САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ "ЛЭТИ"

На правах рукописи

Железняк Александр Владимирович

Степенные ряды с обобщенными условиями Харди-Калуца

01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., профессор
Широков Н. А.

Санкт–Петербург – 2021

Оглавление

Введение

В классичесой интерполяционной задаче Неванлинны-Пика для данных точек $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{D}$ и значений $w_1, w_2, \ldots, w_n \in \mathbb{D}$ требуется найти голоморфную функцию $\varphi \in H^\infty(\mathbb{D})$ такую, что

$$\varphi(x_k) = w_k$$

при всех $k = 1, \ldots, n$, где $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$ обозначает единичный шар в $\mathbb{C}$, при этом норма φ

$$||\varphi|| = sup|\varphi(z)| \leq 1, z \in \mathbb{D}.$$

Эта задача впервые была решена Пиком в 1916 году [1], он показал, что эта задача разрешима тогда и только тогда, когда матрица $A = (\frac{1-w_k\overline{w_l}}{1-x_k\overline{x_l}})_{1\leq k,l\leq n}$ нестрого положительно определена, более того, он доказал, что если определитель матрицы A равен 0, то решение единственно и представляется в виде конечного произведения Бляшке. В 1929 году Р. Неванлинна [2], [3] рассмотрел эту задачу независимо от Пика и дал параметрическое описание всех решений в случае строгой положительной определенности матрицы А. Тем самым, задача Неванлинны-Пика разрешима тогда и только тогда, когда матрица $A = (\frac{1-w_k\overline{w_l}}{1-x_k\overline{x_l}})_{1\leq k,l\leq n}$ нестрого положительно определена, то есть, матрица

$$A = ((1 - w_k\overline{w_l})k(x_k, x_l))_{1\leq k,l\leq n} \text{ нестрого положительно определена,}$$

где $k(x, y) = \frac{1}{1-x\overline{y}}$ – воспроизводящее ядро пространства Харди $H^2(\mathbb{D})$.

В работах Аглера и МакКарти [4], [5] рассматривается общая задача Неванлинны-Пика. Пусть H – гильбертово пространство функций на некотором множестве X такое, что функционал вычисления значения в точке непрерывен, то есть H пространство с воспроизводящим ядром k_y таким, что

$$(f(z), k_y)_H = f(y).$$

Рассмотрим также ядро следующего вида

$$k(y,x) = (k_x, k_y) = k_x(y).$$

Для пространства H определим алгебру мультипликаторов:

$$M(H) = (\varphi | g \in H \Rightarrow \varphi g \in H).$$

С мультипликатором φ связан ограниченный оператор умножения, действующий на пространстве H, $M_\varphi(g) = \varphi g, g \in H$. Положим $||\varphi||_{M(H)} = ||M_\varphi||$.

Для данных $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X, w_1, w_2, \ldots, w_n \in \mathbb{D}$ мы ищем мультипликатор φ пространства H такой, что $\varphi(x_k) = w_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$ и $||\varphi|| \leq 1$. Известно, что условие положительной определенности матрицы

$$A = ((1 - w_k \overline{w_l}) k(x_k, x_l))_{1 \leq k,l \leq n},$$

будет необходимым для существования мультипликатора φ. Будем предполагать линейную независимость k_x и k_y при $x \neq y$. Пусть теперь t – натуральное число, определим H_t как $H_t = H \oplus H \oplus \cdots \oplus H$ – ортогональная сумма t экземпляров пространств H.

$$H_t : F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_t \end{pmatrix}, \quad f_k \in H, \quad ||F||_{H_t} = \sqrt{\sum_{k=1}^t ||f_k||^2}.$$

Пусть t и s — два натуральных числа. Определим алгебру мультипликаторов

$$M(H_t, H_s) = (R = (f_{i,j})_{s*t} | F \in H_t \Rightarrow RF \in H_s).$$

Мультипликатор R порождает оператор умножения M_R в $L(H_t, H_s)$, а множество $L(H_t, H_s)$ – множество ограниченных линейных операторов из H_t в H_s. Положим теперь $||R||_{M(H_t, H_s)} = ||M_R||$. Пусть M_{s*t} обозначает множество матриц размером $s * t$. Верна следующая теорема:

Теорема. Пусть H– гильбертово пространство функций на множестве X, точки $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ и матрицы $W_1, W_2, \ldots, W_n \in M_{s*t}$. Необходимым условием для решения интерполяционной задачи

$$\varphi(x_i) = W_i$$

с мультипликатором φ с нормой $||\varphi|| \leq 1$ является неотрицательность матрицы Пика:

$$[(I_{\mathbb{C}^s} - W_i {W_j}^\star) k(x_i, x_j)],$$

где $k(x_i, x_j)$ - ядро H. Иными словами для любых векторов $v_1, v_2, \cdots, v_N \in \mathbb{C}^s$ верно соотношение:

$$\sum_{i,j=1}^{N} ((I_{\mathbb{C}^s} - W_i W_j^{\star}) v_j, v_i) k(x_i, x_j) \geq 0.$$

Следующие два определения, введенные Мак-Каллахом [6], помогут определить полное свойство Пика.

Определение. Воспроизводящее ядро k на множестве X удовлетворяет M_{s*t} свойству Пика, если для всяких точек $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ и матриц $W_1, W_2, \ldots, W_n \in M_{s*t}$ таких, что

$$(I_{\mathbb{C}^s} - W_i W_j^{\star}) k(x_i, x_j) \geq 0,$$

существует мульпликатор φ с нормой $||\varphi|| \leq 1$, решающий интерполяционную задачу Неванлинны-Пика $\varphi(x_i) = W_i$.

Определение. Воспроизводящее ядро k на множестве X удовлетворяет полному свойству Пика, если оно удовлетворяет M_{s*t} свойству Пика при всех натуральных числах t и s.

Определение. Воспроизводящее ядро k на множестве X называется неприводимым, если $k(x, y) \neq 0$.

В работах [6], [7] доказана следующая теорема:

Теорема. Неприводимое воспроизводящее ядро k на множестве X удовлетворяет полному свойству Пика тогда и только тогда, когда ядро $k(x, y)$ представимо в виде

$$k(x, y) = \frac{\delta(x)\overline{\delta(y)}}{1 - b(x, y)},$$

где $\delta(x)$ не принимает значение 0, а функция $|b(x, y)| < 1$ такая, что матрица $B = (b_{(k,l)}) = (b(x_k, x_l))_{1 \leq k,l \leq n}$ положительно определена.

Эта теорема имеет важное практическое применение при рассмотрении пространства $l^2(w_n)$ функций $f(z)$ аналитических в единичном круге, где функция $f(z) = \sum\limits_{n \geq 0} f_n z^n$ с нормой

$$||f||^2 = \sum_{n \geq 0} w_n ||f_n||^2 < \infty.$$

Известно [11], [12], что в этом случае, для выполнения полного свойства Пика необходимо и достаточно, чтобы числа w_n были строго положительны и для формального степенного ряда $\sum\limits_{n\geq 0}(w_n)^{(-1)}x^n$ справедливы соотношения

$$(\sum_{n\geq 0}(w_n)^{(-1)}x^n)^{(-1)} = w_0 - \sum_{n>0} b_n x^n, b_n \geq 0, n > 0.$$

Тем самым, возникает естественный вопрос: для каких рядов $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ с положительными коэффициентами a_n верно, что обратный ряд имеет все неположительные коэффициенты, кроме нулевого. Ответ на этот вопрос можно найти работе Харди [8], где он исследовал свойства суммирования рядов методом Вороного. Харди в этой работе ссылается на работу Сеге [9], а тот в свою очередь приписывает авторство Калуца [10].

Классическая теорема Калуца была сформулирована и доказана в начале 20 века немецким математиком Калуца и использовалась им для изучения структуры и свойств одномерных монотонных последовательностей. Формулировка ее довольно проста и звучит следующим образом:

Теорема Калуца. *Пусть коэффициенты a_n формального степенного ряда*

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$$

строго положительны и удовлетворяют условию логарифмической выпуклости, а именно

$$a_{n+1}a_{n-1} \geq a_n^2$$

при всех натуральных n. Тогда все коэффициенты обратного ряда

$$g(x) = (f(x))^{-1} = \sum_{n\geq 0} b_n x^n$$

неположительны за исключением b_0.

В 2011 году финские математики Вести и Вуоринен совместно с венгерским Батишем [14] показали, что если коэффициенты a_n и c_n двух формальных степенных рядов $f_1(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ и $f_2(x) = \sum_{n\geq 0} c_n x^n$ удовлетворяют условию логарифмической выпуклости, то и у ряда $F(x) = \sum_{n\geq 0} a_n c_n x^n$, коэффициенты которого получены как произведение коэффициентов a_n и c_n, обратный ряд будет иметь все коэффициенты неположительными, за исключением нулевого.

Диссертация посвящена расширению и обобщению условия Харди-Калуца и эти результаты могут быть востребованы при решении задач Неванлинны-Пика.

Обзор первой главы.

Теорема Калуца, к сожалению, дает только достаточное условие на коэффициенты ряда f, но не является необходимым. Контрпримером к ней может являться ряд:

$$h_1(x) = \sum_{n\geq 0} F_n x^n = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + \cdots ,$$

где F_n обозначает $n-$ное число Фибоначчи, обратный ему ряд $h_2(x)$ будет иметь вид

$$h_2(x) = 1 - x - x^2.$$

Легко видеть, что для коэффициентов ряда $h_1(x)$ условие логарифмической выпуклости не выполнено. Цель получить новые более широкие достаточные условия на коэффициенты ряда f и продолжить условие Харди-Калуца на случай нескольких переменных.

Вспомогательные обозначения и определения. Пусть $s = (s_1, \ldots, s_n)$ – мультииндекс. Обозначим через $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ – мультииндекс, состоящий из нулей и одной единицы на $i-$м месте, а через $\mathbb{O} = (0, \ldots, 0)$ и $\mathbb{E} = (1, \ldots, 1)-$ мультииндексы, состоящие целиком из нулей и единиц соответственно. Для удобства и краткости будем использовать обозначения $x^s = x_1^{s_1} x_2^{s_2} \ldots x_n^{s_n}$ и $a_s = a_{s_1, s_2, \ldots, s_n}$. Также будет писать, что $s > t$ и $s \geq t$, если при всех $i = 1, 2, \ldots, n$ выполнено $s_i > t_i$ и $s_i \geq t_i$ соответственно. Обозначим через $||s|| = \sum\limits_{i=1}^{n} s_i-$ порядок мультииндекса s.

Определение 1.1. *Будем говорить, что тройка мультииндексов (s, t, u) B-выпуклая если выполнено неравенство:*

$$a_{s+t+u} a_s \geq B a_{s+t} a_{s+u}.$$

Определение 1.2. *Будем говорить, что последовательность* $(a_k)_0^\infty$ *удовлетворяет условию Харди-m по отношению к набору чисел* $b_0, b_1, b_2, ..., b_{m-1}$ *если при всех натуральных числах* k *выполнено соотношение:*

$$a_{k-1}\sum_{t=0}^{m-1} b_t a_{k+m-t} \geq a_k \sum_{t=0}^{m-1} b_t a_{k+m-1-t}.$$

Основной результат. Получено новое условие, аналогичное теореме Калуца для рядов нескольких переменных.

Теорема 1.1. *Пусть коэффициенты* a_s *формального степенного ряда* n *переменных*

$$f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{s_1, s_2, ..., s_n \geq 0} a_{s_1, s_2, ..., s_n} x_1^{s_1} x_2^{s_2} ... x_n^{s_n} = \sum_{s \geq \mathbb{O}} a_s x^s,$$

с положительными коэффициентами a_s *удовлетворяют следующим условиям:*

a) тройки (s, e_i, e_i) *1-выпуклы,* $1 \leq i \leq n$*;*

b) тройки (s, e_i, e_j) *1-выпуклы при* $s_i s_j > 0$*,* $i \neq j$*;*

c) тройки (s, e_i, e_j) $(n-l)/(n-l-1)$*-выпуклы если* $n > 1$*,* $s_i s_j = 0$*, где* l *– число нулей в последовательности* $\{s_k\}_{k \neq i, k \neq j}$*,*

тогда все коэффициенты обратного ряда

$$g(x) = g(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{s_1, s_2, ..., s_n \geq 0} b_{s_1, s_2, ..., s_n} x_1^{s_1} x_2^{s_2} ... x_n^{s_n} = \sum_{s \geq \mathbb{O}} b_s x^s,$$

неположительны за исключением $b_{\mathbb{O}}$*.*

При $n = 1$ теорема 1.1 есть теорема Калуца. На случай формальных степенных рядов двух переменных получено новое достаточное условие:

Теорема 1.2. *Пусть коэффициенты* $a_{m,n}$ *формального степенного ряда 2 переменных*

$$f(x) = f(x_1, x_2) = \sum_{m,n \geq 0} a_{m,n} x_1^m x_2^n = \sum_{s \geq \mathbb{O}} a_s x^s,$$

с положительными коэффициентами $a_{m,n}$ *удовлетворяют следующим условиям:*

a) тройка $((0,0), e_1, e_2)$ *2-выпукла;*

b) тройки (me_i, e_i, e_i) *1-выпуклы,*$m \geq 0$*,* $1 \leq i \leq 2$*;*

c) тройки $(ne_j, e_j, (m+1)e_i)$ 1-выпуклы при $m^2+n^2>0$, $i \neq j$;
d) для всех пар мультииндексов (m,n), таких что $m^2+n^2>0$, и для всех пар мультииндексов (k,l) таких, что $k^2+l^2>0$ и $(k,l) \leq (m,n)$ выполнено соотношение:

$$\frac{a_{m+1-k,n+1-l}}{a_{m+1,n+1}} - \frac{a_{m-k,n+1-l}}{a_{m,n+1}} - \frac{a_{m+1-k,n-l}}{a_{m+1,n}} + \frac{a_{m-k,n-l}}{a_{m,n}} \leq 0,$$

тогда все коэффициенты обратного ряда

$$g(x) = g(x_1,x_2) = \sum_{m,n\geq 0} b_{m,n}x_1^m x_2^n = \sum_{s \geq \mathbb{O}} b_s x^s,$$

неположительны за исключением $b_{0,0}$.

Приводятся примеры рядов, удовлетворяющих условиям теорем 1.1 и 1.2, более того получена оценка снизу на коэффициенты формального стпеннного ряда, удовлетворяющегот условиям теоремы 1.1, с точностью до нормировки нулевого коэффициента.

Следующая теорема описывает целый класс условий Харди-m и дает достаточные условия для неположительности коэффициентов обратного ряда.

Теорема 1.3. *Пусть формальный степенной ряд одной переменной $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ с положительными коэфиициентами a_k и коэффициенты b_k обратного ряда $g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ удовлетворяет следующим условиям:*
a) $b_0 > 0$, $b_1, ..., b_{m-1} \leq 0$;
b) последовательность (a_k) удовлетворяет условию Харди-m по отношению к числам $b_0, b_1, ..., b_{m-1}$;
тогда все коэффициенты обратного ряда g неположительны за исключением b_0.

Теорема 1.3 , которая при $m = 1$ вырождается в теорему Калуца, как и теорема Калуца, является достаточной, но не является необходимой при любом натуральном m. Приводятся примеры рядов, удовлетворяющих условиям теоремы 1.3 при всех натуральных $m > 1$, для которых, при этом не будет верно условие логарифмической выпуклости коэффициентов. Кроме того, приведен пример ряда, который показывает, что теорема 1.3 не является достаточной.

Обзор второй главы. Условие логарифмической выпуклости коэффициентов Харди-Калуца может выполняться необязательно для всех элементов последовательности a_n, а начиная с некоторого места в этой заданной последовательности чисел a_n, например, при $n > n_0$. Возникает вопрос, существует ли какое-нибудь число a_0, чтобы можно было гарантировать неотрицательность коэффициентов обратного ряда? Тем самым все коэффициенты ряда, кроме нулевого остаются неизменными, а коэффициент a_0 меняется, так чтобы у обратного ряда все коэффициенты кроме нулевого были неположительны.

Определение 2.1. *Пусть $\{a_n\}$ — последовательность положительных чисел, K — натуральное число. Говорят, что последовательность удовлетворяет условию K-Харди, если при всех натуральных $n \geq K$ выполнено условие:*

$$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} \geq \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Основной результат:

Теорема 2.1. *Положим $f(x) = a_0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$– формальный степенной ряд, рассмотрим $g(x) = \frac{1}{f(x)} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$– формальный степенной ряд обратный к $f(x)$. Тогда, для любой последовательности чисел $a_1, a_2, \ldots,$, удовлетворяющей условию K-Харди, существует достаточно большое число a_0 такое, что числа $b_n < 0$ при всех натуральных n.*

Так же получены результаты, аналогичные теореме 2.1, для формальных степенных рядов нескольких переменных.

Обзор третьей главы. Теорема Калуца, к сожалению, дает только достаточное условие на коэффициенты ряда f и не дает необходимые. Целью настоящей главы будет дать описание множества рядов (для случая одной и нескольких переменных), у которых все коэффициенты положительны, а у обратного ряда все коэффициенты, кроме нулевого будут неположительны.

Вспомогательные обозначения и определения. Пусть $s = (s_1, \ldots, s_n)$ – мультииндекс. Обозначим через $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ – мультииндекс, состоящий из нулей и одной единицы на $i-$м месте, а через $\mathbb{O} = (0, \ldots, 0)$ и $\mathbb{E} = (1, \ldots, 1)-$ мультииндексы, состоящий из нулей и единиц соответственно. Для удобства и краткости будем использовать обозначения $x^s = x_1^{s_1} x_2^{s_2} \ldots x_n^{s_n}$ и

$a_s = a_{s_1,s_2,\dots,s_n}$. Также будет писать, что $s > t$ и $s \geq t$, если при всех $i = 1, 2, \dots, n$ выполнено $s_i > t_i$ и $s_i \geq t_i$ соответственно. Обозначим через $||s|| = \sum\limits_{i=1}^{n} s_i$– порядок мультииндекса s. Будем говорить, что $s >> t$ если выполнены два условия $s \geq t$ и $s \neq t$. Кроме того, $s >< t$, если коэффициенты s и t несравнимы.

Произведением Адамара двух формальных степенных рядов является поэлементное произведение коэффициентов степенных рядов:

$$(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n) \star (\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n c_n x^n.$$

Историческая справка. Теорема Калуца, доказанная в 1920-х годах дает только достаточное условие на коэффициенты ряда f - это условие логарифмической выпуклости коэффициентов. Впоследствии она находила применение в работах Сеге и Харди для изучения различных вопросов связанных со степенными рядами. Во второй половине 20 века теорема Калуца находит применение в вопросе разрешимости задачи Неванлинны-Пика и появляется в работах Аглера [4], Шиморина [11], Болла, Винникова и Трента [12], [13] и др. В 2011 году Вести, Вуоринен и Батиш [14] описали свойства рядов обладающих условием логарифмической выпуклости коэффициентов, охарактеризовав множество рядов обладающих свойством логарфмической выпуклости коэффициентов.

Основной результат. Получено новое условие, аналогичное теореме Батиша-Вести-Вуоринена, для произвольных формальных степенных рядов одной переменной.

Теорема 3.1. *Пусть* $f_1(x) = a_0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ *и* $f_2(x) = c_0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n x^n$ *– два формальных степенных ряда с положительными коэффициентами, и пусть* $g_1(x) = b_0 - \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n x^n$ *и* $g_2(x) = d_0 - \sum\limits_{n=1}^{\infty} d_n x^n$ *– ряды обратные* f_1 *и* f_2 *соответственно, причем коэффициенты* b_n *и* d_n *неотрицательны при всех* n. *Пусть ряд* $F(x) = f_1(x) \star f_2(x)$, $G(x) = l_0 - \sum\limits_{n=1}^{\infty} l_n x^n$ *– ряд обратный* F. *Тогда все коэффициенты* l_n *ряда* G *будут неотрицательны.*

Ряды, удовлетворяющие условие логарфмической выпуклости коэффициентов, в частности теорема Батиша-Вести-Вуоринена является частным случаем рассматриваемой конструкции. Кроме того, получен аналог теоремы 3.1 для рядов нескольких переменных.

Теорема 3.2. *Пусть* $f_1(x) = a_{\mathbb{O}} + \sum\limits_{s>>\mathbb{O}}^{\infty} a_s x^s$ *и* $f_2(x) = c_{\mathbb{O}} + \sum\limits_{s>>\mathbb{O}}^{\infty} c_s x^s$ *– два формальных степенных ряда от* n *переменных с положительными коэффициентами, и пусть* $g_1(x) = b_{\mathbb{O}} - \sum\limits_{s>>\mathbb{O}}^{\infty} b_s x^s$ *и* $g_2(x) = d_{\mathbb{O}} - \sum\limits_{s>>\mathbb{O}}^{\infty} d_s x^s$ *– ряды обратные* f_1 *и* f_2 *соответственно, причем коэффициенты* b_s *и* d_s *неотрицательны при всех* s*. Пусть* $a_{\mathbb{O}} = b_{\mathbb{O}} = c_{\mathbb{O}} = d_{\mathbb{O}} = 1$*. Пусть ряд* $F(x) = a_{\mathbb{O}} c_{\mathbb{O}} + \sum\limits_{s>>\mathbb{O}}^{\infty} (a_s c_s) x^s$, $G(x) = l_{\mathbb{O}} - \sum\limits_{s>>\mathbb{O}}^{\infty} l_s x^s$ *– ряд обратный* F*. Тогда все коэффициенты* l_s *ряда* G *будут неотрицательны.*

Теорема 3.1 имеет важное приложение в теории гильбертовых пространств фунцкий с воспроизводящими ядрами Неванлинны-Пика. Одним из важных примеров является простанство $l^2(w_n)$ функций $f(z)$ аналитических в единичном круге, $f(z) = \sum\limits_{n\geq 0} f_n z^n$ с нормой

$$||f||^2 = \sum_{n\geq 0} w_n ||f_n||^2 < \infty,$$

при этом числа w_n строго положительны и для формального степенного ряда $\sum\limits_{n\geq 0} (w_n)^{(-1)} x^n$ справедливы соотношения

$$(\sum_{n\geq 0} (w_n)^{(-1)} x^n)^{(-1)} = w_0 - \sum_{n>0} b_n x^n, b_n \geq 0, n > 0.$$

В обозначениях теоремы 3.1 $w_n = a_n^{(-1)}$. Из теоремы 3.1 следует полугрупповое свойство пространств: если пространства $l^2(w_n)$ и $l^2(v_n)$ обладают ядрами Неванлинны-Пика, то и пространство $l^2(w_n v_n)$ обладает тем же свойством.

Научная новизна: все выносимые на защиту результаты являются новыми.

Практическая значимость: работа имеет теоретический характер. Результаты диссертации могут быть использованы при дальнейшем изучении проблем Неванлинны-Пика в одномерной и, возможно, многомерной формулировке.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Получены новые, более широкие, достаточные условия, гарантирующие неположительность коэффициентов обратного степенного ряда одной переменной. Получены условия, гарантирующие неположительность коэффициентов обратного ряда нескольких переменных.
2. Доказано, что при достаточном увеличении нулевого коэффициента ряда для рядов, у которых условие логарифмической выпуклости коэффициентов выполняется при всех натуральных n, больших некоторого натурального n_0, можно подобрать такой нулевой коэффициент a_0, чтобы ряд обратный данному имел все неположительные коэффициенты, кроме нулевого.
3. Получено новое мультипликативное свойство рядов, обобщающее результаты на случай одной и нескольких переменных.
4. Получено полугрупповое свойство пространств: если пространства $l^2(w_n)$ и $l^2(v_n)$ обладают ядрами Неванлинны-Пика, то и пространство $l^2(w_n v_n)$ обладает тем же свойством.

Достоверность полученных результатов обеспечивается строгими математическими доказательствами.

Апробация работы. Результаты по теме диссертации докладывались автором на семинарах кафедры Алгоритмической Математики СПб ГЭТУ, семинаре по теории функций и операторов, 18th Summer St. Petersburg Meeting in Mathematical Analysis.

Личный вклад. Все результаты диссертационной работы получены автором самостоятельно.

Публикации. Результаты по теме диссертации изложены в четырех статьях [15], [16], [17], [18] в рецензируемых научных журналах. Все публикации входят в реферативные базы данных Web of Science и Scopus, а также в список рекомендованный ВАК.

Благодарности. Автор искренне благодарит своего научного руководителя Н.А. Широкова за руководство работой, полезные обсуждения и ценные советы. Автор признателен И.В. Виденскому и А.М. Коточигову за полезные обсуждения и ценные советы.

Объём и структура работы. Диссертация состоит из введения, 3 глав и заключения. Полный объём диссертации составляет 81 страницу. Список литературы содержит 18 наименований.

Глава 1.
Продолжение условия Харди-Калуца на степенные ряды одной и нескольких переменных.

1.1 Введение.

Цель настоящей главы — обобщить результаты, полученные Калуца и используемые Харди для рядов одной переменной, на случай нескольких переменных, получив тем самым некоторые *достаточные* условия на коэффициенты, работающие для формальных степенных рядов. Также получены некоторые усиления условия Харди-Калуца для случая рядов одной переменной. Во втором параграфе вводятся вспомогательные обозначения и определения, а также дается формулировка основного результата на случай формальных степенных рядов нескольких переменных (теорема 1 §2). В третьем параграфе приводится доказательство результата параграфа 2. В четвертом параграфе формулируется и доказывается теорема 2, касающаяся рядов двух переменных. Пятый параграф содержит примеры рядов с положительными коэффициентами, чьи обратные ряды имеют все отрицательные коэффициенты, кроме нулевого. Шестой параграф посвящен разбору случая формальных степенных рядов одной переменной. В нем дается определение *условия Харди-m* и формулируются и доказываются результаты (теорема 3 §6), усиливающие и обобщающие условие Харди на случай рядов одной переменной. В седьмом параграфе показывается, что *условия Харди-m* не являются необходимыми и приводятся примеры рядов, показывающие связь классического условия Харди-Калуца с *условием Харди-m,* а также различие между*условиями Харди-m,* при различных m.

1.2 Достаточные условия отрицательности коэффициентов обратного формального степенного ряда нескольких переменных.

Для того чтобы сформулировать основной результат нам понадобятся некоторые вспомогательные обозначения. Пусть $s = (s_1, \ldots, s_n)$ – мультииндекс. Обозначим через $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ – мультииндекс, состоящий из нулей и одной единицы на $i-$м месте, а через $\mathbb{O} = (0, \ldots, 0)$ и $\mathbb{E} = (1, \ldots, 1)-$ мультииндексы, состоящий из нулей и единиц соответственно. Для удобства и краткости будем использовать обозначения $x^s = x_1^{s_1} x_2^{s_2} \ldots x_n^{s_n}$ и $a_s = a_{s_1, s_2, \ldots, s_n}$. Также будет писать, что $s > t$ и $s \geq t$, если при всех $i = 1, 2, \ldots, n$ выполнено $s_i > t_i$ и $s_i \geq t_i$ соответственно. Обозначим через $||s|| = \sum\limits_{i=1}^{n} s_i-$ порядок мультииндекса s.

Определение 1.1 *Будем говорить, что тройка мультииндексов (s, t, u) B-выпуклая если выполнено неравенство:*

$$a_{s+t+u} a_s \geq B a_{s+t} a_{s+u}.$$

Таким образом условие теоремы Харди-Калуца означает 1-выпуклость любой тройки $(s, 1, 1)$.

Теорема 1.1. *Пусть коэффициенты a_s формального степенного ряда n переменных*

$$f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{s_1, s_2, ..., s_n \geq 0} a_{s_1, s_2, ..., s_n} x_1^{s_1} x_2^{s_2} ... x_n^{s_n} = \sum_{s \geq \mathbb{O}} a_s x^s, \qquad (1.1)$$

с положительными коэффициентами a_s удовлетворяют следующим условиям:

a) тройки (s, e_i, e_i) 1-выпуклы, $1 \leq i \leq n$;

b) тройки (s, e_i, e_j) 1-выпуклы при $s_i s_j > 0$, $i \neq j$;

c) тройки (s, e_i, e_j) $(n-l)/(n-l-1)$-выпуклы если $n > 1$, $s_i s_j = 0$, где l — число нулей в последовательности $\{s_k\}_{k \neq i, k \neq j}$, *тогда все коэффициенты обратного ряда*

$$g(x) = g(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{s_1, s_2, ..., s_n \geq 0} b_{s_1, s_2, ..., s_n} x_1^{s_1} x_2^{s_2} ... x_n^{s_n} = \sum_{s \geq \mathbb{O}} b_s x^s, \tag{1.2}$$

неположительны за исключением $b_{\mathbb{O}}$.

Заметим, что при $n = 1$ мы получаем в точности теорему Харди-Калуца.

1.3 Доказательство теоремы 1.1.

Доказательство теоремы 1.1. Доказательство будем проводить индукцией по n. База ($n = 1$) нам известна. Переход от $n - 1$ к n:
Мы хотим доказать для произвольного мультииндекса $s \neq \mathbb{O}$ неравенство $b_s \leq 0$. Если $s_i = 0$ хоть для какого-нибудь индекса i, то, полагая $x_i = 0$, мы получим формальный степенной ряд $(n-1)$-й переменной. Используя индукционное предположение, получаем нужное нам неравенство $b_s \leq 0$. Поэтому, не умаляя общности, мы можем считать, что $s > \mathbb{O}$. Докажем, что и в этом случае будет выполнено неравенство $b_s \leq 0$. Нам достаточно доказать следующее утверждение:

$$\textit{если } b_t \leq 0 \text{ для всех } t \leq s + \mathbb{E}, t \neq s + \mathbb{E}, \text{ то } b_{s+\mathbb{E}} \leq 0.$$

Рассмотрим 1 как произведение рядов (1.1) и (1.2) и приравняем коэффициенты при x^u $(u \neq \mathbb{O})$

$$0 = \sum_{\mathbb{O} \leq t \leq u} a_s b_{u-t}.$$

Положим вначале $u = s + \mathbb{E}$

$$\sum_{\mathbb{O} \leq t \leq s+\mathbb{E}} a_t b_{s+\mathbb{E}-t} = 0, \tag{1.3}$$

а потом $u = s + \mathbb{E} - e_i$, i=1,2,...n,

$$\sum_{\mathbb{O} \leq t \leq s+\mathbb{E}-e_i} a_t b_{s+\mathbb{E}-e_i-t} = 0. \tag{1.4}$$

Домножим тождество (1.3) на число $n/a_{s+\mathbb{E}}$, а каждое из тождеств (1.4) на $-1/a_{s+\mathbb{E}-e_i}$. В результате коэффициент при $b_{\mathbb{O}}$ будет равен n в тождестве (1.3) и

-1 в каждом из тождеств (1.4). Сложив получившиеся тождества, мы получим линейную комбинацию коэффициентов b_t ($t \le s+\mathbb{E}$, $t \ne 0$), равную нулю. Тем самым, коэффициент при $b_{\mathbb{O}}$ станет равен 0. Обозначим через c_t коэффициент при b_t в полученном тождестве:

$$c_t = n\frac{a_{s+\mathbb{E}-t}}{a_{s+\mathbb{E}}} - \sum_{i=1}^{n} \frac{a_{s+\mathbb{E}-t-e_i}}{a_{s+\mathbb{E}-e_i}},$$

в случае, если $s+\mathbb{E} < t+e_i$ коэффициент $a_{s+\mathbb{E}-t-e_i}$ считаем равным 0.
Далее, выразим коэффициент $b_{s+\mathbb{E}}$ через оставшиеся получим:

$$b_{s+\mathbb{E}} = -\frac{a_{s+\mathbb{E}}}{a_{\mathbb{O}}}\left(\sum_{t\ne 0, t\ne s+\mathbb{E}, t\le s+\mathbb{E}} \frac{a_t b_{s+\mathbb{E}-t}}{a_{s+\mathbb{E}}} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{t\le s+\mathbb{E}-e_i, t\ne s+\mathbb{E}-e_i}\frac{a_t b_{s+\mathbb{E}-e_i-t}}{a_{s+\mathbb{E}-e_i}}\right) =$$

$$= -\frac{a_{s+\mathbb{E}}}{n a_{\mathbb{O}}}\sum_{t\ne 0, t\ne s+\mathbb{E}, t\le s+\mathbb{E}} c_t b_t.$$

Если мы докажем, что все числа c_t неположительны, то $b_{s+\mathbb{E}} \le 0$, и теорема 1 будет доказана. Для доказательства неравенств $c_t \le 0$ нам понадобится лемма.

Лемма. *Пусть s, t и u мультииндексы. Если выполнены условия теоремы 1.1 , то тройка (s,t,u) 1-выпукла.*

Доказательство леммы. Из условий b) и c) теоремы 1.1 следует, что тройки (s, e_i, e_j) 1-выпуклы для любых различных индексов i и j. Вместе с условием a) мы получаем, что все тройки (s, e_i, e_j) 1-выпуклы. Пусть $t = (t_1, ..., t_n)$. Докажем сначала частный случай леммы при $u = e_i$. Из 1-выпуклости троек $(s + e_i + t - ke_1, e_1, e_i)$, $1 \le k \le t_1$ получаем цепочку неравенств

$$\frac{a_{s+t+e_i}}{a_{s+t}} \ge \frac{a_{s+t+e_i-e_1}}{a_{s+t-e_1}} \ge \frac{a_{s+t+e_i-2e_1}}{a_{s+t-2e_1}} \ge ... \ge \frac{a_{s+t+e_i-t_1e_1}}{a_{s+t-t_1e_1}}.$$

Откуда тройка $(s+t-t_1e_1, e_i, t_1e_1)$ 1-выпукла. Продолжая цепочку неравенств, покажем, что любая тройка $(s + t - v, e_i, v)$ $(v \le t)$ 1-выпукла. Действительно, из 1-выпуклости троек $(s+e_i+t-t_1e_1-ke_2, e_2, e_i)$, $1 \le k \le t_2$ получаем цепочку неравенств

$$\frac{a_{s+t+e_i-t_1e_1}}{a_{s+t-t_1e_1}} \ge \frac{a_{s+t+e_i-t_1e_1-e_2}}{a_{s+t-t_1e_1-e_2}} \ge \frac{a_{s+t+e_i-t_1e_1-2e_2}}{a_{s+t-t_1e_1-2e_2}} \cdots \ge \frac{a_{s+t+e_i-t_1e_1-t_2e_2}}{a_{s+t-t_1e_1-t_2e_2}}.$$

Действуя таким образом и учитывая выпуклость троек $(s+e_i+t-\sum_{j=1}^m t_je_j-ke_{j+1}, e_2, e_i)$, $1 \le k \le t_{j+1}$, $1 \le m \le n-1$, имеем

$$\frac{a_{s+t+e_i}}{a_{s+t}} \ge \frac{a_{s+t+e_i-t_1e_1}}{a_{s+t-t_1e_1}} \ge \frac{a_{s+t+e_i-t_1e_1-t_2e_2}}{a_{s+t-t_1e_1-t_2e_2}} \ge \dots \ge \frac{a_{s+e_i}}{a_s}.$$

В частности, тройка (s, e_i, t) 1-выпукла при любом i. Тем самым $\dfrac{a_{s+t+e_i}}{a_{s+t}} \ge \dfrac{a_{s+e_i}}{a_s}$ при любых мультииндексах s и t и любом индексе i. Написав аналогичную цепочку неравенств

$$\frac{a_{s+t+u}}{a_{s+t}} \ge \frac{a_{s+t+u-e_1}}{a_{s+t-e_1}} \ge \frac{a_{s+t+u-2e_1}}{a_{s+t-2e_1}} \ge ... \ge \frac{a_{s+t+u-t_1e_1}}{a_{s+t-t_1e_1}},$$

получаем, что тройка $(s+t-t_1e_1, t_1e_1, u)$ 1-выпукла. Продолжая цепочку, имеем, что любая тройка $(s+t-v, v, u)$ $(v \le t)$ 1-выпукла. В частности, тройка (s, t, u). Лемма доказана. ◯

Осталось доказать, что коэффициент $c_t \le 0$. Пусть $t < s + \mathbb{E}$. Тогда

$$c_t = n\frac{a_{s+\mathbb{E}-t}}{a_{s+\mathbb{E}}} - \sum_{i=1}^{n} \frac{a_{s-e_i+\mathbb{E}-t}}{a_{s-e_i+\mathbb{E}}} = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{a_{s+\mathbb{E}-t}}{a_{s+\mathbb{E}}} - \frac{a_{s-e_i+\mathbb{E}-t}}{a_{s-e_i+\mathbb{E}}}\right].$$

Каждое из слагаемых в последней сумме неположительно. Следовательно, $c_t \le 0$. Если неверно, что $t < s+\mathbb{E}$, то хотя бы одна из координат мультиндекса $s+\mathbb{E}-t$ равны нулю. Пусть k число таких координат. Не умаляя общности можно считать, что это первые k координат мультииндекса $s+\mathbb{E}-t$. То есть, $t \ge E_k := \sum_{i=1}^k e_i$. Следовательно,

$$c_t = n\frac{a_{s+\mathbb{E}-t}}{a_{s+\mathbb{E}}} - \sum_{i=k+1}^{n} \frac{a_{s-e_i+\mathbb{E}-t}}{a_{s-e_i+\mathbb{E}}} = \sum_{i=k+1}^{n}\left[\frac{n}{n-k}\cdot\frac{a_{s+\mathbb{E}-t}}{a_{s+\mathbb{E}}} - \frac{a_{s-e_i+\mathbb{E}-t}}{a_{s-e_i+\mathbb{E}}}\right].$$

Докажем, что выражение в каждой скобке в последней сумме неположительно. Нам достаточно доказать, что

$$\frac{a_{s+\mathbb{E}-t}}{a_{s+\mathbb{E}-t-e_i}} \le \frac{n-k}{n}\frac{a_{s+\mathbb{E}}}{a_{s-e_i+\mathbb{E}}}, \quad k < i \le n.$$

Используя условие c) получаем, что

$$\frac{a_{s+\mathbb{E}-t}}{a_{s+\mathbb{E}-t-e_i}} \le \frac{n-k}{n-k+1}\cdot\frac{a_{s+\mathbb{E}-t+E_1}}{a_{s+\mathbb{E}-t-e_i+E_1}} \le$$

$$\leq \frac{n-k}{n-k+2}\cdot\frac{a_{s+\mathbb{E}-t+E_2}}{a_{s+\mathbb{E}-t-e_i+E_2}} \leq .. \leq \frac{n-k}{n}\cdot\frac{a_{s+\mathbb{E}-t+E_k}}{a_{s+\mathbb{E}-t-e_i+E_k}}.$$

Так как $t \geq E_k$, мы можем применить лемму и получить неравенство:

$$\frac{a_{s+\mathbb{E}-t+E_k}}{a_{s+\mathbb{E}-t-e_i+E_k}} \leq \frac{a_{s+\mathbb{E}}}{a_{s+\mathbb{E}-e_i}}.$$

Тем самым мы доказали, что все числа c_t неположительны. Теорема 1.1 полностью доказана. $\bigcirc$

1.4 Достаточные условия отрицательности коэффициентов обратного формального степенного ряда двух переменных.

Полученные в §2 результаты используют понятие B-выпуклости тройки мультииндексов (s,t,u),и требуют выполнение этого условия при $B>1$ бесконечное число раз, однако в случае формальных степенных рядов двух переменных полученный в §2 можно видоизменить и усилить, потребовав, чтобы условие B-выпуклости было выполнено только 1 раз при $B>1$.

Теорема 1.2. *Пусть коэффициенты $a_{m,n}$ формального степенного ряда 2 переменных*

$$f(x) = f(x_1,x_2) = \sum_{m,n\geq 0} a_{m,n}x_1^m x_2^n = \sum_{s\geq \mathbb{O}} a_s x^s, \tag{1.5}$$

с положительными коэффициентами $a_{m,n}$ удовлетворяют следующим условиям:

a) тройка $((0,0),e_1,e_2)$ 2-выпукла;

b) тройки (me_i,e_i,e_i) 1-выпуклы,$m\geq 0$, $1\leq i\leq 2$;

c) тройки $(ne_j,e_j,(m+1)e_i)$ 1-выпуклы при $m^2+n^2>0$, $i\neq j$;

d) для всех пар мультииндексов (m,n), таких что $m^2+n^2>0$, и для всех пар мультииндексов (k,l) таких, что $k^2+l^2>0$ и $(k,l)\leq(m,n)$ выполнено соотношение:

$$\frac{a_{m+1-k,n+1-l}}{a_{m+1,n+1}} - \frac{a_{m-k,n+1-l}}{a_{m,n+1}} - \frac{a_{m+1-k,n-l}}{a_{m+1,n}} + \frac{a_{m-k,n-l}}{a_{m,n}} \leq 0,$$

тогда все коэффициенты обратного ряда

$$g(x) = g(x_1, x_2) = \sum_{m,n\geq 0} b_{m,n} x_1^m x_2^n = \sum_{s\geq \mathbb{O}} b_s x^s \tag{1.6}$$

неположительны за исключением $b_{0,0}$.

Доказательство теоремы 1.2. Полагая $x_2 = 0$ и применяя условие b) теоремы для $i = 1, m \geq 0$, получим классическую теорему Харди-Калуца для случая одной переменной, откуда немедленно следует неположительность коэффициентов $b_{m,0}, m > 0$. Аналогично, полагая $x_1 = 0$ и применяя условие b) теоремы для $i = 2, m \geq 0$, получим неположительность коэффициентов $b_{0,n}, n > 0$.
Рассмотрим 1 как произведение рядов (1.5) и (1.6) и приравняем коэффициенты при x_1x_2, x_1 и x_2:

$$0 = a_{0,0}b_{1,1} + a_{1,0}b_{0,1} + a_{0,1}b_{1,0} + a_{1,1}b_{0,0}$$

$$0 = a_{0,0}b_{1,0} + a_{1,0}b_{0,0}$$

$$0 = a_{0,0}b_{0,1} + a_{0,1}b_{0,0}$$

Домножая первое тождество на $2/a_{1,1}$ и вычитая из него второе, умноженное на $1/a_{1,0}$ и третье, умноженное на $1/a_{0,1}$, получим следующее выражение:

$$0 = 2b_{1,1}\frac{a_{0,0}}{a_{1,1}} + b_{0,1}\left(2\frac{a_{1,0}}{a_{1,1}} - \frac{a_{0,0}}{a_{0,1}}\right) + b_{1,0}\left(2\frac{a_{0,1}}{a_{1,1}} - \frac{a_{0,0}}{a_{1,0}}\right)$$

Выражая коэффициент $b_{1,1}$ получим:

$$b_{1,1} = \frac{1}{2}(a_{1,1}a_{0,0} - 2a_{1,0}a_{0,1})\left(\frac{b_{0,1}}{a_{0,1}a_{0,0}} + \frac{b_{1,0}}{a_{1,0}a_{0,0}}\right)$$

Первая скобка в последнем тождестве будет неотрицательна ввиду условия а) теоремы, а вторая будет отрицательна ввиду отрицательности коэффициентов $b_{0,1}$ и $b_{1,0}$, следовательно, коэффициент $b_{1,1}$ неположителен.
Далее, не умаляя общности, мы можем считать, что $s \geq \mathbb{O}, s \neq \mathbb{O}$. Докажем, что и в этом случае будет выполнено неравенство $b_s \leq 0$. Нам достаточно доказать следующее утверждение:

$$\textit{если } b_t \leq 0 \text{ для всех } t \leq s + \mathbb{E}, t \neq s + \mathbb{E}, \text{ то } b_{s+\mathbb{E}} \leq 0.$$

Рассмотрим 1 как произведение рядов (1.5) и (1.6) и приравняем коэффициенты при x^u $(u \neq \mathbb{O})$

$$0 = \sum_{\mathbb{O} \leq t \leq u} a_t b_{u-t}.$$

Положим вначале $u = s + \mathbb{E}$

$$\sum_{\mathbb{O} \leq t \leq s+\mathbb{E}} a_t b_{s+\mathbb{E}-t} = 0, \tag{1.7}$$

потом $u = s + e_i$, i=1,2.

$$\sum_{\mathbb{O} \leq t \leq s+e_i} a_t b_{s+e_i-t} = 0, \tag{1.8}$$

затем $u = s$

$$\sum_{\mathbb{O} \leq t \leq s} a_t b_{s-t} = 0. \tag{1.9}$$

Домножим тождество (1.7) на число $1/a_{s+\mathbb{E}}$, каждое из тождеств (1.8) на $-1/a_{s+e_i}$, а тождество (1.9) на $1/a_s$. В результате коэффициент при $b_{\mathbb{O}}$ будет равен 1 в тождествах (1.7) и (1.9) и -1 в каждом из тождеств (1.8). Сложив получившиеся тождества, мы получим линейную комбинацию коэффициентов b_t $(t \leq s+\mathbb{E},\ t \neq 0)$, равную нулю. Обозначим через d_t коэффициент при b_t в полученном тождестве. Далее, выразим коэффициент $b_{s+\mathbb{E}}$ через оставшиеся:

$$b_{s+\mathbb{E}} = -\frac{a_{s+1}}{a_{\mathbb{O}}}\Bigg(\sum_{t\neq 0, t\neq s+\mathbb{E}, t\leq s+\mathbb{E}} \frac{a_t b_{s+\mathbb{E}-t}}{a_{s+1}} + \sum_{t\neq 0, t\neq s, t\leq s} \frac{a_t b_{s-t}}{a_s} -$$

$$- \sum_{t\neq 0, t\neq s+e_1, t\leq s+e_1} \frac{a_t b_{s+e_1-t}}{a_{s+e_1}} - \sum_{t\neq 0, t\neq s+e_2, t\leq s+e_2} \frac{a_t b_{s+e_2-t}}{a_{s+e_2}} \Bigg) =$$

$$= -\frac{a_{s+1}}{a_{\mathbb{O}}} \sum_{t\neq 0, t\neq s+\mathbb{E}, t\leq s+\mathbb{E}} d_t b_t.$$

Если доказать неположительность коэффициента d_t, то утверждение теоремы будет доказано, так как, все коэффициенты b_t отрицательны по предположению. Выразим коэффициент d_t в явном виде. Положим $s = (m, n)$. Тогда

$$d_{m+1,l} = \frac{a_{0,n+1-l}}{a_{m+1,n+1}} - \frac{a_{0,n-l}}{a_{m+1,n}}, \text{ для всех } l : 0 \leq l \leq n;$$

$$d_{k,n+1} = \frac{a_{m+1-k,0}}{a_{m+1,n+1}} - \frac{a_{m-k,0}}{a_{m,n+1}}, \text{ для всех } k : 0 \leq k \leq m;$$

$$d_{k,l} = \frac{a_{m+1-k,n+1-l}}{a_{m+1,n+1}} - \frac{a_{m-k,n+1-l}}{a_{m,n+1}} - \frac{a_{m+1-k,n-l}}{a_{m+1,n}} + \frac{a_{m-k,n-l}}{a_{m,n}},$$

для всех $k, l : 0 \le l \le n, 0 \le k \le m, k^2 + l^2 > 0.$

Неположительность последнего выражения следует из условия d) теоремы. Докажем неположительность первых двух выражений. Действительно, неравенство $\frac{a_{m+1,n+1}}{a_{m+1,n}} \ge \frac{a_{0,n+1}}{a_{0,n}}$ верно ввиду условия c) теоремы, а неравенство $\frac{a_{0,n+1}}{a_{0,n}} \ge \frac{a_{0,n+1-l}}{a_{0,n-l}}$ истинно ввиду условия b) теоремы, откуда следует, что

$$\frac{a_{m+1,n+1}}{a_{m+1,n}} \ge \frac{a_{0,n+1-l}}{a_{0,n-l}},$$

что влечет отрицательность числа $d_{m+1,l}$. Отрицательность коэффициента $d_{k,n+1}$ доказывается аналогично. Теорема 1.2 полностью доказана. ○

1.5 Примеры

В настоящем параграфе будут приведены примеры рядов двух переменных с положительным коэффициентами, у которых обратный ряд имеет все неположительные коэффициенты кроме нулевого.

Пример 1.1. *Пусть коэффициенты $a_{m,n}$ формального степенного ряда 2 переменных*

$$f(x) = f(x_1, x_2) = \sum_{m,n \ge 0} a_{m,n} x_1^m x_2^n$$

удовлетворяют соотношениям $a_{m,n} = 2^{mn}$ для всех чисел m, n.

Легко проверить, что коэффициенты $a_{m,n}$ данного ряда удовлетворяют условиям теоремы 1.1 §2 и тем самым обратный имеет все неположительные коэффициенты кроме нулевого. Однако, коэффициенты этого ряда не удовлетворяют условиям теоремы 1.2 §4 (условие d) теоремы).

Пример 1.2. *Пусть коэффициенты $a_{m,n}$ формального степенного ряда двух переменных*

$$f(x) = f(x_1, x_2) = \sum_{m,n \ge 0} a_{m,n} x_1^m x_2^n$$

удовлетворяют соотношениям $a_{0,0} = 1$, $a_{m,n} = C_{m+n}^n$.

Легко видеть, что обратным к нему будет ряд $g(x_1, x_2) = 1 - x_1 - x_2$, однако коэффициенты ряда f не удовлетворяют условиям теоремы 1.1 §2 и теоремы 1.2 §4.

Пример 1.3. *Пусть коэффициенты $a_{m,n}$ формального степенного ряда двух переменных*

$$f(x) = f(x_1, x_2) = \sum_{m,n \geq 0} a_{m,n} x_1^m x_2^n$$

удовлетворяют соотношениям $a_{0,0} = 1$, $a_{m,n} = 1/2$ в остальных случаях.

Очевидно, что коэффициенты ряда удовлетворяют условиям a), b), c) теоремы 1.2 §4, однако не всегда выполняются условия d) теоремы 1.2 §4. Легко видеть, что коэффициенты этого ряда не удовлетворяют условиям теоремы 1.1 §2 (условие c) теоремы). Кроме того, коэффициент $b_{(1,2)}$ обратного ряда будет положительным. Тем самым условие d) является важным.

Утверждение 1.1. *Пусть коэффициенты $a_{m,n}$ формального степенного ряда 2 переменных*

$$f(x) = f(x_1, x_2) = \sum_{m,n \geq 0} a_{m,n} x_1^m x_2^n$$

удовлетворяют условиям теоремы 1.1 §2. И пусть выполнено соотношение

$$a_{0,0} = a_{0,1} = a_{1,0} = 1.$$

Тогда

$$a_{m,n} \geq 2^{mn}.$$

Доказательство утверждения 1.1. Условие a) теоремы 1.1 о 1-выпуклости троек (s, e_i, e_i) для $s = me_i$, $1 \leq i \leq 2$, $m \geq 0$ гарантирует выполнение того, что коэффициенты $a_{m,0} \geq 1$ и $a_{0,n} \geq 1$.

Докажем, что если выполнено условие $a_{m,0} = p \geq 1$, то тогда $a_{m,1} \geq 2^m p$. Доказательство будем проводить по индукции по m.

База: $m = 1$. Условие c) теоремы 1.1 2-выпуклости троек $((0,0), e_1, e_2)$ влечет выполнение неравенства $a_{1,1} \geq 2$.

Переход от m к $m+1$. Положим $a_{m,0} = p \geq 1$, $a_{m,1} = 2^m r$, $r \geq p$ и $a_{m+1,0} = q$.

Ввиду выполнения условие c) теоремы 1.1 о 2-выпуклости троек $((m,0),e_1,e_2)$, имеем:

$$a_{m+1,1}a_{m,0} \geq 2a_{m+1,0}a_{m,1},$$

откуда получаем, что

$$a_{m+1,1} \geq 2\frac{2^m rq}{p} \geq 2^{m+1}q.$$

Поскольку при всех натуральных числах m верно $a_{m,0} = p \geq 1$ и $a_{m,1} \geq 2^m p.$, то применив условие a) теоремы 1.1 о 1-выпуклости троек $((m,0),e_2,e_2)$, получаем, что $a_{m,n} \geq 2^{mn}r \geq 2^{mn}$. Утверждение 1.1 доказано. ◯

1.6 Общее условие Харди-Калуца

Для того чтобы сформулировать результат в случае рядов одной переменной понадобится

Определение 1.2. *Будем говорить, что последовательность $(a_k)_0^\infty$ удовлетворяет условию Харди-m по отношению к набору чисел $b_0, b_1, b_2, ..., b_{m-1}$ если при всех натуральных числах k выполнено соотношение:*

$$a_{k-1}\sum_{t=0}^{m-1} b_t a_{k+m-t} \geq a_k \sum_{t=0}^{m-1} b_t a_{k+m-1-t}. \qquad (1.10)$$

Теорема 1.3. *Пусть формальный степенной ряд одной переменной $f(x) = \sum_{k=0}^\infty a_k x^k$ с положительными коэфиицентами a_k и коэффициенты b_k обратного ряда $g(x) = \sum_{k=0}^\infty b_k x^k$ удовлетворяет следующим условиям:*
a) $b_0 > 0$, $b_1, ..., b_{m-1} \leq 0$;
b) последовательность (a_k) удовлетворяет условию Харди-m по отношению к числам $b_0, b_1, ..., b_{m-1}$;
тогда все коэффициенты обратного ряда g неположительны за исключением b_0.

Заметим, что при $m = 1$ условие Харди-m есть в точности условие Харди-Калуца.

Доказательство теоремы 1.3. Будем проводить доказательство по индукции. Нам достаточно доказать, что $b_{k+m} \leq 0$ при $k > 0$ если мы знаем что

$b_l \leq 0$ при $0 < l < k+m$. Рассмотрим 1 как произведение рядов f и g и приравняем коэффициенты при x^u ($u \neq 0$)

$$\sum_{0 \leq t \leq u} a_s b_{u-t} = 0.$$

Полагая последовательно $u = k, k+1, ..., k+m$, получим $(m+1)$ тождество

$$\sum_{0 \leq t \leq k} a_t b_{k-t} = 0,$$

$$\sum_{0 \leq t \leq k+1} a_t b_{k+1-t} = 0,$$

$$\dots$$

$$\sum_{0 \leq t \leq k+m} a_t b_{k+m-t} = 0.$$

Домножим $(m+1)$-е тождество на b_0 , m-е - на b_1,..., второе - на - b_{m-1}, а первое - на

$$X = -\frac{1}{a_k} \sum_{0 \leq t \leq m-1} a_{k+m-t} b_t$$

и сложим полученные тождества:

$$b_0 \sum_{t=0}^{k+m} b_t a_{k+m-t} + b_1 \sum_{t=0}^{k+m-1} b_t a_{k+m-1-t} + \dots + b_{m-1} \sum_{t=0}^{k+1} b_t a_{k+1-t} + X \sum_{t=0}^{k} b_t a_{k-t} = 0.$$

Преобразуем полученное выражение по следующему правилу: разобьем первые суммы на две

$$b_0 \left(\sum_{t=0}^{k} b_t a_{k+m-t} + \sum_{t=k+1}^{k+m} b_t a_{k+m-t} \right) + b_1 \left(\sum_{t=0}^{k} b_t a_{k+m-1-t} + \sum_{t=k+1}^{k+m-1} b_t a_{k+m-1-t} \right) + \cdots$$

$$+ b_{m-1} \left(\sum_{t=0}^{k} b_t a_{k+1-t} + b_{k+1} a_0 \right) + X \sum_{t=0}^{k} b_t a_{k-t} = 0.$$

Преобразовывая, получим

$$\sum_{t=0}^{k} b_t \left(a_{k-t} X + \sum_{i=0}^{m-1} b_i a_{k+m-i-t} \right) + \sum_{i=1}^{m} b_{i+k} \sum_{t=0}^{m-i} a_t b_{m-i-t} = \Sigma_1 + \Sigma_2 = 0.$$

Заметим, что все коэффициенты в сумме Σ_2 кроме последнего равны нулю. То есть $\Sigma_2 = b_{k+m}a_0b_0 = b_{k+m}$. Пусть

$$c_t = -\left(a_{k-t}X + \sum_{i=0}^{m-1} b_i a_{k+m-i-t}\right), 0 \leq t \leq k.$$

Заметим, что $c_0 = 0$ из-за выбора числа X. Таким образом

$$b_{k+m} = \sum_{t=1}^{k} b_t c_t.$$

Если мы докажем, что числа c_t неотрицательны, то тем самым мы докажем, что $b_{k+m} \leq 0$. Далее,

$$c_t = -a_{k-t}X - \sum_{i=0}^{m-1} b_i a_{k+m-i-t} = a_{k-t}\left[\frac{1}{a_k}\sum_{t=0}^{m-1} b_t a_{k+m-t} - \frac{1}{a_{k-t}}\sum_{i=0}^{m-1} b_i a_{k+m-i-t}\right].$$

Переписав, получим:

$$c_t = a_{k-t}\left[\frac{1}{a_k}\sum_{i=0}^{m-1} b_i a_{k+m-i} - \frac{1}{a_{k-t}}\sum_{i=0}^{m-1} b_i a_{k+m-i-t}\right].$$

Для доказательства положительности последнего выражения воспользуемся условием Харди-m

$$\frac{1}{a_k}\sum_{i=0}^{m-1} b_i a_{k+m-i} \geq \frac{1}{a_{k-1}}\sum_{i=0}^{m-1} b_i a_{k+m-1-i} \geq \dots \geq \frac{1}{a_{k-t}}\sum_{i=0}^{m-1} b_i a_{k-i+m-1-t}.$$

То есть $c_t \geq 0$. Теорема 1.3 полностью доказана. $\bigcirc$

1.7 Примеры.

Замечание 1.1. *Условия теоремы 1.3 не являются необходимыми ни при каком m.*

Доказательство замечания 1.1. Построим формальный степенной ряд, для которого все коэффициенты обратного ряда будут отрицательны и для которого при всех натуральных m и при $n = 2$ не будет верно условие Харди-m (1.10). Рассмотрим ряд

$$\frac{1}{f(x)} = 1 - 2x - x^2 - \sum_{k=3}^{\infty} \frac{x^k}{3^{k-2}}.$$

Заметим, что у ряда f все коэффициенты будут положительны (формальный степенной ряд, обратный формальному степенному ряду с первым положительным коэффициентом и остальными отрицательными, будет иметь только положительные коэффициенты). Проверим условие Харди-m (1.10) для произвольного натурального числа m и при $n = 2$

$$a_1 \sum_{t=0}^{m-1} a_{m+2-t} b_t \geq a_2 \sum_{t=0}^{m-1} a_{m+1-t} b_t. \tag{1.11}$$

Так как при всех натуральных l выполнено соотношение

$$\sum_{t=0}^{l} a_{t-l} b_t = 0, \tag{1.12}$$

получаем из (1.11) (полагая в (1.12) $l = m+1, m+2$):

$$a_1(-b_m a_2 - b_{m+1} a_1 - b_{m+2} a_0) \geq a_2(-b_m a_1 - b_{m+1} a_0),$$

откуда имеем для выбранного ряда $b_{m+2} \leq b_{m+1} \frac{a_0 a_2 - a_1^2}{a_0 a_1}$. Вычислив первые три коэффициента ряда $f(x)$, получим $a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 5$, откуда следует, что $b_{m+1} \frac{a_0 a_2 - a_1^2}{a_0 a_1} = \frac{b_{m+1}}{2}$. Следовательно,

$$b_{m+2} \leq \frac{b_{m+1}}{2}.$$

Заметим, что у построенного ряда при всех натуральных $m > 2$

$$b_{m+2} = \frac{b_{m+1}}{3}, \tag{1.13}$$

поэтому в силу отрицательности b_m условие (1.10) быть выполнено не может. Замечание 1.1 доказано. $\bigcirc$

Замечание 1.2. Приведем пример ряда, для которого не выполнено условие Харди-Калуца, но выполнено условие Харди-2:

$$a_{k-1}(a_{k+1} b_0 + a_{k+1} b_1) \geq a_k(a_{k+1} b_0 + a_k b_1). \tag{1.14}$$

Доказательство замечания 1.2. Рассмотрим формальный степенной ряд $g(x) = 1-2x-x^2$ и обратный ему ряд $f(x) = 1+2x+5x^2+12x^3+... = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$. Нетрудно проверить, что условие Харди не будет выполнено, при $k = 2$, а условие (1.14) превращается в равенство.$\bigcirc$

Замечание 1.3. Покажем, что для всякого натурального числа m найдется ряд, удовлетворяющий условию Харди-m, но для которого при всех натуральных числах k<m, не выполняется условие Харди-k. **Доказательство замечания 1.3.**Приведем пример ряда: рассмотрим формальный степенной ряд $g_m(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, с коэффициентами b_n, заданными по следующему правилу: $b_0 = 1$, $b_n = -2^n$ при $1 \leq n \leq m-1$, $b_m = -1$, $b_n = 0$ при $n > m$. Докажем, что ряд $f_m(x) = \dfrac{1}{g_m(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ будет удовлетворять требуемым условиям.
Заметим сперва, что у ряда f_m все коэффициенты будут положительны (формальный степенной ряд, обратный формальному степенному ряду с первым положительным коэффициентом и остальными неположительными, будет иметь только положительные коэффициенты). Оставшуюся часть доказательства разобьем на 3 этапа:

1. Вычислим явно первые m коэффициентов ряда f_m.
2. Проверим, что выполнено условие Харди-m.
3. Проверим, что при всех натуральных числах $k < m$ не выполняется условие Харди-k.

1. $a_0 = 1$, $a_n = 2^{2n-1}$, при $1 \leq n \leq m-1$ и $a_m = 2^{2m-1} - 2^m + 1$.

Действительно, по построению видно, что $a_0 = 1$. Поскольку для всех натуральных n выполнено соотношение

$$b_0 a_n = -(b_1 a_{(n-1)} + b_2 a_{(n-2)} + \cdots + b_n a_0), \tag{1.15}$$

получаем $a_1 = 2$, $a_n = 2^{2n-3} \cdot 2 + 2^{2n-5} \cdot 2^2 + \cdots + 2 \cdot 2^{n-1} + 1 \cdot 2^n = 2^{2n-1}$ при $1 \leq n \leq m-1$. Принимая в (1.15) $n = m$, имеем

$$a_m = 2^{2m-3} \cdot 2 + 2^{2m-5} \cdot 2^2 + \cdots + 2 \cdot 2^{m-1} + 1 \cdot 1 = 2^{2m-1} - 2^m + 1.$$

2. Используя теорему 1.3, проверим выполнение условий a) и b) теоремы. Условие a), очевидно, выполнено по построению ряда f_m. Для проверки условия b)

теоремы перепишем тождество (1.10) в более удобной форме:

$$\frac{1}{a_k}(b_0a_{k+m}+b_1a_{k+m-1}+\dots+b_{m-1}a_{k+1})\geq$$
$$\geq\frac{1}{a_{k-1}}(b_0a_{k+m-1}+b_1a_{k+m-2}+\dots+b_{m-1}a_k). \quad (1.16)$$

Так как при всех натуральных l верно

$$\sum_{t=0}^{l}a_{t-l}b_t=0, \quad (1.17)$$

полагая в (1.17) ($l=m+k, m+k-1$) имеем:

$$b_0a_{k+m}+b_1a_{k+m-1}+\cdots b_ma_k+b_{m+1}a_{k-1}+\dots+b_{m+k}a_0=0,$$
$$b_0a_{k+m-1}+b_1a_{k+m-2}+\cdots b_ma_{k-1}+b_{m+1}a_{k-2}+\dots+b_{m+k-1}a_0=0.$$

Учитывая, что $b_n=0$ при $n>m$, получим:

$$b_0a_{k+m}+b_1a_{k+m-1}+\dots+b_ma_k=0,$$

$$b_0a_{k+m-1}+b_1a_{k+m-2}+\dots+b_ma_{k-1}=0.$$

Перенося b_ma_k и b_ma_{k-1} в правую часть и подставляя полученное в (1.16), получим верное равенство $-b_m=-b_m$.
3. Пусть $k<m$ и пусть для удобства $m=n+k$. Перепишем неравенство (1.10) для $m=k$ и $k=n$

$$\frac{1}{a_n}(b_0a_{k+n}+b_1a_{k+n-1}+\dots+b_{k-1}a_{n+1})\geq$$
$$\geq\frac{1}{a_{n-1}}(b_0a_{k+n-1}+b_1a_{k+n-2}+\dots+b_{k-1}a_n). \quad (1.18)$$

Поскольку $m=n+k$, в (1.18) надо подставить выражения для чисел a_i и b_j для опровержения его истинности.

$$\frac{1}{2^{2m-2k-1}}(2^{2m-1}-2^m+1-(2\cdot 2^{2m-3}+4\cdot 2^{2m-5}+\dots+2^{k-1}\cdot 2^{2m-2k+1}))\geq$$

$$\geq\frac{1}{2^{2m-2k-3}}(2^{2m-3}-(2\cdot 2^{2m-5}+4\cdot 2^{2m-7}+\dots+2^{k-1}\cdot 2^{2m-2k-1})).$$

Упрощая, получим:

$$(2^{2m-1} - 2^m + 1 - (2^{2m-2} + 2^{2m-3} + \cdots + 2^{2m-k})) \geq$$
$$\geq 4(2^{2m-3} - (2^{2m-4} + 2^{2m-5} + \cdots + 2^{2m-k-2})).$$

Откуда имеем $2^{2m-k} - 2^m + 1 \geq 2^{2m-k}$, что и дает опровержение условия Харди-k. Замечание 1.3 доказано. ◯

Приведем еще один пример формального степенного ряда, для которого все коэффициенты обратного ряда будут отрицательны и для которого при всех натуральных m и при $k = 2$ не будет верно условие Харди-m (1.10). Рассмотрим ряд:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} F_k^2 x^k,$$

где F_k обозначает последовательность чисел Фибоначчи ($F_0 = 1, F_1 = 1, F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, при всех натуральных n). Нетрудно проверить, что обратный ряд имеет вид:

$$\frac{1}{f(x)} = 1 - x - 3x^2 - \sum_{k=3}^{\infty} 2x^k.$$

Покажем, что в таком случае условия Харди-Калуца и Харди-m не выполняются при всех натуральных k.

$m = 1$. В этом случае условие Харди-1 совпадает в точности с условие Харди-Калуца, в частности надо проверить условие

$$F_{k-1}^2 F_{k+1}^2 \geq F_k^4,$$

которое неверно при $k = 2$.

$m = 2$. В этом случае условие Харди-2 имеет вид:

$$F_{k-1}^2(F_{k+2}^2 - F_{k+1}^2) \geq F_k^2(F_{k+1}^2 - F_k^2),$$

что так же неверно при $k = 2$.

$m > 2$. В этом случае условие Харди-m имеет вид:

$$F_{k-1}^2(F_{k+m}^2 - F_{k+m-1}^2 - 3F_{k+m-2}^2 - 2F_{k+m-3}^2 - \cdots - 2F_{k+1}^2) \geq$$
$$\geq F_k^2(F_{k+m-1}^2 - F_{k+m-2}^2 - 3F_{k+m-3}^2 - 2F_{k+m-4}^2 - \cdots - 2F_k^2).$$

По свойствам чисел Фибоначчи $F_{k+m}^2 - F_{k+m-1}^2 - 3F_{k+m-2}^2 = (F_{k+m-1} + F_{k+m-2})^2 - F_{k+m-1}^2 - 3F_{k+m-2}^2 = 2F_{k+m-3}F_{k+m-2}$.
Аналогично,

$$F_{k+m}^2 - F_{k+m-1}^2 - 3F_{k+m-2}^2 - 2F_{k+m-3}^2 - \cdots - 2F_{k+1}^2 = 2F_kF_{k+1}$$

и

$$F_{k+m-1}^2 - F_{k+m-2}^2 - 3F_{k+m-3}^2 - 2F_{k+m-4}^2 - \cdots - 2F_k^2 = 2F_kF_{k-1}.$$

Поэтому условие Харди-m примет вид:

$$2F_{k-1}^2F_kF_{k+1} \geq 2F_k^2F_kF_{k-1},$$

что неверно при всех четных k, в частности при $k = 2$.

Глава 2.
Степенные ряды с условием логарифмической выпуклости коэффициентов начиная с некоторого места.

2.1 Введение.

Цель настоящей главы — обобщить результаты, полученные Калуца и используемые Харди для рядов одной переменной, на случай нескольких переменных, получив тем самым некоторые *достаточные* условия на коэффициенты, работающие для формальных степенных рядов. Во втором параграфе вводятся вспомогательные обозначения и дается определение *условия К-Харди* , а также дается формулировка основного результата на случай формальных степенных рядов нескольких переменных (теорема 2.1 §2). В третьем параграфе приводится вспомогательная лемма, показывающая асимптотику коэффициентов обратного ряда. Четвертый параграф посвящен доказательству результата параграфа 2. В пятом дается определение *условия К-Харди* , формулируется теорема 2.3, касающаяся рядов нескольких переменных. Шестой параграф посвящен доказательству подготовительных лемм и замечаний, показывающих асимптотику коэффициентов обратного ряда на случай нескольких переменных. В седьмом параграфе доказывается основной результат параграфа 5 (теорема 2.3 §5). Восьмой параграф содержит доказательство лемм из параграфа 7.

2.2 Основные определения и формулировки.

Пусть дан формальный степенной ряд

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \tag{2.1}$$

с положительными коэффициентами. Рассмотрим формальный степенной ряд, обратный исходному

$$g(x) = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n, f(x)g(x) = 1. \tag{2.2}$$

Мы хотим знать, при каких $a_0, \cdots, a_n$ коэффициенты $b_0, \cdots, b_n$ обратного ряд $g(x)$ удовлетворяют условиям:

$$b_0 > 0, \qquad b_n \leq 0, \quad n > 0. \tag{2.3}$$

В классической теореме Харди-Калуца для неположительности коэффициентов обратного ряда (2.2) требуется выполнение условия логарифмической выпуклости коэффициентов исходного ряда (2.1) при всех числах $n \geq 0$:

$$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} \geq \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Это условие при $n = 0$ естественным образом получается, если выписать явным образом первые коэффициенты обратного ряда: $b_0 = \dfrac{1}{a_0}$, $b_1 = \dfrac{-a_1}{a_0^2}$ и $b_2 = \dfrac{a_1^2 - a_0 a_2}{a_0^3}$. Кроме того, отсюда сразу же видно, что первый коэффициент обратного ряда $b_1 = \dfrac{-a_1}{a_0^2}$ будет отрицательным при всех положительных числах a_0 и a_1, отрицательность остальных элементов b_n вытекает из теоремы Харди-Калуца.

Условие логарифмической выпуклости элементов последовательности a_n может выполняться не при всех числах $n \geq 0$, а выполняться, начиная с некоторого места.

В дальнейшем нам потребуется следующее определение.

Определение 2.1. *Пусть $\{a_n\}$ — последовательность положительных чисел, K — натуральное число. Говорят, что последовательность удовлетворяет условию K-Харди, если при всех натуральных $n \geq K$ выполнено условие:*

$$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} \geq \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Теорема 2.1. *Положим $f(x) = a_0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$- формальный степенной ряд. Рассмотрим $g(x) = \frac{1}{f(x)} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$- формальный степенной ряд обратный к $f(x)$. Тогда, для любой последовательности чисел $a_1, a_2, \ldots,$, удовлетворяющей условию K-Харди, существует достаточно большое число a_0 такое, что числа $b_n < 0$ при всех натуральных n.*

2.3 Подготовительные леммы.

Рассмотрим коэффициент b_l обратного степенного ряда (2.2) как функцию от коэффициентов $a_0, a_1, \ldots, a_l$ ряда (2.1).

Лемма 2.1. *Коэффициент b_l обратного степенного ряда* (2.2) *будет иметь вид*

$$\frac{1}{a_0^{l+1}} P_l(a_0),$$

где P_l – многочлен степени $(l-1)$ от a_0, с коэффициентами, зависящими только от $(a_1, \ldots, a_l)$, причем старший коэффициент многочлена равен $(-a_l)$.

Доказательство леммы 2.1. Индукция по l. База $l = 1$. Перемножив формальные степенные ряды $f(x)$ и $g(x)$ и приравняв коэффициенты при нулевой и первой степенях, получим, что $a_0 b_0 = 1$ и $a_1 b_0 + a_0 b_1 = 0$.

откуда $b_0 = \frac{1}{a_0}$ и $b_1 = \frac{-a_1}{a_0^2}$.

Переход от l к $l+1$. Пусть набор $b_1, \ldots, b_l$ удовлетворяет условию леммы 1. Докажем, что b_{l+1} тоже представляется в требуемом виде.

Поскольку $1 = f(x)g(x)$ и коэффициент при x^{l+1} равен 0, имеем:

$$0 = a_0 b_{l+1} + a_1 b_l + \ldots + a_{l+1} b_0.$$

Следовательно, выражая коэффициент b_{l+1} и по предположению индукции имеем:

$$\begin{aligned}
b_{l+1} a_0 = -a_1 b_l - a_2 b_{l-1} - \ldots - a_{l+1} b_0 = \\
= -\left[\frac{a_1 P_l(a_0)}{a_0^{l+1}} + \frac{a_2 P_{l-1}(a_0)}{a_0^l} + \cdots + \frac{a_l P_1(a_0)}{a_0^2} + \frac{a_{l+1}}{a_0}\right] = \\
= -\frac{1}{a_0^{l+1}} \left[a_1 P_l(a_0) + a_2 a_0 P_{l-1}(a_0) + a_3 a_0^2 P_{l-2}(a_0) + \ldots + a_l a_0^{l-1} P_1(a_0)\right] - \\
- \frac{1}{a_0^{l+1}} a_{l+1} a_0^l = -\frac{1}{a_0^{l+1}} Q_l(a_0) - \frac{1}{a_0^{l+1}} a_{l+1} a_0^l,
\end{aligned}$$

где $Q_l(a_0)$ - многочлен степени $(l-1)$ от a_0, и $a_{l+1} a_0^l$ - многочлен степени l, старший коэффициент которого равен a_l.

Тем самым, мы получили, что

$$b_{l+1} = \frac{1}{a_0^{l+2}} \left[-Q_l(a_0) - a_{l+1} a_0^l\right].$$

Лемма 2.1 доказана.◯

Следующие два замечания показывают асимптотику коэффициентов b_l.

Замечание 2.1. *Для всех натуральных чисел l верно следующее соотношение:*

$$\lim_{a_0 \to \infty} -\frac{b_l}{a_l} a_0^2 = 1.$$

Замечание 2.2. *Пусть N - натуральное число. Тогда существует положительное число A такое, что при всех $a_0 > A$ и для всех натуральных чисел $s = 1, 2, .., N$, выполнено соотношение:*

$$\left| b_s + \frac{a_s}{a_0^2} \right| < \frac{1}{2} \frac{a_s}{a_0^2}. \tag{2.4}$$

Доказательство замечания 2.2. По определению предела, из замечания 2.1

следует, что при каждом натуральном числе $s = 1, 2, .., N$, существует положительное число A_s такое, что при $a_0 > A_s$ верно неравенство

$$\left| b_s : \frac{a_s}{a_0^2} + 1 \right| < \frac{1}{2}.$$

Домножив последнее неравенство на $\frac{a_s}{a_0^2}$, получим требуемое неравенство. Положим $A = max(A_1, A_2, \cdots, A_N)$. Замечание 2.2 доказано. $\bigcirc$
Неравенство (2.4) можно переписать в виде:

$$-\frac{3}{2}\frac{a_s}{a_0^2} < b_s < -\frac{1}{2}\frac{a_s}{a_0^2} \text{ при всех } s = 1, 2, .., N.$$

2.4 Доказательство теоремы 2.1.

Доказательство теоремы 2.1. Отрицательность чисел b_n при $n \leq K$ вытекает из замечания 2.2. Докажем, что $b_n < 0$, при $n > K$. Проведём доказательство по индукции $n = K + l$, $l \geq 1$.
Обозначим через

$$m = \frac{a_{K+1}}{a_K}; \qquad M = max \left[\frac{a_S}{a_{S-1}} \right], \ S = 2, \dots, K;$$

$$T = max\, a_S, S = 1, \dots, K; \quad \alpha = \frac{4(M+m)T}{m}.$$

База $l = 1$.
Перемножим ряды $f(x)$ и $g(x)$, и запишем коэффициенты при x^{K+1} и x^K, которые равны 0.

$$a_{K+1}b_0 + a_K b_1 + \ldots + a_1 b_K + a_0 b_{K+1} = 0, \tag{2.5}$$

$$a_K b_0 + a_{K-1} b_1 + \ldots + a_1 b_{K-1} + a_0 b_k = 0. \tag{2.6}$$

Домножим тождество (2.5) на a_K, а тождество (2.6) на a_{K+1}, и вычитая одно из другого, получим:

$$a_0 a_K b_{K+1} + b_K[a_1 a_K - a_0 a_{K+1}] + b_{K+1}[a_2 a_K - a_1 a_{K-1}] + \ldots$$
$$\ldots + b_1[a_K a_K - a_{K-1} a_{K+1}] = 0. \tag{2.7}$$

Выражая из (2.7) $a_0 a_K b_{K+1}$, имеем:

$$a_0 a_K b_{K+1} = b_K[a_{K+1}a_0 - a_K a_1] + b_{K-1}[a_{K+1}a_1 - a_K a_2] + \ldots$$
$$\ldots + b_1[a_{K+1}a_{K-1} - a_K^2]. \quad (2.8)$$

Чтобы доказать отрицательность числа b_{K+1}, достаточно доказать отрицательность правой части предыдущего тождества. Потребуем, чтобы выполнялось условие:

$$a_0 > \frac{2a_K a_1}{a_{K+1}} = \frac{2a_1}{m},$$

тогда будет выполняться условие $(a_{K+1}a_0 - a_K a_1) > 0$, тем самым, коэффициент при b_K будет строго положительным, а первое слагаемое в тождестве (2.8) будет отрицательным.

Лемма 2.2. *При выполнении условий теоремы 2.1 верно следующее неравенство:*

$$\frac{1}{2}|b_K|(a_{K+1}a_0 - a_K a_1) > \sum_{S=1}^{K-1} |b_S||(a_{K+1}a_S - a_K a_{S+1})|.$$

Если это доказать, то так как число b_K отрицательно, и сумма модулей последних $(K-1)$ слагаемых будут меньше в два раза, чем первое слагаемое по модулю, следовательно, их сумма будет иметь знак первого слагаемого, которое отрицательно.

Доказательство леммы 2.2. Оценивая правую часть неравенства:

$$\sum_{S=1}^{K-1} |b_{K-S}||(a_{K+1}a_S - a_K a_{S+1})| = a_K \sum_{S=1}^{K-1} |b_{K-S}|\,|a_S| \left|\left(\frac{a_{K+1}}{a_K} - \frac{a_{S+1}}{a_S}\right)\right| <$$
$$< T a_K \sum_{S=1}^{K-1} |b_{K-S}| \left|\frac{a_{K+1}}{a_K} - \frac{a_{S+1}}{a_S}\right| < (M+m)\,T \sum_{S=1}^{K-1} |b_{K-S}||a_K|.$$

Следовательно, нам остается проверить, что

$$\frac{1}{2}|b_K|a_0 a_K \left(\frac{a_{K+1}}{a_K} - \frac{a_1}{a_0}\right) > (M+m)\,T a_K \sum_{S=1}^{K-1} |b_{K-S}| = (M+m)\,T a_K \sum_{S=1}^{K-1} |b_S|.$$

Оценим левую часть неравенства. Поскольку выполнено условие $a_0 > \frac{2a_1}{m}$, то будет верно неравенство:

$$\frac{a_{K+1}}{a_K} - \frac{a_1}{a_0} > \frac{m}{2},$$

откуда следует, что

$$\frac{1}{2}|b_K|a_0a_K\left(\frac{a_{K+1}}{a_K} - \frac{a_1}{a_0}\right) > \frac{m}{4}|b_K|a_0a_K.$$

Докажем неравенство:

$$\frac{m}{4}|b_K|a_0a_K > (M+m)\,Ta_K\sum_{S=1}^{K-1}|b_S|.$$

Сокращая обе части предыдущего неравенства на $\frac{m}{4}a_K$, получим:

$$a_0|b_K| > \alpha\sum_{S=1}^{K-1}|b_S|. \tag{2.9}$$

Если доказать неравенство (2.9), то лемма 2.2 будет доказана.

Лемма 2.3. *В условиях теоремы, при выполнении условия* $a_0 > \frac{3\alpha}{a_K}\sum\limits_{S=1}^{K-1}a_S$ *неравенство* (2.9) *верно.*

Доказательство леммы 2.3. В силу замечания 2.2, при всех $S = 1, \ldots, K$ верны оценки на числа $|b_S|$:

$$\frac{1}{2}\frac{a_s}{a_0^2} < |b_S| < \frac{3}{2}\frac{a_S}{a_0^2}.$$

Применяя левую оценку при $S = K$ из предыдущего неравенства, воспользовавшись условием $a_0 > \frac{3\alpha}{a_K}\sum\limits_{S=1}^{K-1}a_S$ и применив правую оценку при $S = 1, \ldots, K-1$ из предыдущего неравенства, получим цепочку неравенств:

$$a_0|b_K| > \frac{1}{2}a_0\frac{a_K}{a_0^2} > \frac{3}{2}\frac{\alpha}{a_0^2}\sum_{S=1}^{K-1}a_S > \alpha\sum_{S=1}^{K-1}|b_S|.$$

Тем самым лемма 2.3, лемма 2.2 доказаны, ◯ и, следовательно, база в доказательстве теоремы доказана.

Замечание 2.3. *В дальнейшем нам потребуется модификация неравенства* (2.9) *, а именно*

$$Ca_0|b_K| > \alpha \sum_{S=1}^{K-1} |b_S|.$$

Очевидно, что если число a_0 удовлетворяет условию

$$a_0 > \frac{3\alpha}{Ca_K} \sum_{S=1}^{K-1} a_S,$$

то требуемое неравенство следует из леммы 2.3.

В дальнейшем нам потребуются оценки коэффициента b_{K+1}.
Выразив коэффициент b_{K+1} из (2.8) имеем

$$|b_{K+1}| = \left| \frac{1}{a_0 a_K} \left[\sum_{S=1}^{K} b_S (a_{K+1} a_S - a_K a_{S+1}) \right] \right| =$$
$$= \left| \frac{1}{a_0 a_K} \left[b_K (a_{K+1} a_0 - a_1 a_K) + \sum_{S=1}^{K-1} b_S (a_{K+1} a_S - a_K a_{S+1}) \right] \right| >$$
$$> \frac{1}{a_0 a_K} \left[|b_K| (a_{K+1} a_0 - a_1 a_K) - \sum_{S=1}^{K-1} |b_S| \cdot |(a_{K+1} a_S - a_K a_{S+1})| \right] >$$
$$> \frac{1}{2} |b_K| \left(\frac{a_{K+1}}{a_K} - \frac{a_1}{a_0} \right) > \frac{m}{4} |b_K|.$$

Предпоследнее неравенство будет верным в силу леммы 2.2, а последнее ввиду выбора числа a_0. Тем самым

$$|b_{K+1}| > \frac{m}{4} |b_K| \tag{2.10}$$

или переписав иначе

$$|b_K| < \frac{4}{m} |b_{K+1}|. \tag{2.11}$$

Доказательство перехода.
Предположим, что коэффициенты $b_{K+1}, \ldots, b_{K+l-1}$ отрицательны. Докажем, что коэффициент b_{K+l} будет отрицателен.
Перемножив ряды $f(x)$ и $g(x)$ и посмотрев на коэффициенты при x^{K+l} и x^{K+l-1}, равные 0, получим:

$$a_{K+l} b_0 + a_{K+l-1} b_1 + \ldots + a_1 b_{K+l-1} + a_0 b_{K+l} = 0, \tag{2.12}$$

$$a_{K+l-1}b_0 + a_{K+l-2}b_1 + \ldots + a_1 b_{K+l-2} + a_0 b_{K+l-1} = 0. \tag{2.13}$$

Домножим тождество (2.12) на a_{K+l-1}, а тождество (2.13) на a_{K+l}, и вычитая одно из другого, получим:

$$\begin{gathered} b_{K+l}a_{K+l-1}a_0 = b_{K+l-1}(a_{K+l}a_0 - a_{K+l-1}a_1) + b_{K+l-2}(a_{K+l}a_1 - a_{K+l-1}a_2) + \ldots \\ \ldots + b_l(a_{K+l}a_{K-1} - a_{K+l-1}a_K) + b_{l-1}(a_{K+l}a_K - a_{K+l-1}a_{K+1}) + \ldots \\ \ldots + b_1(a_{K+l}a_{K+l-2} - a^2_{K+l-1}). \end{gathered} \tag{2.14}$$

Заметим, что коэффициенты при $b_1, b_2, \ldots, b_{l-1}$ положительны ввиду выполнения условия K-Харди $\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} \geq \frac{a_{n+1}}{a_n}$ при $n \geq K$.
Если выполнено условие $\frac{a_{K+l}}{a_{K+l-1}} \geq M$, то коэффициенты при $b_l, b_{l+1}, \ldots, b_{K+l-1}$ будут неотрицательны, так как $M = max\frac{a_S}{a_{S-1}}, S = 2, \ldots, K)$, поэтому далее будем считать, что $\frac{a_{K+l}}{a_{K+l-1}} \leq M$.
Рассмотрим коэффициент при b_{K+l-1}. Он строго положителен по условию $a_0 > \frac{2a_K a_1}{a_{K+1}} = \frac{2a_1}{m}$, введенному при доказательстве базы.

$$a_{K+l}a_0 - a_{K+l-1}a_1 = a_{K+l-1}a_0\left(\frac{a_{K+l}}{a_{K+l-1}} - \frac{a_1}{a_0}\right) \geq a_{K+l-1}a_0\left(\frac{a_{K+1}}{a_K} - \frac{a_1}{a_0}\right) > 0.$$

Лемма 2.4. *В условиях теоремы 2.1 существует число a_0 такое, что выполняются следующие неравенства:*

$$\frac{1}{2}|b_{K+l-1}|(a_{K+l}a_0 - a_{K+l-1}a_1) > \sum_{S=l}^{K+l-2} |b_s||a_{K+l}a_{K+l-1-S} - a_{K+l-1}a_{K+l-S}| \tag{2.15}$$

и

$$|b_{K+l}| > \frac{m}{4}|b_{K+l-1}|.$$

Заметим, что выполнение неравенства (2.15) из леммы 2.4 гарантирует отрицательность суммы первых K слагаемых в правой части выражения (2.14), а поскольку в правой части выражения (2.14) последние $(l-1)$ слагаемые отрицательны, то вся правая часть будет отрицательна, и, следовательно, теорема 2.1 будет доказана.

Доказательство леммы 2.4. Индукция. База $l = 1$ — доказано ранее (леммы 2.2 и 2.3, неравенство (2.10)).

Переход: оценим сверху правую часть неравенства (2.15):

$$\sum_{S=l}^{K+l-2} |b_S| \cdot |a_{K+l}a_{K+l-1-S} - a_{K+l-1}a_{K+l-S}| =$$

$$= a_{K+l-1} \sum_{S=l}^{K+l-2} |b_S| \cdot |a_{K+l-1-S}| \left| \frac{a_{K+l}}{a_{K+l-1}} - \frac{a_{K+l-S}}{a_{K+l-1-S}} \right| = (*).$$

Число $K+l-1-S$ при $S \in [l; K+l-2] \in [1; K-1]$, поэтому будет верно:

$$|a_{K+l-1-S}| \leq T,$$

$$\left| \frac{a_{K+l}}{a_{K+l-1}} - \frac{a_{K+l-S}}{a_{K+l-1-S}} \right| \leq M,$$

так как оба числа $\frac{a_{K+l}}{a_{K+l-1}}$ и $\frac{a_{K+l-S}}{a_{K+l-1-S}}$ принадлежат интервалу $[0, M]$ по предположению.

$$(*) \leq a_{K+l-1} T \sum_{S=l}^{K+l-2} |b_S| M < a_{K+l-1} T \left(M + m \right) \sum_{S=l}^{K+l-2} |b_S|.$$

Тем самым осталось проверить, что выполнено следующее неравенство:

$$\frac{1}{2} |b_{K+l-1}| (a_{K+l}a_0 - a_{K+l-1}a_1) \geq a_{K+l-1} T \left(M + m \right) \sum_{S=l}^{K+l-2} |b_S|.$$

Оценим снизу левую часть неравенства (2.15). Ввиду выполнения условия $K-$ Харди и выбора числа $a_0 > \frac{2a_K a_1}{a_{K+1}} = \frac{2a_1}{m}$ получим:

$$\frac{1}{2} |b_{K+l-1}| (a_{K+l}a_0 - a_{K+l-1}a_1) \geq \frac{m}{4} a_0 a_{K+l-1} |b_{K+l-1}|.$$

Разделив на a_{K+l-1}, получим, что осталось доказать истину цепочки неравенств:

$$\frac{1}{2} a_0 |b_{K+l-1}| \left(\frac{a_{K+l}}{a_{K+l-1}} - \frac{a_1}{a_0} \right) \geq \frac{m}{4} a_0 |b_{K+l-1}| \geq T \left(M + m \right) \sum_{S=l}^{K+l-2} |b_S|.$$

Если доказать второе неравенство, первая часть леммы 2.4 будет доказана. Поделив его на $\frac{m}{4}$, получим:

$$a_0 |b_{K+l-1}| \geq \alpha \sum_{S=l}^{K+l-2} |b_S|.$$

Лемма 2.5. *В условиях теоремы 2.1 существует число* a_0 *такое, что выполняется неравенство*

$$a_0|b_{K+l-1}| \geq \alpha \sum_{S=l}^{K+l-2} |b_S|.$$

Доказательство леммы 2.5.

Случай 1. $l > K-1$. Тогда по индукционному предположению (неравенство (2.11)) имеем:

$$|b_{K+l-1}| \geq \frac{m}{4}|b_{K+l-2}| \geq \left(\frac{m}{4}\right)^2 |b_{K+l-3}| \geq \ldots \geq \left(\frac{m}{4}\right)^{K-1} |b_l|,$$

следовательно,

$$\alpha \sum_{S=l}^{K+l-2} |b_S| \leq \alpha |b_{K+l-1}| \left(\frac{4}{m} + \left(\frac{4}{m}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{4}{m}\right)^{K-1}\right).$$

Следовательно, если число a_0 удовлетворяет следующему неравенству:

$$a_0 \geq \alpha \left(\frac{4}{m} + \left(\frac{4}{m}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{4}{m}\right)^{K-1}\right),$$

то

$$\alpha \sum_{S=l}^{K+l-2} |b_S| \leq \alpha |b_{K+l-1}| \left(\frac{4}{m} + \left(\frac{4}{m}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{4}{m}\right)^{K-1}\right) \leq a_0|b_{K+l-1}|.$$

Случай 2. $l \leq K-1$. Тогда, применяя замечание 2.3, получим, что

$$\begin{aligned}
\alpha \sum_{S=l}^{K+l-2} |b_S| &= \alpha \sum_{S=l}^{K-1} |b_S| + \alpha \sum_{S=K}^{K+l-2} |b_S| \leq \\
&\leq \alpha \sum_{S=1}^{K-1} |b_S| + \alpha \sum_{S=K}^{K+l-2} |b_S| \leq C a_0 |b_K| + \alpha \sum_{S=K}^{K+l-2} |b_S| \leq \\
&\leq C a_0 |b_K| + \alpha \left(\frac{4}{m} + \left(\frac{4}{m}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{4}{m}\right)^{l-1}\right) |b_{K+l-1}| \leq \\
&\leq \left(C a_0 \left(\frac{4}{m}\right)^{l-1} + \alpha \left(\frac{4}{m} + \left(\frac{4}{m}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{4}{m}\right)^{l-1}\right)\right) |b_{K+l-1}|.
\end{aligned}$$

Если доказать следующее неравенство:

$$\left(Ca_0\left(\frac{4}{m}\right)^{l-1}+\alpha\left(\frac{4}{m}+\left(\frac{4}{m}\right)^2+\ldots+\left(\frac{4}{m}\right)^{l-1}\right)\right)|b_{K+l-1}|\le a_0|b_{K+l-1}|,$$

то лемма 2.5 будет доказана. Для его истинности число a_0 должно удовлетворять неравенству:

$$Ca_0\left(\frac{4}{m}\right)^{l-1}+\alpha\sum_{S=1}^{l-1}\left(\frac{4}{m}\right)^S\le a_0\ \textit{для всех}\ l=1,\ldots,K-1.$$

Или, усилив предыдущее:

$$Ca_0\left(\frac{4}{m}\right)^{l-1}+\alpha\sum_{S=1}^{K-1}\left(\frac{4}{m}\right)^{S-1}\le a_0.$$

Константа C в замечании 2.3 подбирается по правилу:

$$C=\begin{cases}\frac{1}{2}, & \textit{при}\frac{4}{m}\le 1,\\ \frac{1}{2}\left(\frac{4}{m}\right)^{K-1} & \textit{при}\frac{4}{m}>1.\end{cases}$$

Тем самым $C\left(\frac{4}{m}\right)^{l-1}\le\frac{1}{2}$, следовательно, число a_0 подобрать можно:

$$2\alpha\sum_{S=1}^{K-1}\left(\frac{4}{m}\right)^{S-1}\le a_0$$

Лемма 2.5 доказана. ○

Докажем теперь вторую часть леммы 2.4, а именно, что $|b_{K+l}|>\frac{m}{4}|b_{K+l-1}|$. Перепишем выражение (2.14):

$$\begin{aligned}|b_{K+l}a_{K+l-1}a_0|=|b_{K+l-1}(a_{K+l}a_0-a_{K+l-1}a_1)+b_{K+l-2}(a_{K+l}a_1-a_{K+l-1}a_2)+\ldots\\ \ldots+b_l(a_{K+l}a_{K-1}-a_{K+l-1}a_K)+b_{l-1}(a_{K+l}a_K-a_{K+l-1}a_{K+1})+\ldots\\ \ldots+b_1(a_{K+l}a_{K+l-1}-a_{K+l-1}^2)|.\end{aligned}$$

Из доказанного (2.15) следует, что

$$b_{K+l-1}(a_{K+l}a_0-a_{K+l-1}a_1)+\ldots+b_l(a_{K+l}a_{K-1}-a_{K+l-1}a_K)<0,$$

а из условия $K-$ Харди следует, что верно неравенство:

$$\sum_{S=1}^{l-1} b_S(a_{K+l}a_{K+l-1-S} - a_{K+l-1}a_{K+l-S}) < 0.$$

Поэтому, используя неравенство (2.15) из леммы 2.4, имеем:

$$|b_{K+l}a_{K+l-1}a_0| = \left|\sum_{S=1}^{l-1} b_S(a_{K+l}a_{K+l-1-S} - a_{K+l-1}a_{K+l-S})\right| +$$
$$+\left|\sum_{S=l}^{K+l-1} b_S(a_{K+l}a_{K+l-1-S} - a_{K+l-1}a_{K+l-S})\right| \geq$$
$$\geq \left|\sum_{S=l}^{K+l-1} b_S(a_{K+l}a_{K+l-1-S} - a_{K+l-1}a_{K+l-S})\right| \geq \frac{1}{2}|b_{K+l-1}|(a_{K+l}a_0 - a_{K+l-1}a_1).$$

Тем самым:

$$|b_{K+l}| \geq \frac{1}{2}|b_{K+l-1}|\left(\frac{a_{K+l}}{a_{K+l-1}} - \frac{a_1}{a_0}\right) \geq \frac{m}{4}|b_{K+l-1}|.$$

Лемма 2.4 доказана. ◯

Тем самым теорема 2.1 полносттью доказана. ◯

2.5 Случай нескольких переменных: Основные определения и формулировки.

В дальнейшем нам потребуются следующие вспомогательные обозначения. Пусть $s = (s_1, \ldots, s_n)$ – мультииндекс. Обозначим через $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ – мультииндекс, состоящий из нулей и одной единицы на $i-$м месте, а через $\mathbb{O} = (0, \ldots, 0)$ и $\mathbb{E} = (1, \ldots, 1)-$ мультииндексы, состоящий из нулей и единиц соответственно. Для удобства и краткости будем использовать обозначения $x^s = x_1^{s_1}x_2^{s_2}\ldots x_n^{s_n}$ и $a_s = a_{s_1,s_2,\ldots,s_n}$. Также будет писать, что $s > t$ и $s \geq t$, если при всех $i = 1, 2, \ldots, n$ выполнено $s_i > t_i$ и $s_i \geq t_i$ соответственно. Обозначим через $||s|| = \sum\limits_{i=1}^{n} s_i-$ порядок мультииндекса s. Будем говорить, что $s >> t$ если выполнено два условия $s \geq t$ и $s \neq t$.

Определение 2.2. *Пусть дана последовательность $\{a_s\}$ положительных чисел, $s-$мультииндекс порядка n. Будем говорить, что тройка мультииндексов (s,t,u) $B-$выпуклая, если*

$$a_{s+t+u}a_s \geq Ba_{s+t}a_{s+u}.$$

Определение 2.3. *Пусть дана последовательность $\{a_s\}$ положительных чисел, $s-$мультииндекс порядка n. Будем говорить, что она удовлетворяет $n-$мерному условию Харди если выполнены три следующих условия*
1. тройки (s,e_i,e_i) 1-выпуклы при $1 \leq i \leq n$
2. тройки (s,e_i,e_j) 1-выпуклы при $s_is_j > 0$ и при $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$
3. тройки (s,e_i,e_j) $\frac{n-l}{n-l-1)}-$выпуклы при $s_is_j = 0$, где $l-$ число нулей в последовательности $\{s_k\}_{k\neq i,k\neq j}$ и при $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$
В главе 1 была доказана следующая теорема 1.1, которую можно переформулировать следующим образом.
Теорема 1.1. *Рассмотрим формальный степенной ряд от n переменных*

$$f(x) = f(x_1,\ldots,x_n) = a_{\mathbb{O}} + \sum_{||s||>>\mathbb{O}} a_sx^s.$$

Положим

$$g(x) = g(x_1,\ldots,x_n) = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{f(x_1,\ldots,x_n)} = \sum_{||s||\geq\mathbb{O}} b_sx^s-$$

формальный степенной ряд от n переменных, обратный к $f(x)$. Если последовательность $\{a_s\}_{s>>0}$ положительных чисел, $s-$мультииндекс порядка n, удовлетворяет n-мерному условию Харди, то коэффициенты $b_s \leq 0$ при всех $s >> \mathbb{O}$.

Определение 2.4. *Пусть $\{a_s\}$ последовательность положительных чисел, s-мультииндекс порядка n. Будем говорить, что она удовлетворяет n-мерному условию K-Харди, если n-мерное условие Харди выполнено для всех мультииндексов s, чей порядок не меньше, чем K.*
Теорема 2.2. *Рассмотрим формальный степенной ряд от n переменных*

$$f(x) = f(x_1,\ldots,x_n) = a_{\mathbb{O}} + \sum_{||s||>>\mathbb{O}} a_sx^s.$$

Положим

$$g(x) = g(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{f(x_1, \ldots, x_n)} = \sum_{||s|| \geq \mathbb{O}} b_s x^s -$$

формальный степенной ряд от n переменных, обратный к $f(x)$. Если последовательность $\{a_s\}_{s>>\mathbb{O}}$ положительных чисел, $s-$мультииндекс порядка n, удовлетворяет $n-$ мерному условию $K-$ Харди, то существует число $a_{\mathbb{O}}$, что коэффициенты $b_s < 0$ при всех $s >> \mathbb{O}$.

Заметим, что теорема 2.1 — частный случай для теоремы 2.2 для случая одной переменной, а теорема 1.1 — частный случай для теоремы 2.2 при $K = 0$.

2.6 Случай нескольких переменных: Подготовительные леммы.

Поскольку ряды $g(x)$ и $f(x)$ связаны соотношением $f(x)g(x) = 1$, то для коэффициентов a_i и b_j этих рядов выполнены соотношения:

$$a_{\mathbb{O}} b_{\mathbb{O}} = 1, \tag{2.16}$$

$$\sum_{\mathbb{O} \leq j \leq I} a_{I-j} b_j = 0, \quad i \geq \mathbb{O}, i \neq \mathbb{O}. \tag{2.17}$$

Тем самым коэффициент $b_{\mathbb{O}} = \frac{1}{a_{\mathbb{O}}}$, а все остальные коэффициенты b_i выражаются через коэффициенты a_j ($\mathbb{O} \leq j \leq i$). Зафиксируем все числа $a_j, j \neq \mathbb{O}$.
Лемма 2.6. *Коэффициент b_l имеет вид*

$$b_l = \frac{1}{a_{\mathbb{O}}^{||l||+1}} \cdot P_l(a_{\mathbb{O}}),$$

где P_l - многочлен степени $||l|| - 1$, с коэффициентами, зависящими от чисел $a_j \quad (j \leq l)$, причем старший коэффициент равен $(-a_l)$.

Доказательство леммы 2.6. Индукция по порядку мультииндекса l.
База $||l|| = 1$. Из формулы (2.16) следует, что $b_{\mathbb{O}} = \frac{1}{a_{\mathbb{O}}}$. Из формулы (2.17) следует при $I = e_k$, что $a_{e_k} b_{\mathbb{O}} + a_{\mathbb{O}} b_{e_k} = 0$.

Откуда $b_{e_k} = \frac{-a_{e_k}}{a_{\mathbb{O}}^2}$.

Переход от $||l||$ к $||l||+1$. Рассмотрим произвольный мультииндекс S порядка $||l||+1$. Рассмотрим формулу (2.17) при $I = S$.

$$a_S b_{\mathbb{O}} + a_{S-e_1} b_{e_1} + \ldots + a_{\mathbb{O}} b_S = 0.$$

Следовательно, по предположению индукции:

$$b_S a_{\mathbb{O}} = -b_{S-e_1} a_{e_1} - \ldots - b_{\mathbb{O}} a_S = -\left[\frac{a_{e_1} P_{S-e_1}(a_{\mathbb{O}})}{a_{\mathbb{O}}^{||l||+1}} + \frac{a_{2e_1} P_{S-2e_1}(a_{\mathbb{O}})}{a_{\mathbb{O}}^{||l||}} + \cdots \right.$$
$$\left. \cdots + \frac{a_{S-e_1} P_{e_1}(a_{\mathbb{O}})}{a_{\mathbb{O}}^2} + \frac{a_S}{a_{\mathbb{O}}}\right] = -\frac{1}{a_{\mathbb{O}}^{||l||+1}} Q_S(a_{\mathbb{O}}) - \frac{1}{a_{\mathbb{O}}^{||l||+1}} a_S a_{\mathbb{O}}^{||l||},$$

где $Q_S)$ - многочлен степени $(||l||-1)$, $a_S a_{\mathbb{O}}^{||l||}$ - моном степени $||l||$. Таким, образом :

$$b_S = \frac{1}{a_{\mathbb{O}}^{||l||+2}} \cdot P_l(a_{\mathbb{O}}).$$

Тем самым, лемма 2.6 доказана. ◯

Следующие два замечания показывают асимптотику коэффициентов b_S

Замечание 2.4. *При достаточно больших $a_{\mathbb{O}}$ верно следующее соотношение:*

$$b_S = \frac{-a_S}{a_{\mathbb{O}}^2}(1 + o(1)).$$

Замечание 2.5. *Существует положительное число A такое, что при всех $a_{\mathbb{O}} > A$ выполнено*

$$\left| b_S + \frac{a_S}{a_{\mathbb{O}}^2} \right| \leq \frac{1}{2} \frac{a_S}{a_{\mathbb{O}}^2}$$

для всех мультииндексов S, чей порядок не превосходит N.

Доказательство замечания 2.5 аналогично доказательству замечания 2.2.

Таким образом, условие из замечания 2.5 можно переписать в следующей форме:

$$-\frac{3}{2}\frac{a_s}{a_{\mathbb{O}}^2} < b_s < -\frac{1}{2}\frac{a_s}{a_{\mathbb{O}}^2} \textit{ при всех } s.$$

2.7 Случай нескольких переменных: Доказательство теоремы 2.2.

Доказательство теоремы 2.2.

Будем проводить доказательство по следующей схеме: вначале проведем индукцию по числу переменных n, а потом – по порядку мультииндекса S.

Индукция по n. База $n = 1$ была рассмотрена в Теореме 2.1.

Переход. Пусть в случае $m < n$ условия теоремы выполнены. Докажем, что для n условие теоремы выполнено.

Доказательство разобьем на 3 этапа.

1 Этап.$||S|| \leq K$. Тогда, по замечанию 2.4, можно подобрать число A при $a_{\mathbb{O}} > A$ будет верно $b_s \leq 0$.

Далее будем проводить индукцию по порядку мультииндекса S.

2 Этап. База индукции. $||S|| = K + 1$. Не умаляя общности, будем считать, что $S > \mathbb{O}$ (если хоть один из индексов равен 0, то утверждение верно по предположению индукции для меньшей размерности).

Введем обозначения:

$$m = max\frac{a_S}{a_{S-e_j}}, \quad 1 \leq j \leq n, ||S|| = K + 1;$$

$$b = min\frac{a_S}{a_{S-e_j}}, \quad 1 \leq j \leq n, ||S|| = K + 1;$$

$$M = max\frac{a_\alpha}{a_{\alpha-e_j}}, \quad 1 \leq j \leq n, ||\alpha|| \leq K;$$

$$T = max\, a_\alpha, \quad 0 < ||\alpha|| \leq K.$$

Перемножив ряды $f(x)$ и $g(x)$ и применив соотношения (2.17) для коэффициентов при x^S, $x^{S-e_i}(i=1,\ldots,n)$, получим:

$$\begin{array}{ccccc} a_S b_{\mathbb{O}} & + & a_{S-e_1}b_{e_1}+\ldots & + & a_{\mathbb{O}}b_S=0, \\ a_{S-e_1}b_{\mathbb{O}} & + & \ldots & + & a_{\mathbb{O}}b_{S-e_1}=0, \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{S-e_n}b_{\mathbb{O}} & + & \ldots & + & a_{\mathbb{O}}b_{S-e_n}=0. \end{array}$$

Домножив первое тождество на $(na_{S-e_1}a_{S-e_2}\ldots a_{S-e_n})$, второе тождество – на $(a_S a_{S-e_2}\ldots a_{S-e_n})$, третье – на $a_S a_{S-e_1}a_{S-e_3}\ldots a_{S-e_n}$, $\ldots$, последнее тождество– на $a_S a_{S-e_1}\ldots a_{S-en-1}$ и вычитая из первого остальные, получим:

$$na_{\mathbb{O}}a_{S-e_1}\ldots a_{S-e_n}b_S + b_{S-e_1}(na_{e_1}a_{S-e_1}-a_{\mathbb{O}}a_S)a_{S-e_2}\ldots a_{S-e_n}+$$
$$+b_{S-2e_1}(na_{2e_1}a_{S-e_1}-a_{e_1}a_S)a_{S-e_2}\ldots a_{S-e_n}+\cdots=0.$$

Группируя, имеем :

$$a_{S-e_2}a_{S-e_3}a_{S-e_n}C_1+a_{S-e_1}a_{S-e_3}a_{S-e_n}C_2+\cdots$$
$$\cdots+a_{S-e_1}a_{S-e_2}a_{S-e_{n-1}}C_n+nb_Sa_{S-e_1}a_{S-e_n}a_0=0. \qquad (2.18)$$

Если доказать, что числа $C_i\geq 0$ при всех i, то из этого будет следовать, что $b_S\leq 0$, так как $a_I\geq 0$. Для этого запишем коэффициенты $C_1,C_2,\ldots C_n$ в явном виде. Заметим, что числа $C_1,C_2,\ldots C_n$ нельзя однозначно выразить, поэтому наложим одно дополнительное условие, а именно симметричность.

$$C_1=b_{S-e_1}(na_{e_1}a_{S-e_1}-a_{\mathbb{O}}a_S)+b_{S-2e_1}(na_{2e_1}a_{S-e_1}-a_{e_1}a_S)+\cdots+$$
$$+b_{S-\alpha_1e_1-\alpha_ne_n}\left[\frac{n}{||\alpha||}a_\alpha a_{S-e_1}-a_{\alpha-e_1}a_S\right].$$

Группируя, имеем:

$$C_1=\sum_{S>>\alpha\geq e_1}b_{S-\alpha}\left(\frac{n}{||\alpha||}a_\alpha a_{S-e_1}-a_{\alpha-e_1}a_S\right),$$

$$C_j=\sum_{S>>\alpha\geq e_j}b_{S-\alpha}\left(\frac{n}{||\alpha||}a_\alpha a_{S-e_j}-a_{\alpha-e_j}a_s\right). \qquad (2.19)$$

Если доказать, что

$$\frac{1}{2}\left|b_{S-e_j}\right|\left|(na_{e_j}a_{S-e_j}-a_{\mathbb{O}}a_S)\right|\geq\sum_{S>>\alpha>>e_j}\left|b_{S-\alpha}\left(\frac{n}{||\alpha||}a_\alpha a_{S-e_j}-a_{\alpha-e_j}a_S\right)\right|,$$

то так как числа $b_{S-\alpha}$ отрицательны, то последние слагаемые будут меньше в два раза, чем первое по модулю, следовательно, их сумма будет иметь знак первого слагаемого, которое положительно. Следовательно, число $C_i \geq 0$.

Лемма 2.7. *В условиях теоремы 2.2 предыдущее неравенство верно.*
Доказательство леммы 2.7. Оценим правую часть неравенства:

$$\sum_{e_j<<\alpha<<S} a_{S-e_j} a_{\alpha-e_j} |b_{S-\alpha}| \left(\frac{n}{||\alpha||} \frac{a_\alpha}{a_{\alpha-e_j}} - \frac{a_S}{a_{S-e_j}} \right) \leq \text{(по определению числа T)}$$

$$\leq T a_{S-e_j} \sum_{e_j<<\alpha<<S} |b_{S-\alpha}| \left(\frac{n}{||\alpha||} \frac{a_\alpha}{a_{\alpha-e_j}} - \frac{a_S}{a_{S-e_j}} \right) \leq$$

$$\leq T a_{S-e_j} \sum_{e_j<<\alpha<<S} |b_{S-\alpha}| \left(n \frac{a_\alpha}{a_{\alpha-e_j}} + \frac{a_S}{a_{S-e_j}} \right) \leq$$

$$\leq T(Mn+m) a_{S-e_j} \sum_{e_j<<\alpha<<S} |b_{S-\alpha}| \leq$$

$$\leq \frac{3}{2} T(Mn+m) a_{S-e_j} \sum_{e_j<<\alpha<<S} \frac{a_{S-\alpha}}{a_{\mathbb{O}}^2}.$$

Последнее неравенство получено при помощи замечания 2.5.
Перепишем левую часть неравенства в виде:

$$\frac{1}{2} \left|b_{S-e_j}\right| |(n a_{e_j} a_{S-e_j} - a_{\mathbb{O}} a_S)| = \frac{1}{2} \left|b_{S-e_j}\right| a_{\mathbb{O}} a_{S-e_j} \left| \left(n \frac{a_{e_j}}{a_{\mathbb{O}}} - \frac{a_S}{a_{S-e_j}} \right) \right|.$$

Тем самым, осталось доказать, что

$$\frac{3}{2} T(Mn+m) a_{S-e_j} \sum_{e_j<<\alpha<<S} \frac{a_{S-\alpha}}{a_{\mathbb{O}}^2} \leq \frac{1}{2} \left|b_{S-e_j}\right| a_{\mathbb{O}} a_{S-e_j} \left| \left(n \frac{a_{e_j}}{a_{\mathbb{O}}} - \frac{a_S}{a_{S-e_j}} \right) \right|.$$

Сократив на $1/2 a_{S-e_j}$, имеем:

$$3T(Mn+m) \sum_{e_j<<\alpha<<S} \frac{a_{S-\alpha}}{a_{\mathbb{O}}^2} \leq \left|b_{S-e_j}\right| a_{\mathbb{O}} \left| \left(n \frac{a_{e_j}}{a_{\mathbb{O}}} - \frac{a_S}{a_{S-e_j}} \right) \right|.$$

Подберем число $a_{\mathbb{O}}$ таким образом, чтобы при всех j выполнялось неравенство:

$$\left| n \frac{a_{e_j}}{a_{\mathbb{O}}} \right| < \frac{b}{2}.$$

Откуда немедленно следует:

$$\left|\frac{a_S}{a_{S-e_j}} - n\frac{a_{e_j}}{a_{\mathbb{O}}}\right| > \frac{b}{2} \tag{2.20}$$

Тем самым, осталось доказать, что

$$3T(Mn+m)\sum_{e_j<<\alpha<<S}\frac{a_{S-\alpha}}{a_{\mathbb{O}}^2} \leq \frac{b}{2}a_{\mathbb{O}}\left|b_{S-e_j}\right|$$

Ввиду замечания 2.5 выполнено $\left|b_{S-e_j}\right| \geq \frac{1}{2}\frac{a_{S-e_j}}{a_{\mathbb{O}^2}}$, следовательно, можно усилить предыдущее неравенство

$$\frac{b}{2}a_{\mathbb{O}}\left|b_{S-e_j}\right| \geq \frac{b}{4}a_{\mathbb{O}}\frac{a_{S-e_j}}{a_{\mathbb{O}}^2} \geq 3T(Mn+m)\sum_{e_j<<\alpha<<S}\frac{a_{S-\alpha}}{a_{\mathbb{O}}^2}.$$

Если последнее неравенство будет верно, то лемма 2.7 будет доказана. Сократив на $\frac{1}{a_{\mathbb{O}}^2}$ имеем:

$$\frac{b}{4}a_{\mathbb{O}}a_{S-e_j} \geq 3T(Mn+m)\sum_{e_j<<\alpha<<S}a_{S-\alpha}. \qquad (**)$$

Пусть $\beta = \frac{3T(Mn+m)\cdot 4}{b}$, тогда сокращая на $\frac{b}{4}$, предыдущее неравенство перепишется в виде:

$$a_{\mathbb{O}}a_{S-e_j} \geq \beta\sum_{e_j<<\alpha<<S}a_{S-\alpha}$$

Пусть $Y = \min_{|I|=K=|S|-1} a_I$. Докажем более сильное неравенство:

$$a_{\mathbb{O}}Y \geq \beta\sum_{e_j<<\alpha<<S}a_{S-\alpha} \tag{2.21}$$

Так как верно неравенство:

$$\sum_{e_j<<\alpha<<S}a_{S-\alpha} \leq \sum_{\mathbb{O}<<I;||I|\leq K+1}a_I,$$

то число, стоящее в правой части ограничено, поэтому можно подобрать $a_{\mathbb{O}}$ так, чтобы неравенство (2.21) было верным.

Лемма 2.7 доказана. ◯

Замечание 2.6. *Из леммы 2.7 следует, что*

$$C_j \geq \frac{1}{2}\left|b_{S-\alpha}\right|\left|na_{e_j}a_{S-e_j} - a_{\mathbb{O}}a_S\right|.$$

Замечание 2.7. *Неравенство* (2.21) *можно модифицировать. Для любой константы c можно подобрать такое число* $a_{\mathbb{O}}$ *, что будет выполнено неравенство:*

$$ca_{\mathbb{O}}|b_{S-e_j}| \geq \sum_{e_j<<\alpha<<S} |b_{S-\alpha}|$$

Предыдущее неравенство легко получается применением замечания 2.5. В дальнейшем нам потребуются оценки числа b_S.

Лемма 2.8. *Верно следующее неравенство:* $|b_S| \geq \frac{b}{4n} \sum_{j=1}^{n} \left|b_{S-e_j}\right|$.

Доказательство леммы 2.8. Перепишем соотношение (2.18) в более удобной форме:

$$a_{S-e_2}a_{S-e_3}\dots a_{S-e_n}C_1 + a_{S-e_1}a_{S-e_3}\dots a_{S-e_n}C_2 +$$

$$+ a_{S-e_1}a_{S-e_1}\dots a_{S-e_n}C_3 + \dots + a_{S-e_1}\dots a_{S-e_{n-1}}C_n = -nb_S a_{S-e_1}\dots a_{S-e_n}a_{\mathbb{O}}.$$

Откуда, выражая b_S получим:

$$b_S = \frac{-1}{na_{\mathbb{O}}} \sum_{j=1}^{n} \frac{C_j}{a_{S-e_j}}.$$

Напишем оценку на модуль числа b_S:

$$|b_S| = \frac{1}{na_{\mathbb{O}}} \sum_{j=1}^{n} \frac{C_j}{a_{S-e_j}} \geq \frac{1}{na_{\mathbb{O}}} \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \frac{|b_{S-e_j}|}{a_{S-e_j}} \left|na_{e_j}a_{S-e_j} - a_{\mathbb{O}}a_S\right| =$$

$$= \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^{n} \left|b_{S-e_j}\right| \left|\frac{na_{e_j}}{a_{\mathbb{O}}} - \frac{a_S}{a_{S-e_j}}\right| \geq \frac{b}{4n} \sum_{j=1}^{n} \left|b_{S-e_j}\right|.$$

Первое неравенство в цепочке верно ввиду леммы 2.7, а последнее в силу неравенства (2.20). Откуда имеем, что

$$|b_S| \geq \frac{b}{4n} \sum_{j=1}^{n} \left|b_{S-e_j}\right|.$$

Лемма 2.8 доказана. ◯ Тем самым база индукции доказана.

3 Этап. Переход $||S|| > K + 1$.

Не умаляя общности, будем считать, что $S > \mathbb{O}$ (если хоть один из индексов в мультииндексе равен 0, то утверждение верно по предположению индукции по n).

Будем действовать как и в случае $||S|| = K+1$ до равенства (2.19). Положим для удобства, $d_{S-\alpha} = \frac{n}{||\alpha||} a_\alpha a_{S-e_j} - a_{\alpha-e_j} a_S$. Тогда, получим:

$$C_j = \sum_{e_J \leq \alpha << S} b_{S-\alpha} \left(\frac{n}{||\alpha||} a_\alpha a_{S-e_j} - a_{\alpha-e_j} a_S \right) = \sum_{e_j \leq \alpha << S} b_{S-\alpha} d_{S-\alpha} =$$

$$= \sum_{\substack{e_j \leq \alpha << S \\ |\alpha| \geq K+1}} b_{S-\alpha} d_{S-\alpha} + \sum_{\substack{e_j \leq \alpha << S \\ |\alpha| < K+1}} b_{S-\alpha} d_{S-\alpha}.$$

Докажем, положительность чисел C_j. Для этого докажем положительность каждой из сумм выше.

Лемма 2.9. *При α: $||\alpha|| \geq K+1$, $d_{S-\alpha}$ будет отрицательно, ввиду выполнения условия Харди.*

Доказательство леммы 2.9 будет произведено в пункте 2.9.

Из леммы 2.9 следует, что первая сумма положительна ввиду отрицательности чисел $b_{S-\alpha}$ и $d_{S-\alpha}$.

Докажем, что вторая сумма будет неотрицательна.

$$\sum_{\substack{e_j \leq \alpha << S \\ |\alpha| < K+1}} b_{S-\alpha} d_{S-\alpha} = \sum_{\substack{e_j \leq \alpha << S \\ |\alpha| < K+1}} b_{S-\alpha} \left(\frac{n}{||\alpha||} a_\alpha a_{S-e_j} - a_{\alpha-e_j} a_S \right).$$

Если выполнено неравество

$$\frac{a_S}{a_{S-e_j}} \geq Mn,$$

то множитель в скобках неположителен, следовательно, $C_j \geq 0$, поэтому далее будем считать, что $\frac{a_S}{a_{S-e_j}} < Mn$.

Лемма 2.10. *Верно следующее неравенство:*

$$\frac{1}{2} \left| n a_{e_j} a_{S-e_j} - a_{\mathbb{O}} a_S \right| \left| b_{S-e_j} \right| \geq \sum_{\substack{e_j \leq \alpha << S \\ |\alpha| < K+1}} |b_{S-\alpha}| \left| \frac{n}{||\alpha||} a_\alpha a_{S-e_j} - a_{\alpha-e_j} a_S \right|.$$

Доказательство леммы 2.10 будет произведено в пункте 2.9.

Если верна лемма 2.10, то так как числа $b_{S-\alpha}$ отрицательны, то последние слагаемые будут меньше в два раза, чем первое по модулю, следовательно, их сумма будет иметь знак первого слагаемого, которое положительно. Тем самым, вторая сумма будет положительна. Тем самым числа C_j будут неотрицательны, более того, будет верно следующее неравенство:

$$C_j = \sum_{\substack{e_j \le \alpha << S \\ |\alpha| \ge K+1}} b_{S-\alpha} d_{S-\alpha} + \sum_{\substack{e_j \le \alpha << S \\ |\alpha| < K+1}} b_{S-\alpha} d_{S-\alpha} \ge \sum_{\substack{e_j \le \alpha << S \\ |\alpha| < K+1}} b_{S-\alpha} d_{S-\alpha} \ge$$
$$\ge \frac{1}{2} \left| n a_{e_j} a_{S-e_j} - a_{\mathbb{O}} a_S \right| |b_{S-e_j}|.$$

.

Тем самым, теорема 2.2 доказана. $\bigcirc$

2.8 Случай нескольких переменных: доказательство лемм.

Для доказательства леммы 2.10 потребуется вспомогательное утверждение.

Лемма 2.11. *В предположении* $C_j \ge \frac{1}{2} \left| n a_{e_j} a_{S-e_j} - a_{\mathbb{O}} a_S \right| |b_{S-e_j}|$ *для всех* j *верна оценка:*

$$|b_S| \ge \frac{b}{4n} \sum_{j=1}^{n} \left| b_{S-e_j} \right|.$$

Доказательство леммы 2.11 аналогично доказательству леммы 2.8.

Доказательство леммы 2.10. Оценим правую часть неравенства из условия леммы:

$$\sum_{\substack{e_j \le \alpha < S \\ |\alpha| < K+1}} |b_{S-\alpha}| \left| \frac{n}{||\alpha||} a_\alpha a_{S-e_j} - a_{\alpha-e_j} a_S \right| =$$

$$= \sum_{\substack{e_j \le \alpha < S \\ |\alpha| < K+1}} a_{S-e_j} a_{\alpha-e_j} \left| \frac{n}{||\alpha||} \frac{a_\alpha}{a_{\alpha-e_j}} - \frac{a_S}{a_{S-e_j}} \right| |b_{S-\alpha}| \le$$

$$\left(\text{так как по предположению} \quad \frac{a_S}{a_{S-e_j}} \le Mn, \frac{a_\alpha}{a_{\alpha-e_j}} \le M \right)$$

$$\le Mn \sum_{\substack{e_j \le \alpha < S \\ |\alpha| < K+1}} a_{S-e_j} a_{\alpha-e_j} |b_{S-\alpha}| \le (\text{так как } a_{\alpha-e_j} \le T) \le$$

$$\le MnT \sum_{\substack{e_j \le \alpha < S \\ |\alpha| < K+1}} a_{S-e_j} |b_{S-\alpha}| \le MnTa_{S-e_j} \sum_{\substack{e_j \le \alpha < S \\ |\alpha| < K+1}} |b_{S-\alpha}|.$$

Тем самым, надо доказать, что выполнено неравенство:

$$MnTa_{S-e_j}\sum_{\substack{e_j\le\alpha<<S\\|\alpha|<K+1}}|b_{S-\alpha}|\le\frac{1}{2}a_{\mathbb{O}}\left|n\frac{a_{e_j}}{a_{\mathbb{O}}}-\frac{a_S}{a_{S-e_j}}\right|a_{S-e_j}\left|b_{S-e_j}\right|.$$

Сокращая на a_{S-e_j}, имеем:

$$MnT\sum_{\substack{e_j\le\alpha<<S\\|\alpha|<K+1}}|b_{S-\alpha}|\le\frac{1}{2}a_{\mathbb{O}}\left|n\frac{a_{e_j}}{a_{\mathbb{O}}}-\frac{a_S}{a_{S-e_j}}\right|\left|b_{S-e_j}\right|. \tag{2.22}$$

Если коэффициент $a_{\mathbb{O}}$ подобрать таким образом, чтобы выполнялось условие $\frac{na_{e_j}}{a_{\mathbb{O}}}<\frac{b}{2}$ и $\frac{a_S}{a_{S-e_j}}\ge b$, то получим:

$$\frac{1}{2}\left|n\frac{a_{e_j}}{a_{\mathbb{O}}}-\frac{a_S}{a_{S-e_j}}\right|\ge\frac{b}{4}.$$

Откуда имеем, что неравенство (2.22) будет верным, если доказать неравенство:

$$MnT\sum_{\substack{e_j\le\alpha<<S\\|\alpha|<K+1}}|b_{S-\alpha}|\le\frac{b}{4}a_{\mathbb{O}}\left|b_{S-e_j}\right|. \tag{2.23}$$

Сумма $\sum\limits_{\substack{e_j\le\alpha<<S\\|\alpha|<K+1}}|b_{S-\alpha}|$ состоит из 2 частей: первая часть содержит те мультииндексы α, для которых выполнено условие $|S-\alpha|<K+1$, вторая часть содержит те мультииндексы α, для которых верно $|S-\alpha|\ge K+1$. Назовем их, соответственно $\sum_{\text{до}}$ и $\sum_{\text{после}}$. Заметим, что $\sum\limits_{\text{до}}$ появляется лишь в случае, когда $|S|<2K+1$, поэтому рассмотрим два случая.

Случай 1. $|S|<2K+1$. Напишем оценки для каждой из полученных сумм. По замечанию 2.7, $\sum_{\text{до}}$ можно оценить как

$$\sum\nolimits_{\text{до}}|b_{S-\alpha}|\le\sum_{|i|=K,i<S-e_j}ca_{\mathbb{O}}|b_i|.$$

Распишем вторую сумму:

$$\sum\nolimits_{\text{после}}|b_{S-\alpha}|=\sum_{\alpha,|S-\alpha|=K+1}+\sum_{\alpha,|S-\alpha|=K+2}+\cdots+\sum_{\alpha,|S-\alpha|=|S|-2}.$$

Так как в силу леммы 2.11 верно неравенство $|b_{S-\alpha}| \geq \frac{b}{4n}\sum\limits_{j=1}^{n}\left|b_{S-\alpha-e_j}\right|$, а, следовательно, верно и более сильное утверждение:

$$|b_{S-\alpha}| \geq \frac{b}{4n}|b_{S-\alpha-e_j}|,$$

а поскольку количество мультииндексов α порядка m не превосходит n^m, то получим, что

$$\sum_{\alpha,|S-\alpha|=K+1} + \sum_{\alpha,|S-\alpha|=K+2} + \cdots + \sum_{\alpha,|S-\alpha|=|S|-2} \leq D_1(\frac{b}{4},n,K)\left|b_{S-e_j}\right|,$$

где $D_1(\frac{b}{4},n,K)$ некоторая константа. Будем далее для краткости обозначать ее D_1. Откуда получаем, что

$$MnT\sum_{\substack{e_j\leq\alpha<<S\\|\alpha|<K+1}}|b_{S-\alpha}| \leq MnT(D_1\left|b_{S-e_j}\right| + \sum_{|i|=K,i<S-e_j} ca_{\mathbb{O}}|b_i|).$$

Если доказать, что верно неравенство

$$\frac{b}{4MnT}a_{\mathbb{O}}\left|b_{S-e_j}\right| \geq \sum_{|i|=K,i<S-e_j} ca_{\mathbb{O}}|b_i| + D_1\left|b_{S-e_j}\right|,$$

то получим требуемое неравенство (2.23). Так как $\underset{|i|=K}{|b_i|}$ удовлетворяет условию лемм 2.8 и 2.11, то $|b_i| \leq \left(\frac{4n}{b}\right)^{|S|-K}\left|b_{S-e_j}\right|$, а количество элементов $\underset{|i|=K}{|b_i|}$ не превосходит $n^{|S|-K}$, получим:

$$\frac{b}{4MnT}a_{\mathbb{O}}|b_{S-e_j}| \geq \left[a_{\mathbb{O}}c\left(\frac{4n^2}{b}\right)^{|S|-K} + D_1\right]\left|b_{S-e_j}\right|.$$

Поэтому, сократив на $|b_{S-e_j}|$, имеем $\frac{b}{4MnT}a_{\mathbb{O}} \geq \left[a_{\mathbb{O}}c\left(\frac{4n^2}{b}\right)^{|S|-K} + D_1\right]$. Подобрав костанту c таким образом, чтобы выполнялось условие

$$\frac{b}{4MnT}\frac{1}{2} > c\cdot max\left(\left(\frac{4n^2}{b}\right)^K,1\right),$$

получим, что $\left[a_{\mathbb{O}}\left(\frac{4n^2}{b}\right)^{|S|-K} + D_1\right] \leq \frac{b}{8MnT}a_{\mathbb{O}} + D_1$, откуда получается условие на $a_{\mathbb{O}} : ba_{\mathbb{O}} > 8MnTD_1$.

Случай 2. $|S| \geq 2K+1$. В этом случае $\sum_{\text{до}}$ отсутствует, а $\sum_{\text{после}}$ имеет следующий вид:

$$\sum\nolimits_{\text{после}} |b_{S-\alpha}| = \sum_{\alpha, |S-\alpha|=|S|-K} + \sum_{\alpha, |S-\alpha|=|S|-K+1} + \dots + \sum_{\alpha, |S-\alpha|=|S|-2} .$$

По лемме 2.11 имеем, что $|b_{S-\alpha}| \geq \frac{b}{4n}|b_{S-\alpha-e_j}|$, и поскольку количество мультииндексов α порядка m не превосходит n^m получаем, что

$$\sum_{\alpha, |S-\alpha|=|S|-K} + \sum_{\alpha, |S-\alpha|=|S|-K+1} + \dots + \sum_{\alpha, |S-\alpha|=|S|-2} \leq D_2(\frac{b}{4}, n, K) \left| b_{S-e_j} \right| ,$$

где $D_2(\frac{b}{4}, n, K)$ некоторая константа. Будем далее для краткости обозначать ее D_2. Откуда получаем, что

$$MnT \sum_{\substack{e_j \leq \alpha << S \\ |\alpha| < K+1}} |b_{S-\alpha}| \leq MnTD_2 \left| b_{S-e_j} \right| .$$

Если доказать, что верно

$$\frac{b}{4} a_{\mathbb{O}} \left| b_{S-e_j} \right| \geq MnTD_2 \left| b_{S-e_j} \right| ,$$

то получим требуемое. Очевидно, что такое $a_{\mathbb{O}}$ подобрать можно.

Лемма 2.10 доказана. ◯

Доказательство леммы 2.9. Заметим, для начала, что если последовательность $\{a_s\}$ положительных чисел, удовлетворяет $n-$мерному условию Харди, то тройка и (a, b, c) 1- выпукла для всех мультииндексов a, b, c. Поэтому, если мультииндекс α не содержит нулей, то утверждение леммы выполнено. Пусть теперь если мультииндекс α содержит l нулей, стоящих для определенности на первых l местах, $j > l$. Тогда по $n-$мерному условию Харди выполнены следующие неравенства:

$$\frac{a_\alpha}{a_{\alpha-e_j}} \frac{n-(l-1)}{n-(l-1)-1} \leq \frac{a_{\alpha+e_1}}{a_{\alpha-e_j+e_1}},$$

$$\frac{a_{\alpha+e_1}}{a_{\alpha-e_j+e_1}} \frac{n-(l-2)}{n-(l-2)-1} \leq \frac{a_{\alpha+e_1+e_2}}{a_{\alpha-e_j+e_1+e_2}},$$

....

$$\frac{a_{\alpha+e_1+\dots+e_{(l-1)}}}{a_{\alpha-e_j+e_1+\dots+e_{(l-1)}}} \frac{n}{n-1} \leq \frac{a_{\alpha+e_1+\dots+e_l}}{a_{\alpha-e_j+e_1+\dots+e_l}}.$$

Перемножая эти неравенства, получаем:

$$\frac{a_\alpha}{a_{\alpha-e_j}}\frac{n-(l-1)}{n-(l-1)-1}\frac{n-(l-2)}{n-(l-2)-1}\cdots\frac{n}{n-1}\le\frac{a_{\alpha+e_1+\cdots+e_l}}{a_{\alpha-e_j+e_1+\cdots+e_l}},$$

откуда, имеем:

$$\frac{a_\alpha}{a_{\alpha-e_j}}\frac{n}{n-l}=\frac{a_\alpha}{a_{\alpha-e_j}}\frac{n}{||\alpha||}\le\frac{a_{\alpha+e_1+\cdots+e_l}}{a_{\alpha-e_j+e_1+\cdots+e_l}}.$$

Так как мультииндекс S не имеет нулей и $S>>\alpha$, то $S\ge\alpha+e_1+\cdots+e_l$. Так как тройка $(\alpha-e_j+e_1+\cdots+e_l, e_j, S-(\alpha+e_1+\cdots+e_l))$ 1-выпукла, имеем:

$$\frac{a_S}{a_{S-e_j}}\ge\frac{a_{\alpha+e_1+\cdots+e_l}}{a_{\alpha-e_j+e_1+\cdots+e_l}}\ge\frac{a_\alpha}{a_{\alpha-e_j}}\frac{n}{||\alpha||}.$$

Лемма 2.9 доказана. ◯

Глава 3.
Одно свойство произведения Адамара специальных степенных рядов одной и нескольких переменных с положительными коэффициентами.

3.1 Введение.

Цель настоящей главы — описать множество рядов одной переменной с положительными коэффициентам таких, что ряд обратный данному, будет иметь все коэффициенты отрицательные, кроме нулевого. Во втором параграфе вводятся вспомогательные обозначения и дается определение $\star$ операции, а также дается формулировка основного результата на случай формальных степенных рядов одной переменной (теорема 3.1 §2). В третьем параграфе показывается связь данного результата и интерполяционной задачи Неванлинны-Пика на случай рядов одной переменной. Четвертый параграф посвящен доказательству результата параграфа 2. Там же приводятся примеры коэффициентов и оценки коэффициентов обратного ряда. В пятом даются вспомогательные обозначения, формулируется основной результат, касающийся рядов нескольких переменных (теорема 3.2 §5). Шестой параграф посвящен доказательству теорема 3.2 §5 . В седьмом параграфе даются примеры применения теоремы 3.1 §2 для некоторых рядов, и доказано, что множество рядов с положительными коэффициентами, у которых обратный ряд имеет все неположительные коэффициенты, кроме нулевого, не является выпуклым в общем случае. Восьмой параграф посвящен оценкам интегралов в задачах ТФКП.

3.2 Основные определения и формулировки.

Хорошо известно, что у формального степенного ряда одной переменной с первым положительным коэффициентом и остальными отрицательными, ряд, обратный исходному будет иметь строго положительные коэффициенты (см.[1]). Однако, обратное утверждение неверно, и в случае ряда одной переменной $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ Харди и Калуца показали, что логарифмической выпуклости коэффициентов

$$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} \geq \frac{a_{n+1}}{a_n}, \tag{3.1}$$

достаточно для того, чтобы ряд, обратный формальному степенному ряду с положительными коэффициентами будет иметь все отрицательные коэффициенты, кроме самого первого (см.). Этот результат имеет приложение в интерполяционной задаче Неванлинны-Пика [4],[11]. Отметим, что условие Харди-Калуца (3.1) не сохраняется при умножении формальных степенных рядов. С другой стороны, условие Харди (3.1) сохраняется при произведении Адамара двух рядов – поэлементном умножении коэффициентов степенных рядов

$$(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n) \star (\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n c_n x^n.$$

Мы покажем, что произведение Адамара $\star$ сохраняет не только условие Харди-Калуца, но и неотрицательность коэффициентов обратного ряда.

Теорема 3.1. *Пусть $f_1(x) = a_0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ и $f_2(x) = c_0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n x^n$ – два формальных степенных ряда с положительными коэффициентами, и пусть $g_1(x) = b_0 - \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n x^n$ и $g_2(x) = d_0 - \sum\limits_{n=1}^{\infty} d_n x^n$ – ряды обратные f_1 и f_2 соответственно, причем коэффициенты b_n и d_n неотрицательны при всех n. Пусть ряд $F(x) = f_1(x) \star f_2(x)$, $G(x) = l_0 - \sum\limits_{n=1}^{\infty} l_n x^n$ – ряд обратный F. Тогда все коэффициенты l_n ряда G будут неотрицательны. Более того, можно получить оценку для коэффициентов l_n, а именно: $l_n > b_n d_n$.*

Аналогичный результат получен для формальных степенных рядов от нескольких переменных (см. теорему 3.2).

3.3 Связь с интерполяционной задачей Неванлинны-Пика.

Условие отрицательности коэффициентов обратного степенного ряда естественным образом возникает в интерполяционной задаче Неванлинны-Пика. Пусть $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$, а $H^2(\mathbb{D})$-пространство Харди в $\mathbb{D}$. Для данных точек $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{D}$ и значений $w_1, w_2, \ldots, w_n \in \mathbb{D}$ мы хотим найти функцию $\varphi \in H^\infty(\mathbb{D})$ такую, что $\varphi(x_k) = w_k$ при всех $k = 1, \ldots, n$, при этом норма φ

$$||\varphi|| = sup|\varphi(z)| \leq 1, z \in \mathbb{D}.$$

Известно, что задача Неванлинны-Пика разрешима тогда и только тогда, когда матрица $A = (\frac{1-w_k\overline{w_l}}{1-x_k\overline{x_l}})_{1\leq k,l\leq n}$ не строго положительно определен, то есть, матрица

$$A = ((1 - w_k\overline{w_l})k(x_k, x_l))_{1\leq k,l\leq n} \text{ не сторого положительно определена,} \quad (3.2)$$

где $k(x, y) = \frac{1}{1-x\overline{y}}$ – воспроизводящее ядро пространства Харди $H^2(\mathbb{D})$. Это условие впервые было получено Пиком в 1916 году, более того, он доказал, что в случае, если определитель матрицы A равен 0, то решение единственно и представимо в виде произведения Бляшке, а в 1919 году Р. Неванлинна рассмотрел эту задачу независимо от Пика.

Рассмотрим общую задачу Неванлинны-Пика. Пусть $H-$ гильбертово пространство аналитических функций в $\mathbb{D}$ такое, что функционал вычисления значения в точке непрерывен, то есть $H-$ пространство с воспроизводящим ядром $k(w, z)$, $(f(z), k(w, z))_H = f(w)$. Для данных $x_1, x_2, \ldots, x_n, w_1, w_2, \ldots, w_n \in \mathbb{D}$ мы ищем мультипликатор φ пространства H такой, что $\varphi(x_k) = w_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$ и $||\varphi|| \leq 1$. Известно (см.[1]), что условие положительной определенности матрицы $A = ((1 - w_k\overline{w_l})k(x_k, x_l))_{1\leq k,l\leq n}$, будет необходимым для существования мультипликатора φ. Это условие будет достаточным если матрица

$$K = (k(x_k, x_l))_{1\leq k,l\leq n} \text{ положительно определена} \quad (3.3)$$

и воспроизводящее ядро $k(x,y)$ представимо в виде

$$k(x,y) = \frac{\delta(x)\overline{\delta(y)}}{1 - b(x,y)}, \tag{3.4}$$

где $\delta(x)$ не принимает значение 0, а функция $b(x,y)$ такая, что матрица $B = (b_(k,l)) = (b(x_k, x_l))_{1\le k,l\le n}$ положительно определена.

Ядра $k(x,y)$ часто называются ядрами Неванлинны-Пика. Рассмотрим ядра следующего вида $k(x,y) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x\overline{y})^n$ (воспроизводящее ядро весового пространства $H^2(\mathbb{D}, \frac{1}{a_n}) = f = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n,)$. Для выполнения условия (3.3) достаточно неотрицательности чисел a_n, а для выполнения условия (3.4), достаточно, чтобы у степенного ряда $1/k(x,y) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n (x\overline{y})^n, ||f||^2 = \sum\limits_{n\ge 0} \frac{1}{a_n} ||c_n||^2 < \infty$ все коэффициенты, кроме нулевого, были неположительны.

Теорема 3.1 имеет важное приложение в теории гильбертовых пространств фунцкий с воспроизводящими ядрами Неванлинны-Пика. Одним из важных примеров является простанство $l^2(w_n)$ функций $f(z)$ аналитических в единичном круге, $f(z) = \sum\limits_{n\ge 0} f_n z^n$ с нормой

$$||f||^2 = \sum_{n\ge 0} w_n ||f_n||^2 < \infty,$$

при этом числа w_n строго положительны и для формального степенного ряда $\sum\limits_{n\ge 0} (w_n)^{(-1)} x^n$ справедливы соотношения

$$(\sum_{n\ge 0} (w_n)^{(-1)} x^n)^{(-1)} = w_0 - \sum_{n>0} b_n x^n, b_n \ge 0, n > 0.$$

В обозначениях теоремы 3.1 $w_n = a_n^{(-1)}$. Из теоремы 3.1 следует полугрупповое свойство пространств: если пространства $l^2(w_n)$ и $l^2(v_n)$ обладают ядрами Неванлинны-Пика, то и пространство $l^2(w_n v_n)$ обладает тем же свойством.

3.4 Доказательство основных результатов.

В этом параграфе будет доказана теорема 3.1 и сформулирован и доказан аналогичный результат для формальных степенных рядов от нескольких переменных (теорема 3.2).

Доказательство теоремы 3.1. Не умаляя общности можем считать, что $a_0 = b_0 = c_0 = d_0 = 1$. Поскольку для рядов $F(x)$ и $G(x)$, $f_1(x)$ и $g_1(x)$, $f_2(x)$ и $g_2(x)$ выполнены соотношения

$$F(x)G(x) = 1, \quad f_1(x)g_1(x) = 1, \quad f_2(x)g_2(x) = 1,$$

то, приравнивая коэффициенты при x^n, получим:

$$a_n c_n l_0 = a_{n-1}c_{n-1}l_1 + a_{n-2}c_{n-2}l_2 + \cdots + a_0 c_0 l_n,$$

$$a_n b_0 = a_{n-1}b_1 + a_{n-2}b_2 + \cdots + a_0 b_n,$$

$$c_n d_0 = c_{n-1}d_1 + c_{n-2}d_2 + \cdots + c_0 d_n.$$

Учитывая, что $b_0 = d_0 = l_0 = 1$, имеем:

$$a_n c_n = a_{n-1}c_{n-1}l_1 + a_{n-2}c_{n-2}l_2 + \cdots + a_0 c_0 l_n, \tag{3.5}$$

$$a_n = a_{n-1}b_1 + a_{n-2}b_2 + \cdots + a_0 b_n,$$

$$c_n = c_{n-1}d_1 + c_{n-2}d_2 + \cdots + c_0 d_n.$$

Перемножая два последних тождества, получим:

$$a_n c_n = (a_{n-1}b_1 + a_{n-2}b_2 + \cdots + a_0 b_n)(c_{n-1}d_1 + c_{n-2}d_2 + \cdots + c_0 d_n) =$$

$$= \sum_{0 \le k, m \le n-1} a_k c_m b_{n-k} d_{n-m}.$$

Будем преобразовывать полученное выражение по следующему принципу: если $k = m$, то слагаемое, содержащее $a_k c_k$ оставляем без изменений, в случае, если $k > m$, коэффициент c_m оставляем без изменений, а коэффициент a_k заменяем на равное ему выражение $a_{k-1}b_1 + a_{k-2}b_2 + \cdots + a_m b_{k-m} + \cdots + a_0 b_k = a_k$. В случае $m > k$ коэффициент a_k оставляем без изменений, а коэффициент c_m заменяем на равное ему выражение $c_{m-1}d_1 + c_{m-2}d_2 + \cdots + c_k d_{m-k} + \cdots + c_0 d_k = c_m$. После данной замены, оставляем слагаемое, содержащее $a_l c_l$, $l = m$ или $l = k$, а к остальным применяем аналогичную операцию. Продолжаем применять такую замену, до тех пор, пока остаются слагаемые вида $a_k c_m$, при $k \ne m$. Тем самым мы сможем выразить коэффициент $a_n c_n$ через коэффициенты $a_k c_k, k < n$. Приведя подобные, и обозначив через коэффициент $h_{n-k,n}$ коэффициент, стоящий при $a_k c_k$, получим, что

$$a_n c_n = \sum_{0 \le k \le n-1} h_{n-k,n} a_k c_k. \tag{3.6}$$

Очевидно, что каждый коэффициент $h_{n-k,n}$ будет неотрицательным, так как он есть сумма неотрицательных коэффициентов.

Лемма 3.1. *Коэффициент $h_{k,n}$ не зависит от выбора числа n. То есть $h_{k,n} = h_{k,m}$ при всех натуральных числах $n, m \ge k$.*

Доказательство леммы 3.1. Докажем, что при всех натуральных числах $n, \ge k$ верно соотношение $h_{k,n} = h_{k,k}$. Поскольку $h_{k,n}$ и $h_{k,k}$ это коэффициент при $a_{n-k}c_{n-k}$ и $a_0 c_0$ соответственно, то в их формировании не участвуют слагаемые вида $a_s c_t$ при $s < n-k$ или $t < n-k$ в первом случае и $s < m-k$ или $t < m-k$ во втором случае. Поэтому достаточно рассмотреть произведения вида

$$S_n = (a_{n-1}b_1 + a_{n-2}b_2 + \cdots + a_{n-k}b_k)(c_{n-1}d_1 + c_{n-2}d_2 + \cdots + c_{n-k}d_k), \tag{3.7}$$

$$S_m = (a_{m-1}b_1 + a_{m-2}b_2 + \cdots + a_{m-k}b_k)(c_{m-1}d_1 + c_{m-2}d_2 + \cdots + c_{m-k}d_k). \tag{3.8}$$

Поскольку слагаемые, содержащие $a_s c_t$ при $s < n-k$ или $t < n-k$ в первом случае и $s < m-k$ или $t < m-k$ во втором случае можно отбросить. По тем же причинам, для удобства будем считать, что

$$X_{m,i} = a_{m-i} - (a_{m-i-1}b_1 + a_{m-i-2}b_2 + \cdots + a_{m-k}b_{k-i})$$

и

$$Y_{m,i} = c_{m-j} - (c_{m-j-1}d_1 + c_{m-j-2}d_2 + \cdots + c_{m-k}d_{k-j}).$$

Откуда получаем соотношения:

$$a_{m-i} = a_{m-i-1}b_1 + a_{m-i-2}b_2 + \cdots + a_{m-k}b_{k-i} + X_{m,i}, \tag{3.9}$$

$$c_{m-j} = c_{m-j-1}d_1 + c_{m-j-2}d_2 + \cdots + c_{m-k}d_{k-j} + Y_{m,i}. \tag{3.10}$$

И аналогично:

$$a_{n-i} = a_{n-i-1}b_1 + a_{n-i-2}b_2 + \cdots + a_{n-k}b_{k-i} + X_{n,i}, \tag{3.11}$$

$$c_{n-j} = c_{n-j-1}d_1 + c_{n-j-2}d_2 + \cdots + c_{n-k}d_{k-j} + Y_{n,i}. \tag{3.12}$$

Заметим, что числа $X_{m,i}, Y_{m,i}, X_{n,i}, Y_{n,i}$ не содержат слагаемые вида $a_s c_t$ при условии $s < m-k$ или $t < m-k$в первом случае и $s < n-k$ или $t < n-k$ во втором . Положим, на начальном этапе имеем, что:

$$M_{i,j}(0) = N_{i,j}(0) = b_i d_j,$$

$$U(0) = V(0) = 0.$$

Раскрывая скобки в выражениях (3.7) и (3.8), получим:

$$S_n = \sum_{1 \le i,j \le k} a_{n-i}c_{n-j}b_i d_j = \sum_{0 \le i,j \le k} a_{n-i}c_{n-j}N_{i,j}(0) + U(0),$$

$$S_m = \sum_{1 \le i,j \le k} a_{m-i}c_{m-j}b_i d_j = \sum_{0 \le i,j \le k} a_{m-i}c_{m-j}M_{i,j}(0) + V(0).$$

Будем преобразоваывать полученные выражения по вышеописанному алгоритму к виду (3.6) построения чисел $h_{k,n}$. Оставляя без изменений слагаемые вида $a_{n-i}c_{n-i}$ и $a_{m-i}c_{m-i}$, будем последовательно на каждом заменять слагаемые вида $a_{n-i}c_{n-j}$ и $a_{m-i}c_{m-j}$, при $i \ne j$, используя формулы (3.9) - (3.12). Обозначим через $N_{i,j}(p)$ и $M_{i,j}(p)$ соответственно коэффициент при $a_{n-i}c_{n-j}$ и $a_{m-i}c_{m-j}$ в S_n и S_m на $p-$том шаге замен, а через

$$U(p) = S_n - \sum_{1 \le i,j \le k} a_{n-i}c_{n-j}N_{i,j}(p),$$

$$V(p) = S_m - \sum_{1 \le i,j \le k} a_{m-i}c_{m-j}M_{i,j}(p).$$

Заметим, что выражение $U(p)$ содержит только слагаемые вида $a_s c_t$, где хотя бы одно из чисел s, t удовлетворяет соотношению $s < n-k$ или $t < n-k$. Аналогично, выражение $V(p)$ содержит только слагаемые вида $a_s c_t$, где хотя бы одно из чисел s, t удовлетворяет соотношению $s < m-k$ или $t < m-k$.

Докажем, что на каждом шаге номер p будет верно $M_{i,j}(p) = N_{i,j}(p)$. Будем проводить доказательство по индукции.

База $p = 0$. Верно по построению чисел $M_{i,j}(0) = N_{i,j}(0) = b_i d_j$.

Переход. Пусть $M_{i,j}(p) = N_{i,j}(p)$. Зафиксируем числа I и J. Пусть для простоты $I < J$. Заменим в первой сумме число $a_{n-I}c_{n-J}N_{I,J}(p)$ на

$$(a_{n-I-1}b_1 + a_{n-I-2}b_2 + \cdots + a_{n-k}b_{k-I} + X_{n,I})c_{n-J}N_{I,J}(p),$$

а во второй сумме число $a_{m-I}c_{m-J}M_{I,J}(p)$ на

$$(a_{m-I} = a_{m-I-1}b_1 + a_{m-I-2}b_2 + \cdots + a_{m-k}b_{k-I} + X_{m,I})c_{m-J}M_{I,J}(p).$$

Получим, соответственно:

$$S_n = \sum_{1\le i,j\le k} a_{n-i}c_{n-j}N_{i,j}(p+1) + U(p+1) \quad \text{и}$$

$$S_m = \sum_{1\le i,j\le k} a_{m-i}c_{m-j}M_{i,j}(p+1) + V(p+1).$$

Посмотрим, что произойдет с коэффициентами $N_{i,j}(p+1)$ и $M_{i,j}(p+1)$.
1. $M_{I,J}(p+1) = N_{I,J}(p+1) = 0$.
2. при $1 \le s \le (k-I)$ $N_{I+s,J}(p+1) = N_{I+s,J}(p) + N_{I,J}(p)b_s$ и $M_{I+s,J}(p+1) = = M_{I+s,J}(p) + M_{I,J}(p)b_s$, следовательно, $M_{I+s,J}(p+1) = N_{I+s,J}(p+1)$.
3. В остальных случаях $N_{i,j}(p) = N_{i,j}(p+1)$ и $M_{i,j}(p) = M_{i,j}(p+1)$.
Тем самым, после проведения такой замены коэффициент $M_{i,j}(p+1) = N_{i,j}(p+1)$. Заметим, что по построению коэффициентов $h_{k,n}$, на последнем шаге номер p будет верно, что $M_{i,j}(p) = N_{i,j}(p) = 0$ при $i \ne j$ и $M_{i,i}(p) = N_{i,i}(p)$ при всех $i : 1 \le i \le k$. Кроме того, по определению коэффициентов $h_{k,n}$ и $h_{k,m}$, $h_{k,n} = N_{k,k}(p)$ и $h_{k,m} = M_{k,k}(p)$. Следовательно, $h_{k,n} = h_{k,m}$. Лемма 3.1 доказана. ◯

Используя лемму 3.1, можно считать, что $h_{k,n} = h_k$ перепишем выражение (3.6) в более удобной форме:

$$a_nc_n = \sum_{0\le k\le n-1} h_{n-k}a_kc_k = a_{n-1}c_{n-1}h_1 + a_{n-2}c_{n-2}h_2 + \cdots + a_0c_0h_n. \tag{3.13}$$

Докажем, что $h_n = l_n$. Индукция по n.
База: $n = 1$.
Заметим, что

$$a_1 = b_1a_0, \quad c_1 = d_1c_0, \quad a_1c_1 = a_0c_0b_1d_1 = a_0c_0l_1 = a_0c_0h_1.$$

Переход: от $(n-1)$ к n. Приравнивая выражения (3.5) и (3.13), и учитывая, что по предположению индукции $h_1 = l_1, h_2 = l_2, \cdots, h_{n-1} = l_{n-1}$, получим требуемое $h_n = l_n$. Тем самым, поскольку коэффициент h_n положителен, получим, что коэффициент l_n тоже положителен. Тем самым, первая часть теоремы доказана.

Для того, чтобы доказать оценку $l_n > b_n d_n$ для коэффициентов l_n будем использовать процесс построения коэффициентов h_n в первой части доказательства теоремы 3.1. Действительно, поскольку верно соотношение $h_n = l_n$, то достаточно проверить, что верно неравенство $h_n > b_n d_n$, а это является верным, поскольку слагаемое $b_n d_n$ входит в разложение коэффициента h_n, а остальные слагаемые, входящие в него - положительны.

Теорема 3.1 доказана. $\bigcirc$

Замечание 3.1. *При построении коэффициентов получается, что коэффициент h_n есть симметрический многочлен с целыми неотрицательными коэффициентами, зависящий от $b_1, b_2, \cdots, b_n, d_1, d_2, \cdots, d_n$, тем самым $h_n = h_n(b_1, b_2, \cdots, b_n, d_1, d_2, \cdots, d_n) = h_n(d_1, d_2, \cdots, d_n, b_1, b_2, \cdots, b_n)$. Более того, верно соотношение $h_n(1, 1, \cdots, 1) = 3^{n-1}$.*

Приведем примеры нескольких первых коэффициентов h_n.

$$h_1 = b_1 d_1,$$

$$h_2 = b_1^2 d_2 + b_2 d_1^2 + b_2 d_2,$$

$$h_3 = b_1^3 d_3 + 2b_1 b_2 d_1 d_2 + 2b_1 b_2 d_3 + b_3 d_1^3 + 2b_3 d_1 d_2 + b_3 d_3,$$

$$h_4 = b_1^4 d_4 + 2b_1^2 b_2 d_1 d_3 + b_1^2 b_2 d_2^2 + 3b_1^2 b_2 d_4 + 2b_1 b_3 d_1^2 d_2 + 2b_1 b_3 d_1 d_3 + 2b_1 b_3 d_2^2 + 2b_1 b_3 d_4 +$$
$$+ b_2^2 d_1^2 d_2 + 2b_2^2 d_1 d_3 + b_2^2 d_4 + b_4 d_1^4 + 3b_4 d_1^2 d_2 + 2b_4 d_1 d_3 + b_4 d_2^2 + b_4 d_4.$$

3.5 Многомерный случай.

Теорему 3.1 можно обобщить на случай формальных степенных рядов нескольких переменных. Для этого в дальнейшем нам потребуются следующие вспомогательные обозначения. Пусть $s = (s_1, \ldots, s_n)$ – мультииндекс. Обозначим через $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ – мультииндекс, состоящий из нулей и одной единицы на $i-$м месте, а через $\mathbb{O} = (0, \ldots, 0)$ и $\mathbb{E} = (1, \ldots, 1)-$ мультииндексы, состоящий из нулей и единиц соответственно. Для удобства и краткости будем использовать обозначения $x^s = x_1^{s_1} x_2^{s_2} \dots x_n^{s_n}$ и $a_s = a_{s_1,s_2,\dots,s_n}$. Также будет писать, что $s > t$ и $s \geq t$, если при всех $i = 1, 2, \dots, n$ выполнено $s_i > t_i$ и $s_i \geq t_i$ соответственно. Обозначим через $||s|| = \sum\limits_{i=1}^{n} s_i-$ порядок мультииндекса s. Будем говорить, что $s >> t$ если выполнены два условия $s \geq t$ и $s \neq t$. Кроме того, $s >< t$, если коэффициенты s и t несравнимы.

Теорема 3.2. *Пусть $f_1(x) = a_{\mathbb{O}} + \sum\limits_{s>>\mathbb{O}}^{\infty} a_s x^s$ и $f_2(x) = c_{\mathbb{O}} + \sum\limits_{s>>\mathbb{O}}^{\infty} c_s x^s$ – два формальных степенных ряда от n переменных с положительными коэффициентами, и пусть $g_1(x) = b_{\mathbb{O}} - \sum\limits_{s>>\mathbb{O}}^{\infty} b_s x^s$ и $g_2(x) = d_{\mathbb{O}} - \sum\limits_{s>>\mathbb{O}}^{\infty} d_s x^s$ – ряды обратные f_1 и f_2 соответственно, причем коэффициенты b_s и d_s неотрицательны при всех s. Пусть $a_{\mathbb{O}} = b_{\mathbb{O}} = c_{\mathbb{O}} = d_{\mathbb{O}} = 1$. Пусть ряд $F(x) = a_{\mathbb{O}} c_{\mathbb{O}} + \sum\limits_{s>>\mathbb{O}}^{\infty} (a_s c_s) x^s$, $G(x) = l_{\mathbb{O}} - \sum\limits_{s>>\mathbb{O}}^{\infty} l_s x^s$ – ряд обратный F. Тогда все коэффициенты l_s ряда G будут неотрицательны. Более того, можно получить оценку для коэффициентов l_s, а именно: $l_s > b_s d_s$.*

3.6 Многомерный случай. Доказательство теоремы 3.2.

Доказательство теоремы 3.2. Не умаляя общности можем считать, что $a_{\mathbb{O}} = b_{\mathbb{O}} = c_{\mathbb{O}} = d_{\mathbb{O}} = 1$. Поскольку для рядов $F(x)$ и $G(x)$, $f_1(x)$ и $g_1(x)$, $f_2(x)$ и $g_2(x)$ выполнены соотношения

$$F(x)G(x) = 1, \quad f_1(x)g_1(x) = 1, \quad f_2(x)g_2(x) = 1,$$

то, приравнивая коэффициенты при x^s, получим:

$$a_s c_s l_{\mathbb{O}} = \sum_{\mathbb{O} \leq u << s} a_u c_u l_{s-u}$$

$$a_s b_{\mathbb{O}} = \sum_{\mathbb{O} \leq u << s} a_u b_{s-u}$$

$$c_s d_{\mathbb{O}} = \sum_{\mathbb{O} \leq v << s} c_v d_{s-v}$$

Учитывая, что $b_{\mathbb{O}} = d_{\mathbb{O}} = l_{\mathbb{O}} = 1$, имеем:

$$a_s c_s = \sum_{\mathbb{O} \leq u << s} a_u c_u l_{s-u} \tag{3.14}$$

$$a_s = \sum_{\mathbb{O} \leq u << s} a_u b_{s-u},$$

$$c_s = \sum_{\mathbb{O} \leq v << s} c_v d_{s-v}.$$

Перемножая два последних тождества, получим:

$$a_s c_s = (\sum_{\mathbb{O} \leq u << s} a_u b_{s-u})(\sum_{\mathbb{O} \leq v << s} c_v d_{s-v}) = \sum_{\mathbb{O} \leq u,v << s} a_u c_v b_{s-u} d_{u-v}.$$

Будем преобразовывать полученное выражение по следующему алгоритму: на каждом шаге если $u = v$, то слагаемое, содержащее $a_u c_v$ оставляем без изменений, в случае, если $u >> v$, c_v оставляем без изменений, а a_u заменяем на равное ему выражение $a_u = \sum\limits_{\mathbb{O} \leq t << u} a_t b_{u-t}$. В случае $v >> u$ действуем аналогично. В случае, если $u >< v$, c_v заменяем на равное ему выражение $c_v = \sum\limits_{\mathbb{O} \leq t << u} c_t d_{v-t}$, а a_u заменяем на равное ему выражение $a_u = \sum\limits_{\mathbb{O} \leq t << u} a_t b_{u-t}$. После данной замены и раскрытия скобок, оставляем слагаемые вида $a_v c_v$, а к остальным применяем аналогичную операцию. Продолжаем применять такую замену, до тех пор, пока остаются слагаемые вида $a_u c_v$, при $u \neq v$. Тем самым выразим коэффициент $a_s c_s$ через коэффициенты $a_u c_u, u << s$, приведя подобные, и обозначив через коэффициент $h_{s-u,s}$ коэффициент, стоящий при $a_u c_u$, получим, что

$$a_s c_s = \sum_{\mathbb{O} \leq u << s} h_{s-u,s} a_u c_u. \tag{3.15}$$

Очевидно, как и в случае для одной переменной, что коэффициент $h_{s-u,s}$ будет неотрицательным, так как есть сумма неотрицательных коэффициентов.

Лемма 3.2. *Коэффициент $h_{u,s}$ не зависит от s. То есть $h_{u,s} = h_{u,t} = h_{u,u}$ при всех $s, t >> u$.*

Доказательство леммы 3.2. Докажем, что при всех мультииндексах u и sнатуральных числах таких, что верно $s >> u$, верно соотношение $h_{u,s} = h_{u,u}$. Поскольку $h_{u,s}$ и $h_{u,u}$ это коэффициент при $a_{u-s} c_{u-s}$ и $a_{\mathbb{O}} c_{\mathbb{O}}$ соответственно, то в их формировании участвуют слагаемые вида $a_v c_w$ при $v >> s-u$ и $w >> s-u$ одновременно. Поэтому достаточно рассмотреть произведения вида

$$T_u = (\sum_{\mathbb{O} \le v << u} a_v b_{u-v})(\sum_{\mathbb{O} \le v << u} c_v d_{u-v}) = (\sum_{\mathbb{O} << v \le u} a_{u-v} b_v)(\sum_{\mathbb{O} << v \le u} c_{u-v} d_v), \quad (3.16)$$

$$T_s = (\sum_{s-u \le v << s} a_v b_{s-v})(\sum_{s-u \le v << u} c_v d_{s-v}) = (\sum_{\mathbb{O} << v \le u} a_{s-v} b_v)(\sum_{\mathbb{O} << v \le u} c_{s-v} d_v), \quad (3.17)$$

поскольку слагаемые, содержащие $a_v c_w$ при $v < s-u$ или $w < s-u$ не будут участвовать в формировании коэффициента $h_{u,s}$ и их можно отбросить. По тем же причинам, при всех мультииндексах α таких, что $\mathbb{O} << \alpha \le u$, будем считать, что:

$$X_{s,\alpha} = a_{s-\alpha} - (\sum_{s-u \le v << s-\alpha} a_v b_{s-v-\alpha})$$

и

$$Y_{s,\alpha} = c_{s-\alpha} - (\sum_{s-u \le v << s-\alpha} c_v d_{s-v-\alpha}),$$

откуда получаем соотношения:

$$a_{s-\alpha} = (\sum_{s-u \le v << s-\alpha} a_v b_{s-v-\alpha}) + X_{s,\alpha}, \quad (3.18)$$

$$c_{s-\alpha} = (\sum_{s-u \le v << s-\alpha} c_v d_{s-v-\alpha}) + Y_{s,\alpha}. \quad (3.19)$$

Заметим, что числа $X_{s,\alpha}, Y_{s,\alpha}$ не содержат слагаемые вида $a_v c_w$ при условии $v >> s-u$ или $w >> s-u$. Положим, на начальном этапе , что:

$$U_{v,w}(0) = S_{v,w}(0) = b_v d_w,$$

$$Z(0) = 0.$$

Раскрывая скобки в выражениях (3.16) и (3.17), получим

$$T_u = \sum_{\mathbb{O} << v,w \le u} a_{u-v} c_{u-w} b_v d_w = \sum_{\mathbb{O} << v,w \le u} a_{u-v} c_{u-w} U_{v,w}(0),$$

$$T_s = \sum_{\mathbb{O} << v,w \le u} a_{s-v} c_{s-w} b_v d_w = \sum_{\mathbb{O} << v,w \le u} a_{s-v} c_{s-w} S_{v,w}(0) + Z(0).$$

Будем преобразоваывать полученные выражения по вышеописанному алгоритму к виду (3.15) построения чисел $h_{s,u}$. Оставляя без изменений слагаемые вида

$a_{u-v}c_{u-v}$ и $a_{s-v}c_{s-v}$, будем последовательно на каждом заменять слагаемые вида $a_{u-v}c_{u-w}$ и $a_{s-v}c_{s-w}$, при $v \neq w$, используя формулы (3.18) - (3.19). Обозначим через $S_{v,w}(p)$ и $U_{v,w}(p)$ соответственно коэффициент при $a_{s-v}c_{s-w}$ и $a_{u-v}c_{u-w}$ в T_s и T_u на $p-$том шаге замен, а через

$$Z(p) = T_s - \sum_{\mathbb{O}<<v,w\leq u} a_{s-v}c_{s-w}S_{v,w}(p),$$

Заметим, что выражение $Z(p)$ содержит только слагаемые вида $a_v c_w$, где хотя бы одно из чисел v, w удовлетворяет соотношению $v << s-u$ или $w << s-u$.

Докажем, что на каждом шаге номер p будет верно $U_{v,w}(p) = S_{v,w}(p)$. Будем проводить доказательство по индукции.

База $p = 0$. Верно по построению чисел $U_{v,w}(0) = S_{v,w}(0) = b_v d_w$.

Переход. Пусть $U_{v,w}(p) = S_{v,w}(p)$. Зафиксируем различные мульиитндексы I и J такие, что $I << u$ и $J << u$. Возможно три случая:

1. $I << J$
2. $I >> J$
3. мультииндексы I и J несравнимы.

Случаи 1 и 2 аналогичны, поэтому рассмотрим только первый из них: $I << J$. Будем действовать согласно алгоритма построения чисел $h_{u,s}$.

Заменим в первой сумме T_u выражение $a_{u-I}c_{u-J}U_{I,J}(p)$ на равное ему выражение $(\sum\limits_{\mathbb{O}\leq t<<u-I} a_t b_{u-I-t})c_{u-J}U_{I,J}(p)$, а во второй сумме T_s выражение $a_{s-I}c_{s-J}S_{I,J}(p)$ на равное ему выражение $(\sum\limits_{\mathbb{O}\leq t<<s-I} a_t b_{s-I-t})c_{s-J}S_{I,J}(p)$. Получим, соответственно

$$T_u = \sum_{\mathbb{O}<<v,w\leq u} a_{u-v}c_{u-w}U_{v,w}(p+1),$$

$$T_s = \sum_{\mathbb{O}<<v,w\leq u} a_{s-v}c_{s-w}S_{v,w}(p+1) + Z(p+1).$$

Посмотрим, что произойдет с коэффициентами $U_{v,w}(p+1)$ и $S_{v,w}(p+1)$.

1. $U_{I,J}(p+1) = S_{I,J}(p+1) = 0$.
2. при $1 \leq \alpha \leq (u-I)$ $U_{I+\alpha,J}(p+1) = U_{I+\alpha,J}(p) + U_{I,J}(p)b_\alpha$ и $S_{I+\alpha,J}(p+1) = $ $= S_{I+\alpha,J}(p) + S_{I,J}(p)b_\alpha$, следовательно, $U_{I+\alpha,J}(p+1) = S_{I+\alpha,J}(p+1)$.
3. В остальных случаях $U_{v,w}(p) = U_{v,w}(p+1)$ и $S_{v,w}(p) = S_{v,w}(p+1)$.

Тем самым, после проведения такой замены получим: $U_{v,w}(p+1) = S_{v,w}(p+1)$.

Теперь рассмотрим третий из возможных случаев, а именно, когда мультииндексы I и J несравнимы. В этом случае происходят замены чисел a_{u-I}, c_{u-J} в сумме T_u и замены чисел a_{s-I}, c_{s-J} в сумме T_s. Будем проводить эти замены не одновременно, а последовательно: вначале заменим $a_{u-I}c_{u-J}U_{I,J}(p)$ на равное ему выражение $(\sum\limits_{\mathbb{O}\leq t<<u-I} a_t b_{u-I-t})c_{u-J}U_{I,J}(p)$, а потом проведем замену в полученной сумме числа c_{u-J} на $(\sum\limits_{\mathbb{O}\leq t<<u-J} c_t d_{u-J-t})$ в сумме T_u. Аналогичные операции с выражением $a_{s-I}c_{s-J}S_{I,J}(p)$ произведем в сумме T_s. Заметим, что при таких операциях на каждом шаге коэффициенты $U_{v,w}(p+1) = S_{v,w}(p+1)$ при всех $v, w.$. Заметим, что по построению коэффициентов $h_{u,s}$, на последнем шаге номер p будет верно, что $U_{v,w}(p) = S_{v,w}(p) = 0$ при $v \neq w$ и $U_{v,v}(p) = S_{v,v}(p)$ при всех $v : \mathbb{O} << v \leq u$. Кроме того, по определению коэффициентов $h_{u,u}$ и $h_{u,s}$, $h_{u,u} = U_{u,u}(p)$ и $h_{u,s} = S_{u,u}(p)$. Следовательно, $h_{u,u} = h_{u,s}$. Лемма 3.2 доказана. ◯

Используя лемму 3.2, можно считать, что $h_{u,s} = h_u$. Поэтому, перепишем выражение (3.15) в более удобной форме:

$$a_s c_s = \sum_{0\leq u<<s} a_u c_u h_{s-u}. \tag{3.20}$$

Докажем, что $h_s = l_s$. Индукция по порядку мультииндекса s.
База $||s|| = 1$. В этом случае, все сводится к случаю одной переменной.
Переход от $||s|| = (k-1)$ к $||s|| = k$. Приравнивая выражения (3.14) и (3.20), и учитывая, что по предположению индукции $h_u = l_u$ всех u, чей порядок $||u||$ не превосходит $(k-1)$, получим требуемое $h_s = l_s$. Тем самым, поскольку коэффициент h_s положителен, получим, что коэффициент l_s положителен. Тем самым, первая часть теоремы доказана.
Вторая часть теоремы 3.2 доказывается аналогично второй части теоремы 3.1.

Теорема 3.2 доказана. ◯

3.7 Примеры.

Приведем пример ряда, для которого отрицательность коэффициентов обратного ряда легко проверяется благодаря теореме 3.1.

Пример 3.1. Рассмотрим ряд

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} F_k^2 x^k,$$

где F_k обозначает последовательнсоть чисел Фибоначчи ($F_0 = 1, F_1 = 1, F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, при всех натуральных n). Заметим, что у рядов $f_1(x) = f_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} F_k x^k$ обратные к ним ряды имеют вид

$$\frac{1}{f_1(x)} = \frac{1}{f_2(x)} = \frac{1}{1 - x - x^2}$$

и у них все неположительные коэффициенты начиная с первого,и, следовательного, по теореме 3.1. ряд , обратный к $f(x) = f_1(x) \star f_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} F_k^2 x^k$, имеет все неположительные коэффициенты начиная с первого.

В статье [14] доказывается, что если два ряда f и g обладают свойством логарифмической выпуклости коэффициентов, то для любых положительных чисел α и β таких, что выполняется соотношение $\alpha + \beta = 1$, то верно что и ряд $h(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$ обладает свойством логарифмической выпуклости коэффициентов. Тем самым множеством таких рядов - выпукло, и ряд, обратный к ряду h имеет все неположительные коэффициенты, кроме нулевого. Убедимся в том, что для произвольных рядов это свойство не будет верным. Пусть даны два ряда f и g с положительными коэффициентами, у которых обратные им ряды имеют все неположительные коэффициенты, кроме нулевого. Верно ли, что и ряд, обратный ряду $h(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$ будет иметь имеют все неположительные коэффициенты, кроме нулевого для любых положительных чисел α и $\beta, \alpha + \beta = 1$?

Пример 3.2. Положим $\alpha = \beta = 0.5$,

$$f(x) = \frac{1}{1 - 2x - 1x^2}, \qquad g(x) = \frac{1}{1 - 1x - 7x^2}.$$

Заметим, что по построению ряды f и g будут иметь все коэффициенты положительными.

$$f(x) = 1 + 2x + 5x^2 + 12x^3 + \cdots, \qquad g(x) = 1 + 1x + 8x^2 + 15x^3 + \cdots.$$

Рассмотрим ряд

$$h(x) = 0.5(f(x) + g(x)) = 1 + 1.5x + 6.5x^2 + 13.5x^3 + \cdots.$$

Нетрудно проверить, что обратный ряд к $h(x)$ имеет вид:

$$h^{-1}(x) = 1 - 1.5x - 4.25x^2 + 2.625x^3 + \cdots .$$

Как видно, коэффициент при x^3 у обратного ряда положителен.
Тем самым, доказано, что множество рядов с положительными коэффициентами, у которых обратный ряд имеет все неположительные коэффициенты, кроме нулевого, не является выпуклым в общем случае.

3.8 Приложения к задачам ТФКП.

Предположим, что функции $f(z)$ и $g(z)$ имеют ненулевой радиус сходимости представляющих их степенных рядов, скажем $R > 0$. Тогда условие Харди влечет ограничение на поведение функции $g(z)$ при приближени к граничной окружности. Пусть $0 < r < R, g(re^{i\theta}) = \frac{1}{f(re^{i\theta})} = b_0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n r^n e^{in\theta}$, где $b_0 > 0, b_n \leq 0, n > 0$. Имеем, при $0 < \alpha < 1$ все коэффициенты $c_n(\alpha)$ ряда $(1-z)^{-\alpha} = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n(\alpha) z^n$ будут положительны. Взяв $0 < \rho < 1$, получим

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(re^{i\theta})(1-\rho e^{-i\theta})^{-\alpha} d\theta =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n r^n e^{in\theta})(1+\sum_{n=1}^{\infty} c_n(\alpha)\rho^n e^{-in\theta}) d\theta = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n c_n(\alpha) r^n \rho^n < b_0. \tag{3.21}$$

Далее,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(re^{i\theta})(1-\rho e^{i\theta})^{-\alpha} d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n r^n e^{in\theta})(1+\sum_{n=1}^{\infty} c_n(\alpha)\rho^n e^{in\theta}) d\theta = b_0. \tag{3.22}$$

Тогда (3.21) и (3.22) влекут

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(re^{i\theta}) \operatorname{Re}(1-\rho e^{i\theta})^{-\alpha} d\theta = \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(re^{i\theta})((1-\rho e^{-i\theta})^{-\alpha} + (1-\rho e^{i\theta})^{-\alpha}) d\theta < b_0. \tag{3.23}$$

Переходя в (3.23) к пределу при $\rho \to 1-0$, получаем

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(re^{i\theta}) \operatorname{Re}(1-e^{i\theta})^{-\alpha} d\theta < b_0. \tag{3.24}$$

При $0 < \alpha < 1, 0 < \theta < \pi$ имеем, что

$$\operatorname{Re}(1-e^{i\theta})^{-\alpha} = \operatorname{Re}(e^{\frac{-i\theta\alpha}{2}}(e^{\frac{-i\theta}{2}} - e^{\frac{i\theta}{2}})^{-\alpha}) = \operatorname{Re}(e^{\frac{-i\theta\alpha}{2}}(-2i\sin(\frac{\theta}{2}))^{-\alpha}) =$$
$$= 2^{-\alpha}\operatorname{Re}(e^{\frac{-i\theta\alpha}{2}}e^{\frac{i\pi\alpha}{2}}(\sin(\frac{\theta}{2}))^{-\alpha}) = 2^{-\alpha}(\sin(\frac{\theta}{2}))^{-\alpha}\operatorname{Re}(e^{\frac{i(\pi-\theta)\alpha}{2}}) =$$
$$= 2^{-\alpha}(\sin(\frac{\theta}{2}))^{-\alpha}\cos\left(\frac{(\pi-\theta)\alpha}{2}\right).$$

Аналогично, при $0 < \alpha < 1, -\pi < \theta < 0$ имеем, что

$$\operatorname{Re}(1-e^{i\theta})^{-\alpha} = 2^{-\alpha}(\sin(\frac{|\theta|}{2}))^{-\alpha}\cos(\frac{(\pi-|\theta|)\alpha}{2}).$$

Поэтому из (3.24) следует:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(re^{i\theta})\operatorname{Re}(1-e^{i\theta})^{-\alpha}d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(re^{i\theta})\frac{\cos(\frac{(\pi-|\theta|)\alpha}{2})}{2^{\alpha}(\sin(\frac{|\theta|}{2}))^{\alpha}}d\theta < b_0 = \frac{1}{a_0} = \frac{1}{f(0)}. \tag{3.25}$$

Поскольку интеграл в (3.25) вещественный, то окончательно получим

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{Re}(\frac{1}{f(re^{i\theta})})\frac{\cos(\frac{(\pi-|\theta|)\alpha}{2})}{(\sin(\frac{|\theta|}{2}))^{\alpha}}d\theta < \frac{2^{\alpha}}{f(0)}. \tag{3.26}$$

Заключение

Основные результаты диссертационной работы состоят в следующем:

1. Получены новые, более широкие, достаточные условия, гарантирующие неположительность коэффициентов обратного степенного ряда одной переменной. Получены условия, гарантирующие неположительность коэффициентов обратного ряда нескольких переменных.

2. Доказано, что при достаточном увеличении нулевого коэффициента ряда для рядов, у которых условие логарифмической выпуклости коэффициентов выполняется при всех натуральных n, больших некоторого натурального n_0, можно подобрать такой нулевой коэффициент a_0, чтобы ряд обратный данному имел все неположительные коэффициенты, кроме нулевого.

3. Получено новое мультипликативное свойство рядов, обобщающее результаты на случай одной и нескольких переменных.

4.Получено полугрупповое свойство пространств: если пространства $l^2(w_n)$ и $l^2(v_n)$ обладают ядрами Неванлинны-Пика, то и пространство $l^2(w_n v_n)$ обладает тем же свойством.

Литература

[1] *Pick G.* Uber die Beschrankungen analytischer Funktionen, weiche durch vorgegebene Funktionswerte bewirkt werden,
Math. Ann. 77, 1916.

[2] *Nevanlinna R.* Uber Beschrankte Funktionen, die is gegebenen Punkten vorgeschriben Werte annehmen,
Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A13, 1919.

[3] *Nevanlinna R.* Uber Beschrankte Funktionen,
Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A32, 1929.

[4] *Agler J., McCarthy J.* Pick Interpolation and Hilbert function spaces,
Am. Math. Soc. Rhode Island, 2000.

[5] *Agler J.* Some Interpolation theorems of Nevanlinna-Pick type,
Preprint, 1988.

[6] *Mc Cullough S.* The local de Branges-Rovnyak Construction and complete Nevanlinna-Pick kernels,
Birkhauser verlag Boston, pp. 15–24, 1994.

[7] *P. Quiggin* Generalization of Pick's theorem of reproducing kernel Hilbert spaces,
Ph.D. thesis, Lancaster Univercity, 1993.

[8] *Харди Г.* Расходящиеся ряды,
Москва, Издательство иностранной литературы. 1951.

[9] *Szego. G.* Bemerkungen zu einer Arbeit von Herrn Fejer uber die Legendreschen Polynome,
Mathematische Zeitschrift, Vol. 25, pp. 285–98, 1926.

[10] *Kaluza Th.* Uber die Koeffizienten reziproker Potenzreihen, Mathematische Zeitschrift, Vol. 28, pp. 161–170, 1928.

[11] *Shimorin S.* Complete Nevanlinna-Pick property of Dirichlet-type spaces, Journal of Functional Analysis 191, pp. 276–296, 2002.

[12] *Ball J.A., Trent T., Vinnicov V.* Inperpolation and commutant lifting for multipliers on reproducing kernels Hilbert spaces,
Operator theory: Advances and applications, Vol. 122, pp. 89–138, Birkhauser verlag Basel, 2001.

[13] *Ball J.A., Trent T.* Unitary colligations, reproducing kernel Hilbert spaces and Nevanlinna-Pick interpolation in several variables,
Journal of Functional Analysis 197, pp. 1–61, 1998.

[14] *Baricz A., Vesti J., Vuorinen M.* On Kaluza's sign criterion for reciprocal power series,
Annales Universitate Maria Curie-Sklodowska Lublin-Poland Vol. LXV, NO. 2, pp 1–16, 2011 SECTIO A.

[15] *Железняк А.В.* Многомерный аналог условия Харди для степенных рядов,
Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия, вып. 4, стр. 28–33, 2009.

[16] *Железняк А.В.* Степенные ряды одной переменной с условием логарифмической выпуклости коэффициентов,
Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия, том 7 (65), вып. 1, стр. 28–38, 2020

[17] *Железняк А.В.* Степенные ряды нескольких переменных с условием логарифмической выпуклости коэффициентов,
Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия, том 8 (66), вып. 1, стр. 49–62, 2021.

[18] *Железняк А.В.* Мультипликативное свойство рядов, используемых в задаче Неванлинны-Пика,

Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия, том 9 (67) вып. 1, 2022.