \tag{3.79}$$

Сейчас выполнены условия предложения 2.3.1 (пункт a)). Поэтому применима теорема 3.3.4, которая даёт следующий результат.

Теорема 3.6.2. *Пусть* z_ε *— решение задачи* (3.78) *и пусть* z_0 *— решение задачи* (3.79)*. Если* $\varphi \in H^q(\mathbb{R}^d)$*, где* $0 \leqslant q \leqslant 2$*, то при* $s \in \mathbb{R}$ *и* $\varepsilon > 0$ *выполнена оценка*

$$\|z_\varepsilon(\,\cdot\,, s) - z_0(\,\cdot\,, s)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{\mathfrak{C}}_8(q)(1 + |s|)^{q/2}\varepsilon^{q/2}\|\varphi\|_{H^q(\mathbb{R}^d)}.$$

Если $\varphi \in L_2(\mathbb{R}^d)$*, то* $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\|z_\varepsilon(\,\cdot\,, s) - z_0(\,\cdot\,, s)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} = 0$ *при* $s \in \mathbb{R}$*.*

3.6.3 Магнитное уравнение Шрёдингера с сильно сингулярным электрическим потенциалом

В пространстве $L_2(\mathbb{R}^d)$ рассмотрим оператор $\widetilde{\mathcal{A}} = \mathbf{D}^*\breve{g}(\mathbf{x})\mathbf{D} + \breve{\mathfrak{v}}(\mathbf{x})$, где $\breve{g}(\mathbf{x})$ — Γ-периодическая симметричная $(d \times d)$-матрица-функция с вещественными элементами, ограниченная и положительно определённая, а $\breve{\mathfrak{v}}(\mathbf{x})$ — вещественная Γ-периодическая функция такая, что

$$\breve{\mathfrak{v}} \in L_\varrho(\Omega), \qquad \varrho = 1 \text{ при } d = 1, \quad \varrho > \frac{d}{2} \text{ при } d \geqslant 2.$$

Строгое определение оператора $\widetilde{\mathcal{A}}$ даётся через квадратичную форму

$$\widetilde{\mathfrak{a}}[u, u] = \int_{\mathbb{R}^d}\left(\langle\breve{g}(\mathbf{x})\mathbf{D}u, \mathbf{D}u\rangle + \breve{\mathfrak{v}}(\mathbf{x})|u|^2\right)\,d\mathbf{x}, \quad u \in H^1(\mathbb{R}^d). \tag{3.80}$$

За счёт добавления к $\breve{\mathfrak{v}}$ постоянной будем считать, что краем спектра оператора $\widetilde{\mathcal{A}}$ является точка $\lambda_0 = 0$. При этом условии оператор $\widetilde{\mathcal{A}}$ допускает удобную факторизацию (см., например, [13, гл. 6, п. 1.1]). Для описания этой факторизации рассмотрим уравнение

$$\mathbf{D}^*\check{g}(\mathbf{x})\mathbf{D}\omega(\mathbf{x}) + \check{\mathfrak{v}}(\mathbf{x})\omega(\mathbf{x}) = 0.$$

Существует Γ-периодическое решение $\omega \in \widetilde{H}^1(\Omega)$ этого уравнения, определённое с точностью до постоянного множителя. Этот множитель можно фиксировать так, чтобы $\omega(\mathbf{x}) > 0$ и

$$\int_\Omega \omega^2(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = |\Omega|. \tag{3.81}$$

Оказывается, что решение $\omega(\mathbf{x})$ положительно определено и ограничено, а нормы $\|\omega\|_{L_\infty}$, $\|\omega^{-1}\|_{L_\infty}$ контролируются через $\|\check{g}\|_{L_\infty}$, $\|\check{g}^{-1}\|_{L_\infty}$ и $\|\check{\mathfrak{v}}\|_{L_\varrho(\Omega)}$. Функция ω является мультипликатором как в $H^1(\mathbb{R}^d)$, так и в $\widetilde{H}^1(\Omega)$. Подстановка $u = \omega\varphi$ преобразует форму (3.80) к виду

$$\widetilde{\mathfrak{a}}[u,u] = \int_{\mathbb{R}^d} \omega^2(\mathbf{x})\left\langle \check{g}(\mathbf{x})\mathbf{D}\varphi, \mathbf{D}\varphi\right\rangle\,d\mathbf{x}, \qquad u = \omega\varphi,\ \varphi \in H^1(\mathbb{R}^d).$$

Это означает, что справедлива факторизация

$$\widetilde{\mathcal{A}} = \omega^{-1}\mathbf{D}^* g\mathbf{D}\omega^{-1}, \qquad g = \omega^2\check{g}. \tag{3.82}$$

Рассмотрим теперь оператор

$$\widetilde{\mathcal{A}}_\varepsilon = (\omega^\varepsilon)^{-1}\mathbf{D}^* g^\varepsilon \mathbf{D}(\omega^\varepsilon)^{-1}. \tag{3.83}$$

В исходных терминах это выражение запишется в виде

$$\widetilde{\mathcal{A}}_\varepsilon = \mathbf{D}^*\check{g}^\varepsilon\mathbf{D} + \varepsilon^{-2}\check{\mathfrak{v}}^\varepsilon, \tag{3.84}$$

что можно толковать как оператор Шрёдингера с быстро осциллирующими метрикой $\check{g}^\varepsilon$ и сильно сингулярным потенциалом $\varepsilon^{-2}\check{\mathfrak{v}}^\varepsilon$.

Далее, пусть $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \{A_1(\mathbf{x}), \dots, A_d(\mathbf{x})\}^{\mathrm{T}}$, где $A_j(\mathbf{x})$ — вещественные Γ-периодические функции, удовлетворяющие условию (3.74). Пусть $\widetilde{\mathfrak{v}}(\mathbf{x})$ и $\widetilde{\mathcal{V}}(\mathbf{x})$ — Γ-периодические вещественные функции, такие что

$$\begin{gathered} \widetilde{\mathfrak{v}}, \widetilde{\mathcal{V}} \in L_\varrho(\Omega), \quad \varrho = 1 \text{ при } d = 1, \quad \varrho > \frac{d}{2} \text{ при } d \geqslant 2; \\ \int_\Omega \omega^2(\mathbf{x})\widetilde{\mathfrak{v}}(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = 0. \end{gathered} \tag{3.85}$$

Рассмотрим оператор $\widetilde{\mathcal{M}}_\varepsilon$, формально заданный выражением

$$\widetilde{\mathcal{M}}_\varepsilon = (\mathbf{D} - \mathbf{A}^\varepsilon(\mathbf{x}))^* \check{g}^\varepsilon(\mathbf{x})(\mathbf{D} - \mathbf{A}^\varepsilon(\mathbf{x})) + \varepsilon^{-2}\check{\mathfrak{v}}^\varepsilon(\mathbf{x}) + \varepsilon^{-1}\widetilde{\mathfrak{v}}^\varepsilon(\mathbf{x}) + \widetilde{\mathcal{V}}^\varepsilon(\mathbf{x}). \quad (3.86)$$

(Строгое определение даётся через квадратичную форму.) Оператор (3.86) можно трактовать как оператор Шрёдингера с метрикой $\check{g}^\varepsilon$, магнитным потенциалом $\mathbf{A}^\varepsilon$ и электрическим потенциалом $\varepsilon^{-2}\check{\mathfrak{v}}^\varepsilon + \varepsilon^{-1}\widetilde{\mathfrak{v}}^\varepsilon + \widetilde{\mathcal{V}}^\varepsilon$, включающим сингулярные слагаемые $\varepsilon^{-2}\check{\mathfrak{v}}^\varepsilon$ и $\varepsilon^{-1}\widetilde{\mathfrak{v}}^\varepsilon$. За счёт добавления подходящей константы λ всегда можно считать, что оператор $\widetilde{\mathscr{M}}_\varepsilon := \widetilde{\mathcal{M}}_\varepsilon + \lambda$ положительно определён. Положим

$$\mathfrak{v}(\mathbf{x}) := \widetilde{\mathfrak{v}}(\mathbf{x})\omega^2(\mathbf{x}), \quad \mathcal{V}(\mathbf{x}) := \widetilde{\mathcal{V}}(\mathbf{x})\omega^2(\mathbf{x}), \quad \mathcal{Q}_0(\mathbf{x}) := \omega^2(\mathbf{x}). \quad (3.87)$$

Учитывая (3.83), (3.84), убеждаемся в справедливости тождества

$$\widetilde{\mathscr{M}}_\varepsilon = (\omega^\varepsilon)^{-1}\mathscr{M}_\varepsilon(\omega^\varepsilon)^{-1},$$

где оператор $\mathscr{M}_\varepsilon$ описан в предыдущем пункте, причём для него g определено в (3.82), а $\mathfrak{v}$, $\mathcal{V}$ и $\mathcal{Q}_0$ — в (3.87). В силу (3.85) коэффициенты $\mathfrak{v}$ и $\mathcal{V}$ удовлетворяют требуемым условиям (3.75).

Воспользуемся результатами п. 3.3.2. Сейчас $f = \omega^{-1}$. Функция $\mathfrak{Q} = (ff^*)^{-1}$ равна $\mathfrak{Q}(\mathbf{x}) = \omega^2(\mathbf{x})$. В силу условия (3.81) имеем $\overline{\mathfrak{Q}} = 1$ и $f_0 = (\overline{\mathfrak{Q}})^{-1/2} = 1$. Исходные данные (2.90) сейчас сводятся к следующему набору:

$$d, \rho, \varrho; \|\check{g}\|_{L_\infty}, \|\check{g}^{-1}\|_{L_\infty}, \|\mathbf{A}\|_{L_\rho(\Omega)}, \|\check{\mathfrak{v}}\|_{L_\varrho(\Omega)}, \|\widetilde{\mathfrak{v}}\|_{L_\varrho(\Omega)}, \|\widetilde{\mathcal{V}}\|_{L_\varrho(\Omega)},$$
$$\lambda, \quad \text{параметры решётки } \Gamma.$$

Рассмотрим задачу Коши с оператором $\widetilde{\mathscr{M}}_\varepsilon$:

$$\begin{cases} i\dfrac{\partial z_\varepsilon(\mathbf{x}, s)}{\partial s} = (\widetilde{\mathscr{M}}_\varepsilon z_\varepsilon)(\mathbf{x}, s) + \omega^\varepsilon(\mathbf{x})F(\mathbf{x}, s), \\ (\omega^\varepsilon(\mathbf{x}))^{-1}z_\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = \varphi(\mathbf{x}), \end{cases} \quad (3.88)$$

где $\varphi \in L_2(\mathbb{R}^d)$, $F \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; L_2(\mathbb{R}^d))$, и соответствующую усреднённую задачу

$$\begin{cases} i\dfrac{\partial z_0(\mathbf{x}, s)}{\partial s} = (\mathscr{M}^0 z_0)(\mathbf{x}, s) + F(\mathbf{x}, s), \\ z_0(\mathbf{x}, 0) = \varphi(\mathbf{x}). \end{cases} \quad (3.89)$$

Здесь $\mathscr{M}^0$ – эффективный оператор (3.77) для оператора $\mathscr{M}$ с коэффициентами (3.82), (3.87). Сейчас выполнены условия предложения 2.3.1 (пункт а). Поэтому применимы теоремы 3.3.2, 3.3.4, которые дают следующий результат.

Теорема 3.6.3. *Пусть* z_ε *— решение задачи* (3.88) *и пусть* z_0 *— решение задачи* (3.89).

а) *Если* $\varphi \in H^q(\mathbb{R}^d)$, $F \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; H^q(\mathbb{R}^d))$, *где* $0 \leqslant q \leqslant 2$, *то при* $s \in \mathbb{R}$ *и* $\varepsilon > 0$ *выполнена оценка*

$$\begin{aligned}\big\|(\omega^\varepsilon)^{-1} z_\varepsilon(\,\cdot\,, s) - z_0(\,\cdot\,, s)\big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\ \leqslant \mathfrak{C}_8(q)(1+|s|)^{q/2}\varepsilon^{q/2}\big(\|\varphi\|_{H^q(\mathbb{R}^d)} + \|F\|_{L_1((0,s);H^q(\mathbb{R}^d))}\big).\end{aligned}$$

Если $\varphi \in L_2(\mathbb{R}^d)$ *и* $F \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; L_2(\mathbb{R}^d))$, *то*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\big\|(\omega^\varepsilon)^{-1} z_\varepsilon(\,\cdot\,, s) - z_0(\,\cdot\,, s)\big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} = 0, \quad s \in \mathbb{R}.$$

б) (*Немагнитное уравнение Шрёдингера с сильно сингулярным электрическим потенциалом.*) *Пусть* $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ *и* $\widetilde{\mathfrak{v}} = \widetilde{\mathcal{V}} = 0$. *Если* $\varphi \in H^q(\mathbb{R}^d)$, $F \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; H^q(\mathbb{R}^d))$, *где* $0 \leqslant q \leqslant 2$, *то при* $s \in \mathbb{R}$ *и* $\varepsilon > 0$ *выполнена оценка*

$$\begin{aligned}\big\|(\omega^\varepsilon)^{-1} z_\varepsilon(\,\cdot\,, s) - z_0(\,\cdot\,, s)\big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\ \leqslant \mathfrak{C}_7(q)(1+|s|)^{q/4}\varepsilon^{q/2}\big(\|\varphi\|_{H^q(\mathbb{R}^d)} + \|F\|_{L_1((0,s);H^q(\mathbb{R}^d))}\big).\end{aligned}$$

3.7 Применение общих результатов: двумерное волновое уравнение Паули

3.7.1 Оператор $\mathcal{P}$

Пусть $d = 2$ и пусть магнитный потенциал задан вектор-функцией $\check{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) = \{\check{A}_1(\mathbf{x}), \check{A}_2(\mathbf{x})\}^{\mathrm{T}}$, где $\check{A}_j(\mathbf{x})$ — Γ-периодические вещественные функции в $\mathbb{R}^2$, причём

$$\check{A}_j \in L_\rho(\Omega), \quad \rho > 2, \quad j = 1, 2. \tag{3.90}$$

Напомним стандартные обозначения для матриц Паули:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

В пространстве $L_2(\mathbb{R}^2;\mathbb{C}^2)$ рассмотрим оператор Дирака $\mathcal{D} = (D_1 - \check{A}_1)\sigma_1 + (D_2 - \check{A}_2)\sigma_2$, $\operatorname{Dom}\mathcal{D} = H^1(\mathbb{R}^2;\mathbb{C}^2)$. По определению оператор Паули $\mathcal{P}$ есть квадрат оператора $\mathcal{D}$:

$$\mathcal{P} = \mathcal{D}^2 = \begin{pmatrix} P_- & 0 \\ 0 & P_+ \end{pmatrix}. \tag{3.91}$$

Точное определение оператора $\mathcal{P}$ даётся через замкнутую квадратичную форму $\|\mathcal{D}\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^2)}$, $\mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^2;\mathbb{C}^2)$. Если потенциал $\check{\mathbf{A}}(\mathbf{x})$ — липшицева функция, то блоки оператора (3.91) задаются выражениями

$$P_\pm = (\mathbf{D} - \check{\mathbf{A}}(\mathbf{x}))^2 \pm \check{B}(\mathbf{x}), \quad \check{B}(\mathbf{x}) := \partial_1\check{A}_2(\mathbf{x}) - \partial_2\check{A}_1(\mathbf{x}).$$

Здесь $\check{B}(\mathbf{x})$ имеет смысл напряжённости магнитного поля.

Оператор $\mathcal{P}$ допускает удобную факторизацию. За счёт калибровочного преобразования можно подчинить потенциал $\check{\mathbf{A}}(\mathbf{x})$ условиям

$$\operatorname{div}\check{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) = 0, \quad \int_\Omega \check{\mathbf{A}}(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = 0, \tag{3.92}$$

не нарушая (3.90). (Первое равенство в (3.92) понимается в смысле распределений.) Тогда существует Γ-периодическая вещественная функция φ, такая, что $\nabla\varphi(\mathbf{x}) = \{\check{A}_2(\mathbf{x}), -\check{A}_1(\mathbf{x})\}^{\mathrm{T}}$ и $\overline{\varphi} = 0$. Отметим, что $\varphi \in \widetilde{W}^1_\rho(\Omega) \subset C^\sigma$, $\sigma = 1 - 2/\rho$. Положим $\omega_\pm(\mathbf{x}) := e^{\pm\varphi(\mathbf{x})}$. Тогда оператор (3.91) может быть записан в виде: $\mathcal{P} = f_\times(\mathbf{x})b_\times(\mathbf{D})g_\times(\mathbf{x})b_\times(\mathbf{D})f_\times(\mathbf{x})$, где $\partial_\pm := D_1 \pm iD_2$,

$$b_\times(\mathbf{D}) = \begin{pmatrix} 0 & \partial_- \\ \partial_+ & 0 \end{pmatrix}, \quad f_\times(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \omega_+(\mathbf{x}) & 0 \\ 0 & \omega_-(\mathbf{x}) \end{pmatrix}, \quad g_\times(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \omega_+^2(\mathbf{x}) & 0 \\ 0 & \omega_-^2(\mathbf{x}) \end{pmatrix}.$$

Блоки $P_\pm$ оператора (3.91) могут быть записаны в виде

$$P_+ = \omega_-\partial_+\omega_+^2\partial_-\omega_-, \quad P_+ = \omega_+\partial_-\omega_-^2\partial_+\omega_+.$$

3.7.2 Оператор $\widehat{\mathcal{B}}_{\times,\varepsilon}$

Пусть заданы $\eta_{j,\times}(\mathbf{x})$, $j = 1{,}2$, $v_\times(\mathbf{x})$, $\mathcal{Q}_\times(\mathbf{x})$ — Γ-периодические эрмитовы (2×2)-матричнозначные функции в $\mathbb{R}^2$ такие, что

$$\eta_{j,\times} \in L_\rho(\Omega), \quad \rho > 2,\ j = 1{,}2; \quad v_\times, \mathcal{Q}_\times \in L_\varrho(\Omega), \quad \varrho > 1; \quad \int_\Omega v_\times(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = 0.$$

Рассмотрим оператор $\widehat{\mathcal{B}}_{\times,\varepsilon}$, формально заданный выражением

$$\begin{aligned}\widehat{\mathcal{B}}_{\times,\varepsilon} &= b_\times(\mathbf{D})g^\varepsilon_\times(\mathbf{x})b_\times(\mathbf{D}) \\ &+ i\sum_{j=1}^{2}\left(\eta^\varepsilon_{j,\times}(\mathbf{x})\partial_j + \partial_j(\eta^\varepsilon_{j,\times}(\mathbf{x})\,\cdot\,)\right) + \varepsilon^{-1}v^\varepsilon_\times(\mathbf{x}) + \mathcal{Q}^\varepsilon_\times(\mathbf{x}).\end{aligned} \tag{3.93}$$

Чтобы записать оператор (3.93) в требуемом виде, введём $\Phi_\times$ — Γ-периодическое решение уравнения $\Delta\Phi_\times(\mathbf{x}) = v_\times(\mathbf{x})$, $\int_\Omega \Phi_\times(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = 0$, и положим $\zeta_{j,\times} = -\partial_j\Phi_\times$. Тогда $v_\times = -\sum_{j=1}^{2}\partial_j\zeta_{j,\times}$. Положим $a_{j,\times} = -\eta_{j,\times} + i\zeta_{j,\times}$. Легко проверить, что $a_{j,\times} \in L_{\rho'}(\Omega)$ при некотором $\rho' > 2$ (зависящим от ρ и ϱ), причём $\|a_{j,\times}\|_{L_{\rho'}(\Omega)}$ контролируется через $\|\eta_{j,\times}\|_{L_\rho(\Omega)}$, $\|v_\times\|_{L_\varrho(\Omega)}$ и параметры решётки Γ; подробнее см. [31, п. 14.2]. За счёт добавления слагаемого $\lambda\mathcal{Q}^\varepsilon_{0,\times}(\mathbf{x})$ будем считать, что оператор $\widehat{\mathcal{B}}_{\times,\varepsilon} + \lambda\mathcal{Q}^\varepsilon_{0,\times}$ положительно определён. Здесь $\mathcal{Q}_{0,\times}(\mathbf{x})$ — Γ-периодическая положительно определённая и ограниченная (2×2)-матричнозначная функция, а параметр λ подчинён ограничению (2.23) (при $f = \mathbf{1}_2$). Таким образом, оператор $\widehat{\mathscr{B}}_{\times,\varepsilon} := \widehat{\mathcal{B}}_{\times,\varepsilon} + \lambda\mathcal{Q}^\varepsilon_{0,\times}$ можно записать в виде

$$\widehat{\mathscr{B}}_{\times,\varepsilon} = b_\times(\mathbf{D})g^\varepsilon_\times(\mathbf{x})b_\times(\mathbf{D}) + \sum_{j=1}^{d}\left(a^\varepsilon_{j,\times}(\mathbf{x})D_j + D_j(a^\varepsilon_{j,\times}(\mathbf{x}))^*\right) + \mathcal{Q}^\varepsilon_\times(\mathbf{x}) + \lambda\mathcal{Q}^\varepsilon_{0,\times}(\mathbf{x}).$$

Опишем эффективные характеристики согласно пункту 2.2.1. Уравнение (2.56) сейчас имеет вид

$$b_\times(\mathbf{D})g_\times(\mathbf{x})(b_\times(\mathbf{D})\Lambda_\times(\mathbf{x}) + \mathbf{1}_2) = 0, \qquad \int_\Omega \Lambda_\times(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = 0.$$

Его решение $\Lambda_\times(\mathbf{x})$ можно представить в виде

$$\Lambda_\times(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & \Lambda_-(\mathbf{x}) \\ \Lambda_+(\mathbf{x}) & 0 \end{pmatrix},$$

где $\Lambda_\pm(\mathbf{x})$ являются Γ-периодическими решениями задач

$$\partial_\pm\omega^2_\pm(\mathbf{x})(\partial_\mp\Lambda_\pm(\mathbf{x}) + 1) = 0, \qquad \int_\Omega \Lambda_\pm(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = 0.$$

Поскольку $m = n$, эффективная матрица равна

$$g^0_\times = \underline{g_\times} = \begin{pmatrix} g^0_+ & 0 \\ 0 & g^0_- \end{pmatrix}, \qquad g^0_\pm = \underline{\omega^2_\pm}.$$

В качестве $\widetilde{\Lambda}$ выступает Γ-периодическое решение $\widetilde{\Lambda}_\times$ задачи

$$b_\times(\mathbf{D})g_\times(\mathbf{x})b_\times(\mathbf{D})\widetilde{\Lambda}_\times(\mathbf{x}) + v_\times(\mathbf{x}) + i\sum_{j=1}^{2}\partial_j \eta_{j,\times}(\mathbf{x}) = 0, \quad \int_\Omega \widetilde{\Lambda}_\times(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = 0.$$

Матрицы (2.63) и (2.64) сейчас реализуются в виде

$$V_\times := |\Omega|^{-1}\int_\Omega (b_\times(\mathbf{D})\Lambda_\times(\mathbf{x}))^* g_\times(\mathbf{x})(b_\times(\mathbf{D})\widetilde{\Lambda}_\times(\mathbf{x}))\,d\mathbf{x},$$
$$W_\times := |\Omega|^{-1}\int_\Omega (b_\times(\mathbf{D})\widetilde{\Lambda}_\times(\mathbf{x}))^* g_\times(\mathbf{x})(b_\times(\mathbf{D})\widetilde{\Lambda}_\times(\mathbf{x}))\,d\mathbf{x}.$$

Вычисление эффективного оператора по общему правилу даёт

$$\widehat{\mathscr{B}}^0_\times = -g^0_\times \Delta + 2i(\eta^0_{1,\times}\partial_1 + \eta^0_{2,\times}\partial_2) + \overline{\mathcal{Q}_\times} - W_\times + \lambda\overline{\mathcal{Q}_{0,\times}},$$

где $2\eta^0_{1,\times} = 2\overline{\eta_{1,\times}} + \sigma_1 V_\times + V^*_\times\sigma_1$, $2\eta^0_{2,\times} = 2\overline{\eta_{2,\times}} + \sigma_2 V_\times + V^*_\times\sigma_2$.

3.7.3 Оператор $\mathcal{B}_{\times,\varepsilon}$

Рассмотрим оператор $\mathcal{B}_{\times,\varepsilon}$, формально заданный выражением

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_{\times,\varepsilon} &= f^\varepsilon_\times(\mathbf{x})b_\times(\mathbf{D})g^\varepsilon_\times(\mathbf{x})b_\times(\mathbf{D})f^\varepsilon_\times(\mathbf{x})\\ &\quad + i\sum_{j=1}^{2}\left(\check{\eta}^\varepsilon_{j,\times}(\mathbf{x})\partial_j + \partial_j(\check{\eta}^\varepsilon_{j,\times}(\mathbf{x})\,\cdot\,)\right) + \varepsilon^{-1}\check{v}^\varepsilon_\times(\mathbf{x}) + \check{\mathcal{Q}}^\varepsilon_\times(\mathbf{x}).\end{aligned} \tag{3.94}$$

(Строгое определение даётся через квадратичную форму.) Здесь $\check{\eta}_{j,\times}(\mathbf{x})$, $j = 1{,}2$, — Γ-периодические *диагональные* (2×2)-матрицы-функции с вещественными элементами такие, что $\check{\eta}_{j,\times} \in L_\rho(\Omega)$, $\rho > 2$; $\check{v}_\times(\mathbf{x})$ и $\check{\mathcal{Q}}_\times(\mathbf{x})$ — Γ-периодические эрмитовы (2×2)-матрицы-функции, причём

$$\check{v}_\times, \check{\mathcal{Q}}_\times \in L_\varrho(\Omega),\ \varrho > 1, \qquad \int_\Omega f_\times(\mathbf{x})^{-1}\check{v}_\times(\mathbf{x})f_\times(\mathbf{x})^{-1}d\mathbf{x} = 0.$$

Замечание 3.7.1. *Считая потенциалы* $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ *и* $\check{\mathbf{A}}(\mathbf{x})$ *липшицевыми функциями, рассмотрим оператор*

$$\begin{aligned}\mathfrak{B}_\varepsilon &= \begin{pmatrix}\mathfrak{B}_{-,\varepsilon} & 0\\ 0 & \mathfrak{B}_{+,\varepsilon}\end{pmatrix},\\ \mathfrak{B}_{\pm,\varepsilon} &= (\mathbf{D} - \varepsilon^{-1}\check{\mathbf{A}}^\varepsilon(\mathbf{x}) - \mathbf{A}^\varepsilon(\mathbf{x}))^2 \pm (\varepsilon^{-2}\check{B}^\varepsilon(\mathbf{x}) + \varepsilon^{-1}B^\varepsilon(\mathbf{x})),\end{aligned} \tag{3.95}$$

где $B(\mathbf{x}) = \partial_1 A_2(\mathbf{x}) - \partial_2 A_1(\mathbf{x})$. *Оператор* (3.95) *— это матричный оператор Паули с магнитным потенциалом* $\varepsilon^{-1}\check{\mathbf{A}}^{\varepsilon} + \mathbf{A}^{\varepsilon}$ (*содержащим сингулярное слагаемое*). *Пусть* $\widetilde{v}_{\times}(\mathbf{x})$ *и* $\mathcal{V}_{\times}(\mathbf{x})$ — Γ*-периодические эрмитовы* (2×2)*-матрицы-функции, причём* $\widetilde{v}_{\times}, \mathcal{V}_{\times} \in L_{\varrho}(\Omega)$, $\varrho > 1$. *Рассмотрим возмущённый электрическим потенциалом* $\varepsilon^{-1}\widetilde{v}^{\varepsilon}_{\times} + \mathcal{V}^{\varepsilon}_{\times}$ (*также содержащим сингулярное слагаемое*) *оператор Паули*

$$\widetilde{\mathcal{B}}_{\times,\varepsilon} = \mathfrak{B}_{\varepsilon} + \varepsilon^{-1}\widetilde{v}^{\varepsilon}_{\times}(\mathbf{x}) + \mathcal{V}^{\varepsilon}_{\times}(\mathbf{x}). \tag{3.96}$$

Дополнительно наложим условие нормировки на $\widetilde{v}_{\times}$:

$$\int_{\Omega} f_{\times}(\mathbf{x})^{-1}\left(\widetilde{v}_{\times}(\mathbf{x}) + 2\left\langle \check{\mathbf{A}}(\mathbf{x}), \mathbf{A}(\mathbf{x})\right\rangle \mathbf{1}_2 - B(\mathbf{x})\sigma_3\right) f_{\times}(\mathbf{x})^{-1} d\mathbf{x} = 0.$$

Тогда оператор (3.96) *может быть записан в виде* (3.94) *при*

$$\check{\eta}_{j,\times} = A_j \mathbf{1}_2,\ j = 1{,}2; \quad \check{v}_{\times} = \widetilde{v}_{\times} + 2\left\langle \check{\mathbf{A}}, \mathbf{A}\right\rangle \mathbf{1}_2 - B\sigma_3, \quad \check{\mathcal{Q}}_{\times} = \mathcal{V}_{\times} + |\mathbf{A}|^2 \mathbf{1}_2.$$

За счёт добавления подходящего слагаемого $\lambda\mathbf{1}_2$ всегда можно считать, что оператор $\mathscr{B}_{\times,\varepsilon} := \mathcal{B}_{\times,\varepsilon} + \lambda\mathbf{1}_2$ положительно определён.

Справедливо тождество $\mathscr{B}_{\times,\varepsilon} = f^{\varepsilon}_{\times}\widehat{\mathscr{B}}_{\times,\varepsilon} f^{\varepsilon}_{\times}$, где коэффициенты оператора $\widehat{\mathscr{B}}_{\times,\varepsilon}$ выбраны следующим образом:

$$\eta_{j,\times} = f_{\times}^{-1}\check{\eta}_{j,\times} f_{\times}^{-1},\ j = 1{,}2; \quad v_{\times} = f_{\times}^{-1}\check{v}_{\times} f_{\times}^{-1}, \quad \mathcal{Q}_{\times} = f_{\times}^{-1}\check{\mathcal{Q}}_{\times} f_{\times}^{-1};$$
$$\mathcal{Q}_{0,\times} = f_{\times}^{-2}.$$

Роль $\mathfrak{Q}$ играет матрица $\mathfrak{Q}_{\times} = f_{\times}^{-2} = g_{\times}^{-1}$. Тогда

$$\overline{\mathfrak{Q}}_{\times} = \begin{pmatrix} (g^0_+)^{-1} & 0 \\ 0 & (g^0_-)^{-1} \end{pmatrix}.$$

Матрица f_0 сейчас равна $f_{\times,0} = \begin{pmatrix} (g^0_+)^{1/2} & 0 \\ 0 & (g^0_-)^{1/2} \end{pmatrix}$, а оператор (3.6) имеет вид $\mathscr{B}^0_{\times} = f_{\times,0}\widehat{\mathscr{B}}^0_{\times} f_{\times,0}$.

3.7.4 Задача Коши для оператора $\mathscr{B}_{\times,\varepsilon}$

Рассмотрим задачу Коши для волнового уравнения Паули

$$i\frac{\partial \mathbf{z}_{\varepsilon}(\mathbf{x}, s)}{\partial s} = (\mathscr{B}_{\times,\varepsilon}\mathbf{z}_{\varepsilon})(\mathbf{x}, s), \qquad f^{\varepsilon}_{\times}(\mathbf{x})\mathbf{z}_{\varepsilon}(\mathbf{x}, 0) = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}), \tag{3.97}$$

где $\boldsymbol{\varphi} \in L_2(\mathbb{R}^2;\mathbb{C}^2)$, и соответствующую усреднённую задачу

$$i\frac{\partial \mathbf{z}_0(\mathbf{x},s)}{\partial s} = (\mathscr{B}^0_\times \mathbf{z}_0)(\mathbf{x},s), \qquad f_{\times,0}\mathbf{z}_0(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}). \tag{3.98}$$

Применима теорема 3.3.3. Исходные данные (2.90) сейчас сводятся к следующему набору:

$$\rho,\,\varrho;\ \|\omega_+\|_{L_\infty},\ \|\omega_-\|_{L_\infty},\ \|\check{\eta}_{j,\times}\|_{L_\rho(\Omega)},\ j=1,2;$$
$$\|\check{v}_\times\|_{L_\varrho(\Omega)},\ \|\check{\mathcal{Q}}_\times\|_{L_\varrho(\Omega)},\ \lambda,\ \text{параметры решётки}\ \Gamma.$$

Мы приходим к следующему утверждению.

Теорема 3.7.2. *Пусть $\mathbf{z}_\varepsilon$ — решение задачи (3.97) и пусть $\mathbf{z}_0$ — решение задачи (3.98). Если $\boldsymbol{\varphi} \in H^q(\mathbb{R}^2)$, где $0 \leqslant q \leqslant 3$, то при $s \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ выполнена оценка*

$$\|f^\varepsilon_\times \mathbf{z}_\varepsilon(\,\cdot\,,s) - f_{\times,0}\mathbf{z}_0(\,\cdot\,,s)\|_{L_2(\mathbb{R}^2)} \leqslant \mathfrak{C}_4(q)(1+|s|)^{q/3}\varepsilon^{q/3}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{H^q(\mathbb{R}^2)}.$$

Если $\boldsymbol{\varphi} \in L_2(\mathbb{R}^2)$, то $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\|f^\varepsilon_\times \mathbf{z}_\varepsilon(\,\cdot\,,s) - f_{\times,0}\mathbf{z}_0(\,\cdot\,,s)\|_{L_2(\mathbb{R}^2)} = 0$ при $s \in \mathbb{R}$.

Результат теоремы 3.7.2 в общем случае является точным. Покажем это. Для этого рассмотрим оператор $\mathcal{P}_{1,1}(\boldsymbol{\theta})^*\widehat{N}_{\mathfrak{Q},\times}(\boldsymbol{\theta})\mathcal{P}_{1,1}(\boldsymbol{\theta})$. Здесь оператор $\widehat{N}_{\mathfrak{Q},\times}(\boldsymbol{\theta})$ играет роль $\widehat{N}_{\mathfrak{Q}}(\boldsymbol{\theta})$ для $\mathscr{B}_\times$ (см. п. 2.3.3). Используя формулы

$$\mathcal{P}_{1,1}(\boldsymbol{\theta}) = f_\times P_{1,1}(\boldsymbol{\theta}) f_\times^{-1}\widehat{P} \quad \text{и} \quad \widehat{N}_{\mathfrak{Q},\times}(\boldsymbol{\theta}) = \widehat{P} f_\times^{-1} N_\times(\boldsymbol{\theta}) f_\times^{-1}\widehat{P}$$

(см. (1.313) и (1.262)), получаем:

$$\mathcal{P}_{1,1}(\boldsymbol{\theta})^*\widehat{N}_{\mathfrak{Q},\times}(\boldsymbol{\theta})\mathcal{P}_{1,1}(\boldsymbol{\theta}) = \widehat{P} f_\times^{-1} P_{1,1}(\boldsymbol{\theta}) N_\times(\boldsymbol{\theta}) P_{1,1}(\boldsymbol{\theta}) f_\times^{-1}\widehat{P}.$$

Как показано в [15, п. 12.4] (см. также [57, пп. 16.2 и 16.3]), оператор $N_\times(\boldsymbol{\theta})$, играющий роль $N(\boldsymbol{\theta})$ для $\mathscr{B}_\times$, имеет вид $N_\times(\boldsymbol{\theta}) = \mu(\boldsymbol{\theta}) I|_{\mathfrak{N}}$. Здесь

$$\mu(\boldsymbol{\theta}) = -2g^0_-\gamma\left(\theta_1 \operatorname{Re}\overline{\omega_+^2 w} + \theta_2 \operatorname{Im}\overline{\omega_+^2 w}\right), \qquad \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^1,$$
$$\gamma = g^0_+ g^0_- = |\Omega|^2 \|\omega_+\|^{-2}_{L_2(\Omega)} \|\omega_-\|^{-2}_{L_2(\Omega)},$$

а $w(\mathbf{x})$ — Γ-периодическое решение уравнения

$$(D_1 - iD_2) w(\mathbf{x}) = g^0_+ \omega_-^2(\mathbf{x}) - 1, \qquad \int_\Omega w(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0.$$

Поэтому $\mathcal{P}_{1,1}(\boldsymbol{\theta})^*\widehat{N}_{\mathfrak{Q},\times}(\boldsymbol{\theta})\mathcal{P}_{1,1}(\boldsymbol{\theta}) = \mu(\boldsymbol{\theta})\widehat{P} f_\times^{-1} P_{1,1}(\boldsymbol{\theta}) f_\times^{-1}\widehat{P}$. Ясно, что $P_{1,1}(\boldsymbol{\theta}) f_\times^{-1}\widehat{P} \neq 0$ при любом $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^1$, а потому $\widehat{P} f_\times^{-1} P_{1,1}(\boldsymbol{\theta}) f_\times^{-1}\widehat{P} \neq 0$ при любом $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^1$. В [57, пример 16.2] приведён пример, в котором $\mu(\boldsymbol{\theta}) \neq 0$.

Пример 3.7.3 ([57]). Пусть $\Gamma = (2\pi\mathbb{Z})^2$ и

$$\omega_-^2(\mathbf{x}) = 1 + \alpha(\sin x_2 + 4\sin 2x_2),$$

где $\alpha > 0$ достаточно мало. Тогда $\mu(\boldsymbol{\theta}) \neq 0$ при $\theta_1 \neq 0$.

Таким образом, в данном примере $\mathcal{P}_{1,1}(\boldsymbol{\theta})^* \widehat{N}_{\mathfrak{Q},\times}(\boldsymbol{\theta})\mathcal{P}_{1,1}(\boldsymbol{\theta}) \neq 0$ при $\theta_1 \neq 0$. Применима теорема 3.1.8.

Заключение

В настоящей работе мы изучали усреднение уравнений гиперболического типа и нестационарных уравнений типа Шрёдингера с операторами $\mathcal{A}_\varepsilon$ и $\mathcal{B}_\varepsilon$ второго порядка с периодическими быстро осциллирующими коэффициентами (см. (3.1), (3.2)), действующими в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$.

Перечислим ещё раз основные результаты работы.

1. Для операторов $\cos(s\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})$, $\mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2}\sin(s\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})$ показано, что в общем случае аппроксимации по $(H^2 \to L_2)$- и $(H^1 \to L_2)$-нормам, полученные в работах [54; 55], являются точными как относительно типа нормы, так и относительно зависимости от времени. С другой стороны, выделены достаточные условия, при которых эти оценки допускают улучшение; подтверждена точность улучшенных оценок в обоих смыслах.
2. Для оператора $e^{-is\mathcal{A}_\varepsilon}$ доказана точность аппроксимации, полученной в работе [54] относительно зависимости от времени. Доказано, что усиленная по типу нормы оценка из [57] (выполненная при дополнительных условиях) допускает улучшение и по времени (при тех же условиях); подтверждена точность полученной улучшенной оценки в обоих смыслах.
3. Получена аппроксимация для оператора $e^{-is\mathcal{B}_\varepsilon}$, подтверждена точность полученной оценки относительно типа нормы. Доказано, что при дополнительном условии оценка допускает улучшение по типу нормы.

Результаты, сформулированные в операторных терминах, применяются к усреднению решений задач Коши для гиперболических уравнений и для нестационарных уравнений типа Шрёдингера. Полученные общие результаты применяются к конкретным уравнениям математической физики.

Список обозначений

$\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}_*$	комплексные сепарабельные гильбертовы пространства
$(\,\cdot\,,\,\cdot\,)_{\mathfrak{H}}$, $\\|\,\cdot\,\\|_{\mathfrak{H}}$	скалярное произведение и норма в $\mathfrak{H}$ (иногда мы опускаем индексы)
$\\|\,\cdot\,\\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}_*}$	норма ограниченного оператора из $\mathfrak{H}$ в $\mathfrak{H}_*$ (иногда мы опускаем индексы)
$I = I_{\mathfrak{H}}$	тождественный оператор в $\mathfrak{H}$
$A\colon \mathfrak{H}\to\mathfrak{H}_*$	линейный оператор
$\operatorname{Dom} A$	область определения A
$\operatorname{Ker} A$	ядро A
$\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$, $\lvert\,\cdot\,\rvert$	стандартные скалярное произведение и норма в $\mathbb{C}^n$
$\mathbf{1}_n$	единичная $(n\times n)$-матрица
a	матрица
a^{T}	транспонированная к a матрица
a^*	эрмитово сопряжённая к a матрица
$\mathbf{x}$	$= (x_1,\dots,x_d)\in\mathbb{R}^d$
D_j	$= -i\frac{\partial}{\partial x_j}$, $j=1,\dots,d$
$\mathbf{D}$	$= -i\nabla = (D_1,\dots,D_d)$
$L_p(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$	класс L_p, $1\leqslant p\leqslant\infty$, функций со значениями в $\mathbb{C}^n$, заданных в области $\mathcal{O}\subset\mathbb{R}^d$
$W^q_p(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$	класс Соболева $\mathbb{C}^n$-значных функций в области $\mathcal{O}\subset\mathbb{R}^d$ порядка q с индексом суммирования p
$H^r(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$	класс Соболева $\mathbb{C}^n$-значных функций в области $\mathcal{O}\subset\mathbb{R}^d$ порядка $r\in\mathbb{R}$ с индексом суммирования 2

Список литературы

1. *Марченко*, *В. А.* Краевые задачи с мелкозернистой границей [Текст] / В. А. Марченко, Е. Я. Хруслов // Матем. сб. — 1964. — Т. 458—472, № 3. — С. 1—108.
2. *Spagnolo*, *S.* Sulla convergenza di soluzioni di equazioni paraboliche ed ellittiche [Текст] / S. Spagnolo // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. — 1968. — Vol. 22, no. 4. — P. 571—597.
3. *De Giorgi*, *E.* Sulla convergenza degli integrali dell'energia per operatori ellittici del secondo ordine [Текст] / E. De Giorgi, S. Spagnolo // Boll. Unione Mat. Ital. — 1973. — Vol. 8, no. 4. — P. 391—411.
4. *Бахвалов*, *Н. С.* Осреднение процессов в периодических средах [Текст] / Н. С. Бахвалов, Г. П. Панасенко. — М. : Наука, 1984. — 352 с.
5. *Bensoussan*, *A.* Asymptotic analysis for periodic structures [Текст] / A. Bensoussan, J.-L. Lions, G. Papanicolaou. — Amsterdam : North-Holland, 1978. — 699 p. — (Studies in mathematics and its applications ; 5).
6. *Пятницкий*, *А. Л.* Усреднение (Методы и некоторые приложения) [Текст] / А. Л. Пятницкий, Г. А. Чечкин, А. С. Шамаев. — Новосибирск : Тамара Рожковская, 2004. — 341 с.
7. *Санчес-Паленсия*, *Э.* Неоднородные среды и теория колебаний [Текст] / Э. Санчес-Паленсия. — М. : Мир, 1984. — 472 с.
8. *Жиков*, *В. В.* Усреднение дифференциальных операторов [Текст] / В. В. Жиков, С. М. Козлов, О. А. Олейник. — М. : Физматлит, 1993. — 464 с.
9. *Cioranescu*, *D.* An introduction to homogenization [Текст] / D. Cioranescu, P. Donato. — Oxford : Oxford University Press, 1999. — 262 p. — (Oxford lecture series in mathematics and its applications ; 17).
10. *Tartar*, *L.* Quelques remarques sur l'homogénéisation, [Текст] / L. Tartar // Functional Analysis and Numerical Analysis. Proc. Japan-France Seminar / ed. by H. Fujita. — 1976. — P. 468—482.
11. *Nguetseng*, *G.* A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization [Текст] / G. Nguetseng // SIAM J. Math. Anal. — 1989. — Vol. 20, no. 3. — P. 608—623.

12. *Allaire*, *G.* Homogenization and two-scale convergence [Текст] / G. Allaire // SIAM J. Math. Anal. — 1992. — Vol. 23, no. 6. — P. 1482—1518.

13. *Бирман*, *М. Ш.* Периодические дифференциальные операторы второго порядка. Пороговые свойства и усреднения [Текст] / М. Ш. Бирман, Т. А. Суслина // Алгебра и анализ. — 2003. — Т. 15, № 5. — С. 1—108.

14. *Бирман*, *М. Ш.* Пороговые аппроксимации резольвенты факторизованного самосопряжённого семейства с учётом корректора [Текст] / М. Ш. Бирман, Т. А. Суслина // Алгебра и анализ. — 2005. — Т. 17, № 5. — С. 69—90.

15. *Бирман*, *М. Ш.* Усреднение периодических эллиптических дифференциальных операторов с учётом корректора [Текст] / М. Ш. Бирман, Т. А. Суслина // Алгебра и анализ. — 2005. — Т. 17, № 6. — С. 1—104.

16. *Бирман*, *М. Ш.* Усреднение периодических дифференциальных операторов с учётом корректора. Приближение решений в классе Соболева $H^1(\mathbb{R}^d)$ [Текст] / М. Ш. Бирман, Т. А. Суслина // Алгебра и анализ. — 2006. — Т. 18, № 6. — С. 1—130.

17. *Allaire*, *G.* Homogenization of the Schrödinger equation and effective mass theorems [Текст] / G. Allaire, A. Piatnitski // Comm. Math. Phys. — 2005. — Vol. 258, no. 1. — P. 1—22.

18. *Conca*, *C.* Bloch approximation in homogenization and applications [Текст] / C. Conca, R. Orive, M. Vanninathan // SIAM J. Math. Anal. — 2002. — Vol. 33, no. 5. — P. 1166—1198.

19. *Жиков*, *В. В.* Спектральный подход к асимптотическим задачам диффузии [Текст] / В. В. Жиков // Дифф. уравнения. — 1989. — Т. 25, № 1. — С. 44—50.

20. *Севостьянова*, *Е. В.* Асимптотическое разложение решения эллиптического уравнения второго порядка с периодическими быстро осциллирующими коэффициентами [Текст] / Е. В. Севостьянова // Матем. сб. — 1981. — Т. 115, № 2. — С. 204—222.

21. *Суслина*, *Т. А.* Об усреднении периодических параболических систем [Текст] / Т. А. Суслина // Функц. анализ и его прил. — 2004. — Т. 38, № 4. — С. 86—90.

22. *Suslina*, *T. A.* Homogenization of a periodic parabolic Cauchy problem [Текст] / T. A. Suslina // Amer. Math. Soc. Transl. (2). — 2007. — Vol. 220. — P. 201—233.

23. *Василевская*, *Е. С.* Усреднение параболической задачи Коши с периодическими коэффициентами при учёте корректора [Текст] / Е. С. Василевская // Алгебра и анализ. — 2009. — Т. 21, № 1. — С. 3—60.

24. *Suslina*, *T. A.* Homogenization of a periodic parabolic Cauchy problem in the Sobolev space $H^1(\mathbb{R}^d)$ [Текст] / T. A. Suslina // Math. Model. Nat. Phenom. — 2010. — Vol. 5, no. 4. — P. 390—447.

25. *Василевская*, *Е. С.* Пороговые аппроксимации факторизованного самосопряжённого операторного семейства с учётом первого и второго корректоров [Текст] / Е. С. Василевская, Т. А. Суслина // Алгебра и анализ. — 2011. — Т. 23, № 2. — С. 102—146.

26. *Василевская*, *Е. С.* Усреднение параболических и эллиптических периодических операторов в $L_2(\mathbb{R}^d)$ при учёте первого и второго корректоров [Текст] / Е. С. Василевская, Т. А. Суслина // Алгебра и анализ. — 2012. — Т. 24, № 2. — С. 1—103.

27. *Жиков*, *В. В.* Об операторных оценках в теории усреднения [Текст] / В. В. Жиков // Докл. РАН. — 2005. — Т. 403, № 3. — С. 305—308.

28. *Zhikov*, *V. V.* On operator estimates for some problems in homogenization theory [Текст] / V. V. Zhikov, S. E. Pastukhova // Russ. J. Math. Phys. — 2005. — Vol. 12, no. 4. — P. 515—524.

29. *Zhikov*, *V. V.* Estimates of homogenization for a parabolic equation with periodic coefficients [Текст] / V. V. Zhikov, S. E. Pastukhova // Russ. J. Math. Phys. — 2006. — Vol. 13, no. 2. — P. 224—237.

30. *Борисов*, *Д. И.* Асимптотики решений эллиптических систем с быстро осциллирующими коэффициентами [Текст] / Д. И. Борисов // Алгебра и анализ. — 2008. — Т. 20, № 2. — С. 19—42.

31. *Суслина*, *Т. А.* Усреднение в классе Соболева $H^1(\mathbb{R}^d)$ для периодических эллиптических дифференциальных операторов второго порядка при включении членов первого порядка [Текст] / Т. А. Суслина // Алгебра и анализ. — 2010. — Т. 22, № 1. — С. 108—221.

32. *Суслина*, *Т. А.* Усреднение эллиптических систем с периодическими коэффициентами: операторные оценки погрешности в $L_2(\mathbb{R}^d)$ с учётом корректора [Текст] / Т. А. Суслина // Алгебра и анализ. — 2014. — Т. 26, № 4. — С. 195—263.

33. *Мешкова*, *Ю. М.* Усреднение задачи Коши для параболических систем с периодическими коэффициентами [Текст] / Ю. М. Мешкова // Алгебра и анализ. — 2013. — Т. 25, № 6. — С. 125—177.

34. *Жиков*, *В. В.* Операторные оценки в теории усреднения [Текст] / В. В. Жиков, С. Е. Пастухова // Успехи матем. наук. — 2016. — Т. 71, № 3. — С. 27—122.

35. *Cherednichenko*, *K. D.* Resolvent estimates for high-contrast elliptic problems with periodic coefficients [Текст] / K. D. Cherednichenko, S. Cooper // Arch. Rational Mech. Anal. — 2016. — Vol. 219, no. 3. — P. 1061—1086.

36. Unified approach to critical-contrast homogenisation with explicit links to time-dispersive media [Текст] / K. D. Cherednichenko [и др.] // Тр. ММО. — 2019. — Т. 80, № 2. — С. 295—342.

37. *Cherednichenko*, *K. D.* Effective Behaviour of Critical-Contrast PDEs: Micro-resonances, Frequency Conversion, and Time Dispersive Properties. I [Текст] / K. D. Cherednichenko, Y. Y. Ershova, A. V. Kiselev // Communications in Mathematical Physics. — 2020. — Vol. 375, no. 3. — P. 1833—1884.

38. *Пастухова*, *С. Е.* Операторные оценки повторного и локально-периодического усреднения [Текст] / С. Е. Пастухова, Р. Н. Тихомиров // Докл. РАН. — 2007. — Т. 415, № 3. — С. 304—309.

39. *Пастухова*, *С. Е.* Оценки локально-периодического и повторного усреднения: параболические уравнения [Текст] / С. Е. Пастухова, Р. Н. Тихомиров // Докл. РАН. — 2007. — Т. 428, № 2. — С. 166—170.

40. *Сеник*, *Н. Н.* Об усреднении несамосопряжённых периодических эллиптических операторов в бесконечном цилиндре [Текст] / Н. Н. Сеник // Функц. анализ и его прил. — 2016. — Т. 50, № 1. — С. 85—89.

41. *Senik*, *N. N.* Homogenization for non-self-adjoint periodic elliptic operators on an infinite cylinder [Текст] / N. N. Senik // SIAM J. Math. Anal. — 2017. — Vol. 49, no. 2. — P. 874—898.

42. *Сеник*, *Н. Н.* Об усреднении локально периодических эллиптических и параболических операторов [Текст] / Н. Н. Сеник // Функц. анализ и его прил. — 2020. — Т. 54, № 1. — С. 87—92.

43. *Griso*, *G.* Error estimate and unfolding for periodic homogenization [Текст] / G. Griso // Asymptot. Anal. — 2004. — Vol. 40, no. 3, 4. — P. 269—286.

44. *Griso*, *G.* Interior error estimate for periodic homogenization [Текст] / G. Griso // Anal. and Appl. — 2006. — Vol. 4, no. 1. — P. 61—79.

45. *Kenig*, *C. E.* Convergence rates in L^2 for elliptic homogenization problems [Текст] / C. E. Kenig, F. Lin, Z. Shen // Arch. Rational Mech. Anal. — 2012. — Vol. 203, no. 3. — P. 1009—1036.

46. *Пахнин*, *М. А.* Операторные оценки погрешности при усреднении эллиптической задачи Дирихле в ограниченной области [Текст] / М. А. Пахнин, Т. А. Суслина // Алгебра и анализ. — 2012. — Т. 24, № 6. — С. 139—177.

47. *Suslina*, *T. A.* Homogenization of the Dirichlet problem for elliptic systems: L_2-operator error estimates [Текст] / T. A. Suslina // Mathematika. — 2013. — Vol. 59, no. 2. — P. 463—476.

48. *Suslina*, *T.* Homogenization of the Neumann problem for elliptic systems with periodic coefficients [Текст] / T. Suslina // SIAM J. Math. Anal. — 2013. — Vol. 45, no. 6. — P. 3453—3493.

49. *Xu*, *Q.* Uniform regularity estimates in homogenization theory of elliptic system with lower order terms [Текст] / Q. Xu // J. Math. Anal. Appl. — 2016. — Vol. 438, no. 2. — P. 1066—1107.

50. *Xu*, *Q.* Uniform regularity estimates in homogenization theory of elliptic systems with lower order terms on the Neumann boundary problem [Текст] / Q. Xu // J. Differential Equations. — 2016. — Vol. 261, no. 8. — P. 4368—4423.

51. *Meshkova*, *Y. M.* Homogenization of initial boundary value problems for parabolic systems with periodic coefficients [Текст] / Y. M. Meshkova, T. A. Suslina // Appl. Anal. — 2016. — Vol. 95, no. 8. — P. 1736—1775.

52. *Мешкова*, *Ю. М.* Усреднение задачи Дирихле для эллиптических и параболических систем с периодическими коэффициентами [Текст] / Ю. М. Мешкова, Т. А. Суслина // Функц. анализ и его прил. — 2017. — Т. 51, № 3. — С. 87—93.

53. *Geng*, *J.* Convergence rates in parabolic homogenization with time-dependent periodic coefficients [Текст] / J. Geng, Z. Shen // J. Funct. Anal. — 2017. — Vol. 272, no. 5. — P. 2092—2113.

54. *Бирман*, *М. Ш.* Операторные оценки погрешности при усреднении нестационарных периодических уравнений [Текст] / М. Ш. Бирман, Т. А. Суслина // Алгебра и анализ. — 2008. — Т. 20, № 6. — С. 30—107.

55. *Meshkova*, *Y. M.* On operator error estimates for homogenization of hyperbolic systems with periodic coeffcients [Текст] / Y. M. Meshkova. — to appear in J. Spectral theory.

56. *Мешкова*, *Ю. М.* Об усреднении периодических гиперболических систем [Текст] / Ю. М. Мешкова // Математ. заметки. — 2019. — Т. 105, № 6. — С. 937—942.

57. *Suslina*, *T. A.* Spectral approach to homogenization of nonstationary Schrödinger-type equations [Текст] / T. A. Suslina // J. Math. Anal. Appl. — 2017. — Vol. 446, no. 2. — P. 1466—1523.

58. *Суслина*, *Т. А.* Усреднение уравнений типа Шрёдингера [Текст] / Т. А. Суслина // Функц. анализ и его прил. — 2016. — Т. 50, № 3. — С. 90—96.

59. *Суслина*, *Т. А.* Аппроксимация резольвенты двупараметрического квадратичного операторного пучка вблизи нижнего края спектра [Текст] / Т. А. Суслина // Алгебра и анализ. — 2013. — Т. 25, № 5. — С. 221—251.

60. *Дородный*, *М. А.* Усреднение гиперболических уравнений [Текст] / М. А. Дородный, Т. А. Суслина // Функц. анализ и его прил. — 2016. — Т. 50, № 4. — С. 91—96.

61. *Dorodnyi*, *M. A.* Spectral approach to homogenization of hyperbolic equations with periodic coefficients [Текст] / M. A. Dorodnyi, T. A. Suslina // J. Differential Equations. — 2018. — Vol. 264, no. 12. — P. 7463—7522.

62. *Дородный*, *М. А.* Усреднение периодических уравнений типа Шрёдингера при включении членов младшего порядка [Текст] / М. А. Дородный // Алгебра и анализ. — 2019. — Т. 31, № 6. — С. 122—196.

63. *Dorodnyi*, *M. A.* Operator error estimates for homogenization of the nonstationary Schrödinger type equations: sharpness of the results [Электронный ресурс] / M. A. Dorodnyi // Appl. Anal. — 2021. — Режим доступа: http://dx.doi.org/10.1080/00036811.2021.1901886.

64. *Дородный*, *М. А.* Операторные оценки погрешности при усреднении гиперболических уравнений [Текст] / М. А. Дородный, Т. А. Суслина // Функц. анализ и его прил. — 2020. — Т. 54, № 1. — С. 69—74.

65. *Дородный, М. А.* Усреднение гиперболических уравнений с периодическими коэффициентами в $\mathbb{R}^d$: точность результатов [Текст] / М. А. Дородный, Т. А. Суслина // Алгебра и анализ. — 2020. — Т. 32, № 4. — С. 3—136.

66. *Дородный, М. А.* Усреднение нестационарного модельного уравнения электродинамики [Текст] / М. А. Дородный, Т. А. Суслина // Математ. заметки. — 2017. — Т. 102, № 5. — С. 700—720.

67. *Dorodnyi, M. A.* Homogenization of nonstationary periodic Maxwell system in the case of constant permeability [Электронный ресурс] / M. A. Dorodnyi, T. A. Suslina // препринт. — 2020. — Режим доступа: arXiv:2008.03047.

68. *Като, Т.* Теория возмущений линейных операторов [Текст] / Т. Като. — М. : Мир, 1972.

69. Функциональный анализ (серия “Справочная математическая библиотека”) [Текст] / под ред. С. Г. Крейна. — М. : Наука, 1972. — 544 с.

70. *Conca, C.* On Burnett coefficients in periodic media [Текст] / C. Conca, R. Orive, M. Vanninathan // J. Math. Phys. — 2006. — Vol. 47, no. 3. — P. 032902.