Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Российский государственный педагогический университет
им. А. И. Герцена»

На правах рукописи

Гнутов Федор Александрович

Вербальные отображения с константами простых алгебраических групп

01.01.06 – Математическая логика, алгебра и теория чисел

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор *Гордеев Николай Леонидович.*

Санкт-Петербург
2021г.

Содержание

Введение

Вербальные отображения с константами. Пусть G – произвольная группа, а F_n– свободная группа ранга n. Пусть, далее, $\Sigma = \{\sigma_1, \dots, \sigma_m\}$ – некоторая последовательность элементов из G. Выражение вида

$$w_\Sigma = w_1\sigma_1 w_2\sigma_2 \cdots w_m\sigma_m w_{m+1},$$

где

$$w_1 = w_1(x_1, \dots, x_n), \dots, w_m = w_m(x_1, \dots, x_n) \in F_n$$

– элементы свободной группы, называют словом с константами. В данной работе мы будем также предполагать, что $\sigma_i \notin Z(G)$, где $Z(G)$ – центр группы G, и $w_2, \dots, w_m \neq 1$. (Отметим, что обычно центральные константы допускаются, но при некотором дополнительном условии; см.[9].)

Мы не исключаем случай постоянных слов $w_\Sigma = \sigma \in G$ и случай $\Sigma = \emptyset$, т.е. слов из F_n. Кроме того, мы рассматриваем и тривиальное слово $w_\Sigma = 1$ (здесь 1 – нейтральный элемент группы G). Таким образом, слова с константами здесь – это элементы свободного произведения $G * F_n$ без слов с элементами из центра и постоянные слова $w_\Sigma = \sigma \in G$.

Слово с константами w_Σ определяет вербальное отображение с константами

$$\widetilde{w}_\Sigma \colon G^n \to G,$$

заданное формулой

$$\widetilde{w}_\Sigma((g_1, \dots, g_n)) :=$$

$$= w_1(g_1, \dots, g_n)\sigma_1 w_2(g_1, \dots, g_n)\sigma_2 \cdots w_m(g_1, \dots, g_n)\sigma_m w_{m+1}(g_1, \dots, g_n).$$

Актуальность и степень разработанности темы. В последние годы интенсивно развивается теория вербальных отображений простых алгебраических групп (см. ссылки в [15]). Отправной точкой здесь служит теорема А. Бореля ([3]), которая утверждает, что вербальное отображение $\widetilde{w} \colon G^n \to G$ простой алгебраической группы G доминантно. Это значит, что образ такого отображения $\operatorname{Im} \widetilde{w}$ содержит непустое открытое подмножество $U \subset G$ и, следовательно, этот образ есть "почти вся" группа G. Однако простой пример $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}), w = x^2$ показывает, что этот образ может не совпадать со всей группой G. Действительно, в группе $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ не извлекается квадратный корень из матрицы $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ и, следовательно, такая матрица не может лежать в образе отображения $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \xrightarrow{x^2} \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$. С другой стороны, то же вербальное отображение для группы PGL_2 уже является сюръективным.

Вопрос о сюръективности того или иного вербального отображения простой алгебраической группы представляется достаточно сложным. В настоящее время все примеры несюръективных вербальных отображений простых алгебраических групп соответствуют словам $w = \omega^m$, которые являются степенями других слов. С другой стороны, примеров с сюръективными отображениями также немного. Теорема А. Бореля гарантирует сюръективность для вербальных отображений, у которых слово w является произведением двух слов $w_1(x_1, \ldots, x_k)$ и $w_2(y_1, \ldots, y_l)$ от независимых переменных (действительно, в этом случае образ

$$\mathrm{Im}\, w = \mathrm{Im}\, \widetilde{w}_1 \, \mathrm{Im}\, \widetilde{w}_2$$

и образы $\mathrm{Im}\, \widetilde{w}_1, \mathrm{Im}\, \widetilde{w}_2$ содержат открытые подмножества $U_1, U_2 \subset G$, произведение которых совпадает со всей группой G ([2]). Для "неразложимых" отображений, которые также не являются степенями других вербальных отображений, нет общих критериев сюръективности-несюръективности. Этот вопрос остается открытым даже для простейшей группы PGL_2. В работе Т. Бандман и Ю. Зархина ([1]) доказана следующая теорема.

Теорема (i) (Бандман-Зархин). *Пусть K – алгебраически замкнутое поле, $w \in F_n$ – нетривиальное слово. Тогда образ $\mathrm{Im}\, \widetilde{w}$ вербального отображения $\widetilde{w} \colon \mathrm{SL}_2(K)^n \to \mathrm{SL}_2(K)$ содержит все нецентральные полупростые элементы группы $\mathrm{SL}_2(K)$.*

Из Теоремы (i) следует, что образ вербального отображения

$$\widetilde{w} : \mathrm{PGL}_2^n(K) \to \mathrm{PGL}_2(K)$$

содержит все полупростые элементы группы $\mathrm{PGL}_2(K)$ и для сюръективности такого отображения достаточно найти в его образе нетривиальный унипотентный элемент. Интересно отметить, что существование такого элемента связано с размерностями компонент *многообразия представлений* (см.[12]).

Также Бандман и Зархин доказали ([1])

Теорема (ii) (Бандман-Зархин). *Пусть K – алгебраически замкнутое поле, $w \in F_2 \setminus F_2^2$, где $F_2^2 = [[F_2, F_2], [F_2, F_2]]$ – второй член нормального ряда свободной группы F_2. Тогда $\widetilde{w}\colon \mathrm{PGL}_2(K)^2 \to \mathrm{PGL}_2(K)$ – сюръективное отображение.*

В этой же работе был приведен пример неразложимого слова $w \in F_2^2 \setminus F_2^3$, для которого также соответствующее отображение $\widetilde{w}$ сюръективно. Этот пример был просчитан с помощью компьютерных вычислений. Затем в работе [12] был построен аналогичный пример, но уже без компьютерных вычислений. Недавно появился препринт U. Jezernik, J. Sanchez *On surjectivity of word maps on PSL_2*, в котором доказана сюръективность вербальных отображений $\widetilde{w}\colon \mathrm{PGL}_2(K)^2 \to \mathrm{PGL}_2(K)$ для слов вида $w = [[x^k, y^l], [x^m, y^n]] \in F_2^2$. Доказательство работы основано на трудных и сложно проверяемых вычислениях со следами матриц.

В данной работе мы строим некоторый алгоритм, который позволяет строить бесконечные рекурсивные последовательности вербальных отображений на группах PGL_2, SL_2, которые являются сюръектиными и у которых соответствующие слова – это элементы из любого члена нормального ряда. При этом все соответствующие слова являются неразложимыми. (Эффективность изучения рекурсивных последовательностей слов для вербальных отображений была продемонстрирована в работе А. Тома [22] о вербальных отображениях компактных топологических групп.)

В данной работе мы рассматриваем отображения с константами для простой алгебраической группы (вербальные отображения также рассматриваются как вербальные отображения с пустым множеством констант). Такие отображения, в частности, рассматривались в работах [9], [18],[12], [13], [14], [15], [16].

Одним из важных вопросов здесь является вопрос об образе $\mathrm{Im}\ \widetilde{w}_\Sigma$ такого отображения. В случае когда $\Sigma = \emptyset$, т.е. $\widetilde{w}_\Sigma = w$ – обычное вербальное отображение, тогда

$$\overline{\mathrm{Im}\ \widetilde{w}_\Sigma} = G$$

согласно теореме А. Бореля (здесь $\overline{X}$ – это замыкание X в топологии Зарисского). Для достаточно "общего слова" w_Σ образ $\mathrm{Im}\ \widetilde{w}_\Sigma$ также плотен в G ([13], Corollary 1.4). Однако для произвольного слова мы не можем ожидать, что образ соответствующего вербального отображения "почти совпадает" со всей группой G.

Пример. *Пусть $\Sigma = \{\sigma\}, w_\Sigma = x\sigma x^{-1}$. Тогда образ – это класс сопряженности элемента σ, размерность которого может быть достаточно маленькой.*

Следует отметить, что в отличие от вербальных отображений образ вербального отображения с константами не является инвариантным относительно сопряжения. Для некоторых задач важным моментом является оценка не самого образа, а множества

$$\{g\,\mathrm{Im}\ \widetilde{w}_\Sigma g^{-1} \quad | \quad g \in G\},$$

т.е. образа $\mathrm{Im}\ \widetilde{w}_\Sigma$ "с точностью до сопряжения в группе" G. Для некоторых слов w_Σ удается доказать, что

$$\overline{\{g\,\mathrm{Im}\ \widetilde{w}_\Sigma g^{-1} \quad | \quad g \in G\}} = G, \tag{0.0.1}$$

т.е. образ $\mathrm{Im}\ \widetilde{w}_\Sigma$ "почти совпадает" со всей группой G с "точностью до" сопряжений элементами группы G. В этом случае мы имеем в образе представителей "почти всех" классов сопряженных группы G. Например, в работе [13] (Theorem 1.6.) равенство 0.0.1 было доказано для слова вида

$$w_\Sigma = w_1\sigma^{k_1}w_2\sigma^{k_2}\cdots w_m\sigma^{k_m}w_{m+1}, \text{ где } \sum_i k_i = 0$$

и σ – элемент некоторого открытого подмножества X группы G.

Условие 0.0.1 удобно рассматривать в следующей форме. Для любой полупростой алгебраической группы G имеется морфизм факторизации

$$\pi\colon G \to T/W,$$

где T – зафиксированный максимальный тор группы G, W – группа Вейля системы корней G (здесь рассматривается естественное действие группы W на максимальном торе), T/W – аффинное многообразие, являющееся фактором действия W на T ([20]). Морфизм π сопоставляет любому элементу g группы G элемент $t_g \in T$, сопряженный полупростой части g_s разложения Жордана $g = g_s g_u$ элемента g. Таким образом, для некоторого подмножества $M \subset G$ равенство $\pi(M) = T/W$ означает, например то, что все M пересекает все полупростые классы сопряженных элементов. Условие 0.0.1 эквивалентно условию

$$\overline{\mathrm{Im}\ \pi \circ \widetilde{w}_\Sigma} = T/W. \tag{0.0.2}$$

Отметим, что для слов из приведенного выше примера условие 0.0.2 не может выполняться, поскольку образ отображения $\pi \circ w_\Sigma$ в данном случае заведомо одна точка. Пусть v_Δ – слово с константами. Тогда для слов вида

$$w_\Sigma = v_\Delta g v_\Delta^{-1} \tag{0.0.3}$$

множество $\mathrm{Im}\ \pi \circ \widetilde{w}_\Sigma$ – это также в точности одна точка, т.е. эти слова наиболее “удаленные” от условия 0.0.2. Отметим, что если $\mathrm{Im}\ \pi \circ \widetilde{w}_\Sigma$ – не является точка, то это некоторое конструктивное подмножество в T/W, замыкание которого – связное аффинное многообразие размерности ≥ 1. Этот факт иногда позволяет “индукционно” описать весь образ $\pi \circ \widetilde{w}_\Sigma$ (см., например, [13], Theorem 1.6.).

Слова вида 0.0.3 будем называть словами *C-типа* (постоянные слова $w_\Sigma = \sigma \in G$ также являются словами C-типа).

Цель исследования. Целью исследования является описание образов отображений с константами (в частности, вербальных отображений). Для достижения цели поставлены следующие задачи:

(1) Построить рекурсивные последовательности сюръективных вербальных отображений групп $\mathrm{PGL}_2, \mathrm{SL}_2$ соответственно от двух и трех переменных, члены которых (в отличие от Теоремы Бандман-Зархина (ii)) существуют в любом члене нормального ряда свободной группы.

(2) Получить описание “малых” вербальных отображений с константами, образы которых попадают в один класс сопряженных элементов.

(3) Получить обобщение Теоремы Бандман-Зархина (i) на случай вербальных отображений с константами.

(4) Получить описание образов “общих вербальных отображений с константами”.

(5) Получить описание образов вербальных отображений с константами простых алгебраических групп специальных типов $B_r, C_r, D_{2r}, E_7, E_8, F_4, G_2$.

Теоретическая и практическая значимость работы. Работа носит теоретический характер. Результаты и методы работы могут быть использованы как для теории вербальных отображений с константами (в частности, вербальных отображений) простых алгебраических групп, так и для структурной теории таких групп.

Методы исследования. В данной работе применялись теоретические методы теории алгебраических групп, методы алгебраической геометрии и теории алгебраических чисел.

Научная новизна. Все полученные результаты являются новыми в теории вербальных отображений с константами и вербальных отображений простых алгебраических групп. Получен новый алгоритм построения сюръективных отображений на группах ранга один, получено описание малых вербальных отображений с константами, разработан новый метод редукции вербальных отображений с константами к положительной характеристике. Получено обобщение Теоремы Бандман-Зархина на вербальные отображения с константами.

Степень достоверности. Все результаты работы снабжены подробными доказательствами.

Апробация работы. По теме исследования было прочитано два доклада:

(1) Ф. Гнутов. *Вербальные отображения на группе* GL_2// IV Всероссийская научная конференция с международным участием "Математическое моделирование и информационные технологии". Сыктывкарский Государственный Университет им. П. Сорокина. 12 - 14 ноября 2020.

(2) Ф. Гнутов. *Рекурсивные последовательности вербальных отображений групп* PGL_2, SL_2// Международный вебинар "Actual problems of the theory of Algebraic groups". Российский Государственный Педагогический Университет им. А.И. Герцена. 16-18 декабря 2020.

По теме работы опубликовано три статьи в журналах, индексируемых наукометрическими базами данных Web of Science/SCOPUS.

[1] F. Gnutov, N. Gordeev, *Recursive sequences of surjective word maps for the algebraic groups* PGL_2 *and* SL_2, Arch. Math. 114, no. 6 (2020), 609-618.

[2] Ф. А. Гнутов, Н. Л. Гордеев, *Об образе вербального отображения с константами простой алгебраической группы*, Записки научных семинаров ПОМИ РАН, т. 478 (2019), 78-99.

[3] Ф.А. Гнутов, *Об образе вербального отображения с константами простой алгебраической группы II*, Записки научных семинаров ПОМИ РАН, т. 492 (2020), 75-93.

В статьях [1] и [2], опубликованных в соавторстве, автору принадлежит следующее: в работе [1] — вычисления необходимые для доказательства теоремы и доказательства следствий (i),(ii); в работе [2] — доказательства теорем 1 и 2.

Положения, выносимые на защиту.

Теорема 1. *Пусть K – алгебраически замкнутое поле и $\omega = \omega(x, y) \in F_2 = \langle x, y\rangle$ такое, что $\omega(x, y) \neq x^l$ для каждого $l \in \mathbb{Z}$. Тогда*

1. для каждого слова

$$w(x, y) := [[x, [x, \omega]], x[x, [x, \omega]]x^{-1}]$$

соответствующее вербальное отображение $\widetilde{w}\colon \mathrm{PGL}_2(K)^2 \to \mathrm{PGL}_2(K)$ сюръективно;

2. существует число $d = d(\omega) \in \mathbb{N}$ такое, что для слова $w'(x, y, z) = w(x, y)\nu(x, z) \in F_3 = \langle x, y, z\rangle$, где

$$\nu(x, z) = \Big[[x^{2d}, \omega(x, z)], x^d[x^{2d}, \omega(x, z)]x^{-d}\Big],$$

вербальное отображение $\widetilde{w}'\colon \mathrm{SL}_2(K)^3 \to \mathrm{SL}_2(K)$ сюръективно.

Отметим, что в доказательстве Теоремы 1 непосредственно указывается как выбирать числа d из п.2 (это любое натуральное число, кроме конечного множества натуральных чисел, которое определяется ω).

Замечание 1. *Слова w, w', построенные в Теореме 1, являются неразложимыми (см. ниже Лемму 1.2).*

Замечание 2. *В Теореме 1 рассматриваются слова от двух и трех переменных. Однако, заменяя слова w, w' словами $\mu w\mu^{-1}, \mu w'\mu^{-1}$, где μ – слово от переменных, независимых от x, y (соответственно x, y, z), можно получить набор неразложимых сюръективных вербальных отображений от любого числа переменных.*

Из Теоремы 1 получаем

Следствие 1. *Пусть K – алгебраически замкнутое поле. Тогда*

1. существует бесконечная последовательность сюръективных неразложимых вербальных отображений $\widetilde{w}_m\colon \mathrm{PGL}_2(K)^2 \to \mathrm{PGL}_2(K)$ (где $m \in \mathbb{N}, w_m \in F_2$) такая, что для каждого $m \in \mathbb{N}$ выполняется следующее утверждение:

$$w_m \in F_2^i \Rightarrow w_{m+1} \in F_2^{i+1};$$

2. существует бесконечная последовательность сюръективных неразложимых вербальных отображений $\widetilde{w}'_m\colon \mathrm{SL}_2(K)^3 \to \mathrm{SL}_2(K)$ *(где* $m \in \mathbb{N}, w'_m \in F_3$*) такая, что для каждого* $m \in \mathbb{N}$ *выполняется следующее утверждение:*

$$w'_m \in F_3^i \Rightarrow w'_{m+1} \in F_3^{i+1}.$$

Используя также теорему Морозова–Джекобсона, получаем

Следствие 2. *Для любой простой алгебраической группы* G*, определенной над полем характеристики ноль, существует бесконечная последовательность неразложимых вербальных отображений* $\widetilde{w}_m\colon G^2 \to G$ *таких, что* $w_m \in F_2^m \setminus F_2^{m+1}$ *и образ каждого отображения* $\widetilde{w}_m$ *содержит все унипотентные элементы группы* G.

Используя особенности систем корней групп $B_r, C_r, D_{2r}, E_7, E_8, F_4, G_2$, получаем из Теоремы 1

Следствие 3. *Для простой алгебраической группы* G*, относящейся к одному из типов* $B_r, C_r,$ $D_{2r}, E_7, E_8, F_4, G_2$*, существует бесконечная последовательность неразложимых вербальных отображений* $\widetilde{w}_m\colon G^2 \to G$ *таких, что* $w_m \in F_3^m \setminus F_3^{m+1}$ *и образ каждого отображения* $\widetilde{w}_m$ *содержит все полупростые элементы группы* G.

Отметим, что последовательности w_m в следствиях 1–3 строятся по правилам пунктов 1 и 2 Теоремы 1, т.е. существует бесконечное число таких последовательностей в каждом из рассматриваемых случаев.

Доказательству Теоремы 1 и ее следствиям посвящена Глава 1 данной работы. Доказательство теоремы основано не только на прямых вычислениях. *Принципиальное значение для доказательства имеет теория вербальных отображений с константами.*

Существенно важным в Теореме 1 является тот факт, что отображение $\widetilde{w}$ строится по слову ω с теми же переменными x и y, что позволяет построить рекурсивную последовательность слов w_m в группе F_2 (или F_3) из Следствий 1–3. Построение сюръективных вербальных отображений при прибавлении независимых переменных — это несложное следствие Теоремы Бореля (см. п. 1.5.1).

Основной результат второй главы данной работы — описание слов с константами, для которых $\operatorname{Im} \pi \circ \widetilde{w}_\Sigma$ — это в точности одна точка, т.е. "малых" вербальных отображений с константами. Здесь результат разбивается на две части. В первой части мы рассматриваем простые алгебраические группы типов A_l, D_l, E_6, E_7, E_8 — т.е. группы, у которых все корни соответствующей системы корней имеют одинаковую длину, а во второй части — типов B_l, C_l, F_4, G_2 — группы, корни которых имеют разную длину. Это связано с тем фактом, что для групп первого типа существуют так называемые *тождества с константами*, а для второго — нет (см.[9]).

Мы доказываем следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть G — простая присоединенная алгебраическая группа типа A_l, D_l, E_6, E_7, E_8. Далее, пусть w_Σ — слово с константами из группы G. Множество $\operatorname{Im} \pi \circ \widetilde{w}_\Sigma$ состоит из одной точки тогда и только тогда, когда w_Σ — слово C-типа.*

Таким образом, в данном случае все слова с "малым" образом $\operatorname{Im} \widetilde{w}_\Sigma$ — это в точности слова C-типа.

Для случая групп B_l, C_l, F_4, G_2 нам потребуется следующее определение. Элемент $g \in G \setminus Z(G)$ называется *малым полупростым элементом*, если он сопряжен некоторому элементу $t \in T$, для которого $\alpha(t) = 1$ для любого длинного корня $\alpha \in R$. Элемент $g \in G$ называется *малым унипотентным элементом*, если он сопряжен некоторому корневому элементу $x_\alpha(s)$ $(s \neq 1)$ для какого-либо длинного корня α.

Теорема 3. *Пусть G — простая присоединенная алгебраическая группа типа B_l, C_l, F_4, G_2, определенная над полем, характеристика которого $\neq 2, 3$. Далее, пусть w_Σ — неединичное слово с константами из группы G, не содержащее среди констант малые полупростые и малые унипотентные элементы. Тогда множество $\operatorname{Im} \pi \circ \widetilde{w}_\Sigma$ состоит из одной точки в том и только том случае, когда w_Σ — слово C-типа.*

Используя Теорему 2 мы получим следствие, которое является аналогом Теоремы (i) (Бандман–Зархина).

Теорема 4. *Пусть K — алгебраически замкнутое поле. Пусть* $\widetilde{w}_\Sigma$: $\mathrm{PGL}_2(K)^n \to \mathrm{PGL}_2(K)$ *— вербальное отображение с константами. Тогда либо любой неединичный полупростой класс сопряженных элементов группы* $\mathrm{PGL}_2(K)$ *пересекается с образом* $\widetilde{w}_\Sigma$*, либо* w_Σ *— слово* C*-типа.*

На самом деле мы доказываем более общий факт (Теорема $4'$), а именно, если вербальное отображение $\widetilde{w}_\Sigma\colon \mathrm{SL}_2(K)^n \to \mathrm{SL}_2(K)$ не есть $\pm$ вербальное отображение C-типа, то его образ пересекает все нецентральные полупростые классы сопряженных элементов группы $\mathrm{SL}_2(K)$.

Для доказательства Теорем 2 и 3 мы разработали *метод редукции к локально конечным полям* позволяющий свести исследование вербальных отображений с константами $\widetilde{w}_\Sigma\colon G(K)^n \to G(K)$ для произвольного алгебраически замкнутого поля K к случаю, когда $K = \overline{F}_p$, где F_p — простое конечное поле характеристики $p > 0$, а $\overline{F}_p$ — его алгебраическое замыкание (некоторые вопросы теории вербальных отображений с константами, в частности исследуемые в данной работе, удобнее изучать именно над такими полями).

В третьей главе рассматриваются некоторые типы вербальных отображений с константами, для которых, используя результаты предыдущей главы, мы оцениваем их образы.

Следующая теорема является обобщением результата работы [13] о вербальных отображениях с константами "общего положения".

Теорема 5. *Пусть G — простая алгебраическая группа и пусть*

$$w_1, \ldots, w_{m+1} \in F_n, \ \ \text{где } \ w_2 \neq 1, m > 1.$$

Тогда существует такое непустое открытое подмножество $\mathcal{U} \subset G^n$*, что для любой последовательности* $\sigma_1, \ldots, \sigma_m \in \mathcal{U}$ *отображение*

$$\pi \circ w_\Sigma\colon G^n \to T/W,$$

где

$$w_\Sigma = w_1\sigma_1 w_2\sigma_2 \cdots w_m\sigma_m w_{m+1},$$

доминантно.

Также используя Теорему 4 и специфику систем корней $B_r, C_r, D_{2r}, E_7, E_8, F_4, G_2$ доказываем следующую теорему.

Теорема 6. *Пусть G — простая алгебраическая группа типа B_r, C_r, $D_{2r}, E_7, E_8, F_4, G_2$ и пусть $T \leq G$ – зафиксированный максимальный тор. Далее, пусть*

$$w_\Sigma = \sigma_1 w_1 \sigma_2 \cdots \sigma_m w_m,$$

где $w_i \in F_n, w_i \neq 1$, где $\Sigma = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_m\} \subset T$ — некоторое множество регулярных элементов. Тогда образ $\operatorname{Im} \widetilde{w}_\Sigma$ вербального отображения $\widetilde{w}_\Sigma : G^n \to G$ пересекает любой полупростой регулярный класс элементов группы G.

Терминология и обозначения. В данной работе используются следующие обозначения и соглашения:

$\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел;

$Z(G)$ — центр группы G;

$[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$ — коммутатор $x, y \in G$;

$\operatorname{ord} g$ — порядок элемента $g \in G$;

1 также означает единичный элемент группы; для $G = \mathrm{SL}_2(K)$ через ± 1 мы обозначаем матрицу $\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$.

K — алгебраически замкнутое поле; $\operatorname{ch} K$ — характеристика поля K. Ниже мы отождествляем алгебраическую группу G с группой K-точек $G(K)$;

Для данного слова $w \in F_n$ обозначим $\widetilde{w}$ соответствующее вербальное отображение группы G; $\operatorname{Im} \widetilde{w}$ — образ вербального отображения $\widetilde{w}$. Вербальное отображение $\widetilde{w}$ называется разложимым или неразложимым, если w разложимо или неразложимо соответственно.

Глава 1. Последовательности сюръективных вербальных отображений на группах $\mathrm{PGL}_2, \mathrm{SL}_2$

Данная глава посвящена доказательству Теоремы 1 и Следствиям 1–2. В данной главе мы рассматриваем только 2 случая $G = \mathrm{SL}_2 = \mathrm{SL}_2(K)$ или $G = \mathrm{PGL}_2 = \mathrm{PGL}_2(K)$. Топология на G — топология Зарисского.

Обозначим через T — группу диагональных матриц, B — группу верхнетреугольных матриц, U — группу верхнетреугольных унипотентных матриц в $\mathrm{SL}_2(K)$.

1.1. Предварительные результаты

1.1.1. Разложимые вербальные отображения.

Слово $w(x_1, \ldots, x_n) \in F_n$ будем называть *разложимым словом*, если

$$w(x_1, \ldots, x_n) = w_1'(x_1', \ldots, x_k')w_2'(x_{k+1}', \ldots, x_n') \tag{1.1.1}$$

для некоторого множества образующих $x_1', \ldots, x_n'$ свободной группы F_n (например, слово xyx^{-1} разложимо, так как оно может быть записано в виде $x'y'$, где $x' = xy, y' = x^{-1}$). Далее, существует автоморфизм $\Phi\colon F_n \to F_n$ такой, что $\Phi(x_i) = x_i'$. Следовательно

$$w'(x_1, \ldots, x_n) = \Phi(w(x_1, \ldots, x_n))$$

для некоторого слова $w' \in F_n$ (например, если $w(x, y) = xyx^{-1}, w'(x, y) = xy, x' = xy, y' = x^{-1}$, то автоморфизм $\Phi^{-1}\colon F_2 \to F_2$, определенный формулами $\Phi^{-1}(x) = xy, \Phi^{-1}(y) = x^{-1}$, то $\Phi^{-1}(w'(x, y)) = \Phi^{-1}(x)\Phi^{-1}(y) = xyx^{-1} = w(x, y)$). Из 1.1.1 получаем равенство

$$w'(x_1, \ldots, x_n) = \Phi(w(x_1, \ldots, x_n)) = w_1'(x_1, \ldots, x_k)w_2'(x_{k+1}, \ldots, x_n). \tag{1.1.2}$$

Лемма 1.1.1. *Разложимое вербальное отображение $\widetilde{w}\colon G^n \to G$ простой алгебраической группы G сюръективно.*

Доказательство. Образы вербальных отображений $\widetilde{w}(x_1, \ldots, x_n)$ и $\widetilde{w}'(x_1, \ldots, x_n)$ совпадают, так как w, w' являются Φ-сопряженными ([14], Prop. 1.1). Из 1.1.2 следует, что $\widetilde{w}'$ — разложимое вербальное отображение, а значит оно сюръективно ([14], Corollary 1.3) и следовательно вербальное отображение $\widetilde{w}(x_1, \ldots, x_n)$ также сюръективно.

□

Лемма 1.1.2. *Пусть* $w \in F_n^1 = [F_n, F_n]$, *где* $n = 2$ *или* $n = 3$. *Тогда* w *— неразложимое слово.*

Доказательство. Если $w \in F_n$ (где $n = 2, 3$) разложимое слово, то w можно представить в виде произведения 1.1.1, где одно из слов является словом от одной переменной x_i', которая является образующей для F_n и следовательно $w \notin [F_n, F_n]$. □

1.1.2. **Унипотентные элементы в образе вербального отображения.**

Образ каждого нетривиального вербального отображения

$$\widetilde{w} \colon \mathrm{SL}_2(K)^n \to \mathrm{SL}_2(K)$$

содержит все элементы группы $\mathrm{SL}_2(K)$ кроме, возможно, -1 и $\pm u$, где u — нетривиальный унипотентный элемент ([1, 13]). Поскольку K алгебраически замкнуто, то $u \in \mathrm{Im}\ \widetilde{w}$ тогда и только тогда, когда каждый унипотентный элемент лежит в $\mathrm{Im}\ \widetilde{w}$ ([12]). Следовательно проблема сюръективности $\widetilde{w}$ для группы $\mathrm{SL}_2(K)$ является проблемой существования в $\mathrm{Im}\ \widetilde{w}$ элементов $\pm u$ и элемента -1. Если мы знаем только, что $1 \neq u \in \mathrm{Im}\ \widetilde{w}$, то соответствующее вербальное отображение $\widetilde{w} \colon \mathrm{PGL}_2^n(K) \to \mathrm{PGL}_2(K)$ сюръективно. То есть, для доказательства первой части теоремы необходимо найти унипотентный элемент $u \neq 1$ в $\mathrm{Im}\ \widetilde{w}$, а для доказательства второй части необходимо найти элементы $-1, \pm u \in \mathrm{Im}\ \widetilde{w}'$.

1.2. Доказательство Теоремы 1

1.2.1. Некоторые формулы для коммутаторов в $\mathrm{SL}_2(K)$.

Для любого $\mathfrak{a} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(K)$, $\mathfrak{s} = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s^{-1} \end{pmatrix} \in T$ мы имеем:

$$[\mathfrak{s}, \mathfrak{a}] = \begin{pmatrix} 1 + (1 - s^2)a_{12}a_{21} & (s^2 - 1)a_{11}a_{12} \\ (s^{-2} - 1)a_{21}a_{22} & 1 + (1 - s^{-2})a_{12}a_{21} \end{pmatrix}. \tag{1.2.1}$$

Доказательство.

$$\begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s^{-1} & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & s^2 a_{12} \\ s^{-2} a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}a_{22} - s^2 a_{12}a_{21} & (s^2 - 1)a_{11}a_{12} \\ (s^{-2} - 1)a_{21}a_{22} & a_{11}a_{22} - s^{-2}a_{12}a_{21} \end{pmatrix} =$$

$$\overset{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 1}{=} \begin{pmatrix} 1 + (1 - s^2)a_{12}a_{21} & (s^2 - 1)a_{11}a_{12} \\ (s^{-2} - 1)a_{21}a_{22} & 1 + (1 - s^{-2})a_{12}a_{21} \end{pmatrix}.$$

□

Подставим $a_{22} = 0$ в $\mathfrak{a}$. Тогда $a_{12}a_{21} = -\det \mathfrak{a} = -1$. Из 1.2.1 получим

$$[\mathfrak{s}, \mathfrak{a}] = \begin{pmatrix} s^2 & (s^2 - 1)a_{11}a_{12} \\ 0 & s^{-2} \end{pmatrix}. \tag{1.2.2}$$

Далее, для матриц $\mathfrak{b} = \begin{pmatrix} s^2 & b \\ 0 & s^{-2} \end{pmatrix}$, $\mathfrak{b}' = \begin{pmatrix} s^2 & b' \\ 0 & s^{-2} \end{pmatrix}$ получим

$$[\mathfrak{b}, \mathfrak{b}'] = \begin{pmatrix} 1 & s^4(b - b')(s^{-2} - s^2) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.2.3}$$

Доказательство.

$$\begin{pmatrix} s^2 & b \\ 0 & s^{-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s^2 & b' \\ 0 & s^{-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s^{-2} & -b \\ 0 & s^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s^{-2} & -b' \\ 0 & s^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} s^4 & bs^{-2}+b's^2 \\ 0 & s^{-4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s^{-4} & -bs^2-b's^{-2} \\ 0 & s^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & s^4(b-b')(s^{-2}-s^2) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

Для матрицы $\mathfrak{w} = \begin{pmatrix} 0 & -\epsilon^{-1} \\ \epsilon & 0 \end{pmatrix}$, где $\epsilon \in K^*$, получим

$$[\mathfrak{w}, \mathfrak{s}\mathfrak{w}\mathfrak{s}^{-1}] = \begin{pmatrix} s^{-4} & 0 \\ 0 & s^4 \end{pmatrix}. \tag{1.2.4}$$

1.2.2. Множество $\mathbf{T}_\omega$.

Рассмотрим слово вида

$$\omega(x,y) = x^{d_1}y^{c_1}\cdots x^{d_k}y^{c_k}, \text{ где } d_i, c_j \neq 0 \text{ для } i>1, j<k. \tag{1.2.5}$$

Если подставить $x := g$ для некоторого $g \in \mathrm{SL}_2(K)$ в 1.2.5, то получим выражение

$$\omega(g,y) = g^{d_1}y^{c_1}\cdots g^{d_k}y^{c_k}, \text{ где } d_i, c_j \neq 0 \text{ для } i>1, j<k. \tag{1.2.6}$$

Это непостоянное слово с константами при условии, что $g^{d_i} \neq \pm 1$ для каждого $d_i \neq 0$ (если $d_1 = 0$ опускаем g^0 в 1.2.6). В частности, если g — элемент бесконечного порядка, выражение 1.2.6 является словом с константами. При этом если $g^{d_i} = \pm 1$ для некоторого $d_i \neq 0$, то выражение 1.2.6 не является словом с константами согласно нашему определению.

Положим

$$T_\omega := \{\mathfrak{t} \in T \ \mid \ \mathfrak{t}^{d_i} \neq \pm 1 \text{ для каждого } d_i \text{ в } 1.2.5, \text{ где } d_i \neq 0\}.$$

Из определения T_ω следует, что

$$T \setminus T_\omega \text{ — конечное множество} \tag{1.2.7}$$

и

$$\mathfrak{t} \in T_\omega \Rightarrow \omega(\mathfrak{t}, y) \text{ — непостоянное слово с константами.} \tag{1.2.8}$$

Лемма 1.2.1. *Пусть $\mathfrak{t} \in T_\omega$. Существует непустое подмножество $H_{\mathfrak{t},\omega} \subset T$ такое, что для любого $\mathfrak{h} \in H_{\mathfrak{t},\omega}$ слово*

$$\mu(\mathfrak{h}, \mathfrak{t}, y) = [[\mathfrak{h}, \omega(\mathfrak{t}, y)], \mathfrak{h}[\mathfrak{h}, \omega(\mathfrak{t}, y)]\mathfrak{h}^{-1}]$$

является непостоянным словом с константами и, следовательно, $\mu(\mathfrak{h},\mathfrak{t},g)\neq 1$ *для некоторого* $g\in \mathrm{SL}_2(K)$.

Доказательство. Выражение

$$\mu(\mathfrak{h},\mathfrak{t},y)=[(\mathfrak{h}\omega(\mathfrak{t},y)\mathfrak{h}^{-1}\omega(\mathfrak{t},y)^{-1}),\,(\mathfrak{h}^2\omega(\mathfrak{t},y)\mathfrak{h}^{-1}\omega(\mathfrak{t},y)^{-1}\mathfrak{h}^{-1})]=$$

$$\Big(\mathfrak{h}\omega(\mathfrak{t},y)\mathfrak{h}^{-1}\omega(\mathfrak{t},y)^{-1}\Big)\Big(\mathfrak{h}^2\omega(\mathfrak{t},y)\mathfrak{h}^{-1}\omega(\mathfrak{t},y)^{-1}\mathfrak{h}^{-1}\Big)\times$$

$$\times\Big(\omega(\mathfrak{t},y)\mathfrak{h}\omega(\mathfrak{t},y)^{-1}\mathfrak{h}^{-1}\Big)\Big(\mathfrak{h}\omega(\mathfrak{t},y)\mathfrak{h}\omega(\mathfrak{t},y)^{-1}\mathfrak{h}^{-2}\Big)$$

является произведением вида

$$\mathfrak{h}^{i_1}\omega(\mathfrak{t},y)^{\pm1}\mathfrak{h}^{i_2}\omega(\mathfrak{t},y)^{\pm1}\cdots,$$

где $i_1,i_2,\ldots=\pm1,\pm2$. При этом все степени $\mathfrak{t}^m$ в выражении $\mu(\mathfrak{h},\mathfrak{t},y)$ не равны ±1 и это выражение содержит степени y (следует из определения T_ω). Следовательно, можно представить слово $\mu(\mathfrak{h},\mathfrak{t},y)$ в виде произведения

$$\mu_1(\mathfrak{h},\mathfrak{t})y^{d_1}\mu_2(\mathfrak{h},\mathfrak{t})y^{d_2}\cdots\mu_k(\mathfrak{h},\mathfrak{t})y^{d_k}\mu_{k+1}(\mathfrak{h},\mathfrak{t}),$$

где $\mu_i(\mathfrak{h},\mathfrak{t})$ — слово вида $\mathfrak{t}^m\neq\pm1$, или $\mathfrak{t}^m\mathfrak{h}^c\mathfrak{t}^l$, где $c\neq0$. То есть, только для конечного числа элементов $\mathfrak{h}\in T$ мы имеем $\mu_i(\mathfrak{h},\mathfrak{t})=\pm1$ для некоторого i. Если исключить такие элементы из T, то мы получим множество $H_{\mathfrak{t},\omega}$ такое, что для каждого $\mathfrak{h}\in H_{\mathfrak{t},\omega}$ слово $\mu(\mathfrak{h},\mathfrak{t},y)$ является непостоянным словом с константами $\mu_i(\mathfrak{h},\mathfrak{t})\neq\pm1$. $\square$

1.2.3. **Некоторые специальные элементы в** $\mathrm{Im}\,\widetilde{\omega}(x,y)$**.**

Образ вербального отображения $\omega(x,y)$ на $\mathrm{SL}_2\times\mathrm{SL}_2$ содержится в группе SL_2. Поэтому мы можем записать $\widetilde{\omega}(x,y)$ в виде

$$\widetilde{\omega}(x,y)=\begin{pmatrix}\widetilde{\omega}_{11}(x,y) & \widetilde{\omega}_{12}(x,y)\\ \widetilde{\omega}_{21}(x,y) & \widetilde{\omega}_{22}(x,y)\end{pmatrix}.$$

Зафиксируем $\mathfrak{t}\in T_\omega$. Для фиксированного $r\in K^*$ определим множество

$$Y_r:=\{\begin{pmatrix}1&0\\ v&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}r&0\\0&r^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&u\\0&1\end{pmatrix}\ \mid\ v,u\in K\}\subset\mathrm{SL}_2(K).$$

Для $y_r(v,u) \in Y_r$ (при фиксированном r) получим

$$\widetilde{\omega}(\mathfrak{t}, y_r(v,u)) = \begin{pmatrix} \widetilde{\omega}_{11}(\mathfrak{t}, r; v, u) & \widetilde{\omega}_{12}(\mathfrak{t}, r; v, u) \\ \widetilde{\omega}_{21}(\mathfrak{t}, r; v, u) & \widetilde{\omega}_{22}(\mathfrak{t}, r; v, u) \end{pmatrix} \subset \mathrm{SL}_2(K),$$

где $\widetilde{\omega}_{ij}(\mathfrak{t}, r; v, u)$ — многочлены от двух переменных v, u. (Действительно, $\widetilde{\omega}(\mathfrak{t}, y_r(v,u))$ — это матрица из $\mathrm{SL}_2(K)$, которая получается подстановкой $x := \mathfrak{t}, y = y_r(v,u)$ в слово $\omega = x^{d_1}y^{c_1}\cdots x^{d_k}y^{c_k}$.)

Лемма 1.2.2. *Существует элемент $r_0 = r_0(\mathfrak{t}) \in K^*$ такой, что многочлен*

$$\widetilde{\omega}_{12}(\mathfrak{t}, r_0; v, u)\widetilde{\omega}_{21}(\mathfrak{t}, r_0; v, u)$$

от переменных v, u не является постоянным.

Доказательство. Предположим, что для каждого $r \in K^*$

$$\widetilde{\omega}(\mathfrak{t}, y_r(v,u)) = \begin{pmatrix} \widetilde{\omega}_{11}(\mathfrak{t}, r; v, u) & \widetilde{\omega}_{12}(\mathfrak{t}, r; v, u) \\ 0 & \widetilde{\omega}_{22}(\mathfrak{t}, r; v, u) \end{pmatrix}. \tag{1.2.9}$$

Множество $\cup_{r\in K^*} Y_r$ является большой клеткой Гаусса в $\mathrm{SL}_2(K)$ и, следовательно, является открытым подмножеством в $\mathrm{SL}_2(K)$. Так как $\widetilde{\omega}(\mathfrak{t}, y)$ — непрерывное отображение на $\mathrm{SL}_2(K)$, то из 1.2.9 получаем

$$\widetilde{\omega}(\mathfrak{t}, g) \in B = TU \quad \text{для любого } g \in \mathrm{SL}_2(K). \tag{1.2.10}$$

Далее, $\widetilde{\omega}(\mathfrak{t}, g) = \omega(\mathfrak{t}, g)$ для каждого $g \in \mathrm{SL}_2(K)$ по определению вербального отображения. Следовательно, из 1.2.10 получаем

$$\omega(\mathfrak{t}, g) \in B = TU \ \text{ для любого } \ g \in \mathrm{SL}_2(K). \tag{1.2.11}$$

Теперь из 1.2.11 следует

$$[\underbrace{[\underbrace{\mathfrak{h}}_{\in T}, \underbrace{\omega(\mathfrak{t}, g)}_{\in B}]}_{\in U}, \underbrace{\mathfrak{h}[\underbrace{\mathfrak{h}}_{\in T}, \underbrace{\omega(\mathfrak{t}, g)}_{\in B}]\mathfrak{h}^{-1}}_{\in U}] = 1 \ \text{ для любых } \ \mathfrak{h} \in T \text{ и } g \in \mathrm{SL}_2(K). \tag{1.2.12}$$

Однако, для $\mathfrak{t} \in T_\omega, \mathfrak{h} \in H_{\mathfrak{t},\omega}$ выражение 1.2.12 противоречит лемме 1.2.1. Следовательно $\widetilde{\omega}_{21}(\mathfrak{t}, r; v, u) \neq 0$ для некоторого $r \in K^*$. Те же самые аргументы показывают, что $\widetilde{\omega}_{12}(\mathfrak{t}, r;\ v, u) \neq 0$ для некоторого $r \in K^*$. Поскольку $\widetilde{\omega}_{21}(\mathfrak{t}, r; v, u), \widetilde{\omega}_{12}(\mathfrak{t}, r; v, u)$ — многочлены от r, r^{-1}, v, u ($\mathfrak{t}$ зафиксировано), равенство $\widetilde{\omega}_{21}(\mathfrak{t}, r; v, u) = 0$ (или $\widetilde{\omega}_{12}(\mathfrak{t}, r; v, u) = 0$) возможно только для конечного числа элементов r и поэтому существует $r_0 \in K^*$ такое, что $\widetilde{\omega}_{12}(\mathfrak{t}, r_0; v, u)\widetilde{\omega}_{21}(\mathfrak{t}, r_0; v, u)$ не является нулевым многочленом.

Ненулевой многочлен $\widetilde{\omega}_{12}(\mathfrak{t}, r_0; v, u)\widetilde{\omega}_{21}(\mathfrak{t}, r_0; v, u)$ от v, u не может быть постоянным, потому что для $y = y_{r_0}(0,0) = \mathfrak{r} := \begin{pmatrix} r_0 & 0 \\ 0 & r_0^{-1} \end{pmatrix}$ получаем

$$\widetilde{\omega}(\mathfrak{t}, \mathfrak{r}) = \begin{pmatrix} \widetilde{\omega}_{11}(\mathfrak{t}, r_0; 0, 0) & \widetilde{\omega}_{12}(\mathfrak{t}, r_0; 0, 0) \\ \widetilde{\omega}_{21}(\mathfrak{t}, r_0; 0, 0) & \widetilde{\omega}_{22}(\mathfrak{t}, r_0; 0, 0) \end{pmatrix} \in T$$

и, следовательно, $\widetilde{\omega}_{12}(\mathfrak{t}, r_0; 0, 0)\widetilde{\omega}_{21}(\mathfrak{t}, r_0; 0, 0) = 0$.

□

Теперь зафиксируем некоторое $r_0 = r_0(\mathfrak{t})$ из леммы 1.2.2.

Пусть $\mathfrak{s} = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s^{-1} \end{pmatrix}$, $s \neq \pm 1$. Существует пара $v_0 = v_0(\mathfrak{t}, \mathfrak{s}), u_0 = u_0(\mathfrak{t}, \mathfrak{s})$ такая, что

$$\widetilde{\omega}_{12}(\mathfrak{t}, r_0; v_0, u_0)\widetilde{\omega}_{21}(\mathfrak{t}, r_0; v_0, u_0) = -\frac{1}{(1 - s^{-2})}. \tag{1.2.13}$$

(Действительно, $\widetilde{\omega}_{12}(\mathfrak{t}, r_0; v, u)\widetilde{\omega}_{21}(\mathfrak{t}, r_0; v, u)$ — это непостоянный многочлен от двух переменных v, u (следует из леммы 1.2.2) над алгебраически замкнутым полем K.)

Из 1.2.13 получим

$$\widetilde{\omega}_{12}(\mathfrak{t}, r_0; v_0, u_0)\widetilde{\omega}_{21}(\mathfrak{t}, r_0; v_0, u_0) \begin{cases} \neq -\frac{1}{(1-s^2)} & \text{если } s^2 \neq -1, \\ = -\frac{1}{(1-s^2)} & \text{если } s^2 = -1. \end{cases} \tag{1.2.14}$$

Положим $g_{\mathfrak{t},\mathfrak{s}} := y_{r_0}(v_0(\mathfrak{t}, \mathfrak{s}), u_0(\mathfrak{t}, \mathfrak{s}))$. Из равенств 1.2.13, 1.2.14 и равенства 1.2.1 вытекает

$$[\mathfrak{s}, \widetilde{\omega}(\mathfrak{t}, g_{\mathfrak{t},\mathfrak{s}})] = \begin{cases} \begin{pmatrix} c & -\epsilon^{-1} \\ \epsilon & 0 \end{pmatrix}, & \text{где } c \neq 0 \text{ при } s^2 \neq -1, \\ \\ \begin{pmatrix} 0 & -\epsilon^{-1} \\ \epsilon & 0 \end{pmatrix} & \text{при } s^2 = -1. \end{cases} \tag{1.2.15}$$

(Здесь $\epsilon \in K^*$ и $c = 1 + (1 - s^2)\widetilde{\omega}_{12}(\mathfrak{t}, r_0; v_0, u_0)\widetilde{\omega}_{21}(\mathfrak{t}, r_0; v_0, u_0)$; см. 1.2.1).

1.2.4. **Доказательство Теоремы 1, часть 1.**

Возьмем $\mathfrak{t} := \mathfrak{s} \in T_\omega, \mathfrak{s}^2 \neq \pm 1$. Из 1.2.15 и 1.2.2 получим

$$[\mathfrak{s}, [\mathfrak{s}, \widetilde{\omega}(\mathfrak{s}, g_{\mathfrak{s},\mathfrak{s}})]] \overset{1.2.15}{=} \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & -\epsilon^{-1} \\ \epsilon & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s^{-1} & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \epsilon^{-1} \\ -\epsilon & c \end{pmatrix} \overset{1.2.2}{=} \tag{1.2.16}$$

$$= \begin{pmatrix} s^2 & b \\ 0 & s^{-2} \end{pmatrix}, \text{ где } b = (1 - s^2)c\epsilon^{-1} \neq 0.$$

Из 1.2.16 получим

$$\mathfrak{s}[\mathfrak{s}, [\mathfrak{s}, \widetilde{\omega}(\mathfrak{s}, g_{\mathfrak{s},\mathfrak{s}})]]\mathfrak{s}^{-1} = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s^2 & b \\ 0 & s^{-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s^{-1} & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s^2 & s^2 b \\ 0 & s^{-2} \end{pmatrix} \tag{1.2.17}$$

Из 1.2.16, 1.2.17 и 1.2.3 получим

$$[[\mathfrak{s}, [\mathfrak{s}, \widetilde{\omega}(\mathfrak{s}, g_{\mathfrak{s},\mathfrak{s}})]], \mathfrak{s}[\mathfrak{s}, [\mathfrak{s}, \widetilde{\omega}(\mathfrak{s}, g_{\mathfrak{s},\mathfrak{s}})]]\mathfrak{s}^{-1}] = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 1 \tag{1.2.18}$$

(здесь $d = s^4(b - b')(s^{-2} - s^2) \neq 0$; заметим, что $b \neq 0$ и $b' = s^2 b \neq b$, так как $\mathfrak{s} \neq \pm 1$).

Равенство 1.2.18 показывает, что образ вербального отображения

$$\widetilde{w} \colon \mathrm{SL}_2(K)^2 \to \mathrm{SL}_2(K)$$

содержит нетривиальный унипотентный элемент. Следовательно вербальное отображение $\widetilde{w} \colon \mathrm{PGL}_2(K)^2 \to \mathrm{PGL}_2(K)$ сюръективно (п. 1.1.2).

1.2.5. **Доказательство Теоремы 1, часть 2.**

Мы можем предположить, что $\operatorname{ch} K \neq 2$. (Действительно, если $\operatorname{ch} K = 2$, то отображение $\widetilde{w} \colon \mathrm{SL}_2(K)^2 \to \mathrm{SL}_2(K)$ сюръективно ввиду предыдущего пункта. Мы можем положить, что $\nu(x, z) = 1$ и тогда $w'(x, y, 1) = w(x, y)\nu(x, 1) = w(x, y)$. Следовательно $\widetilde{w}'$ сюръективное отображение на $\mathrm{SL}_2(K)^3$).

Существует элемент $\mathfrak{t} \in T_\omega$ и число $d \in \mathbb{N}$ такое, что $\mathfrak{t}^d$ элемент порядка 8 (это следует из 1.2.7).

Подставим в формулу 1.2.15 $\mathfrak{s} := \mathfrak{t}^{2d}$. Поскольку $(\mathfrak{t}^{2d})^2 = -1$, то

$$[\mathfrak{t}^{2d}, \widetilde{\omega}(\mathfrak{t}, g_{\mathfrak{t},\mathfrak{t}^{2d}})] = \begin{pmatrix} 0 & -\epsilon^{-1} \\ \epsilon & 0 \end{pmatrix} \text{ для некоторого } \epsilon \in K.^* \tag{1.2.19}$$

Из 1.2.19 и 1.2.4

$$\Big[[\mathfrak{t}^{2d}, \widetilde{\omega}(\mathfrak{t}, g_{\mathfrak{t},\mathfrak{t}^{2d}})], \mathfrak{t}^d[\mathfrak{t}^{2d}, \widetilde{\omega}(\mathfrak{t}, g_{\mathfrak{t},\mathfrak{t}^{2d}})]\mathfrak{t}^{-d}\Big] = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{1.2.20}$$

Из 1.2.18 и 1.2.20

$$\widetilde{w}'(\mathfrak{t}, g_{\mathfrak{t},\mathfrak{t}}, g_{\mathfrak{t},\mathfrak{t}^{2d}}) = \underbrace{w(\mathfrak{t}, g_{\mathfrak{t},\mathfrak{t}})}_{1\neq u\in U}\underbrace{\nu(\mathfrak{t}, g_{t,\mathfrak{t}^{2d}})}_{=-1} = -u,$$

Поскольку $\omega(\mathfrak{t}, 1) \in T$ (см. 1.2.5) получим $\nu(\mathfrak{t}, 1) = 1$, $w(\mathfrak{t}, 1) = 1$ и следовательно

$$\widetilde{w}'(\mathfrak{t}, g_{\mathfrak{t},\mathfrak{t}}, 1) = \underbrace{w(\mathfrak{t}, g_{\mathfrak{t},\mathfrak{t}})}_{1\neq u\in U}\underbrace{\nu(\mathfrak{t}, 1)}_{=1} = u, \quad \widetilde{w}'(\mathfrak{t}, 1, g_{\mathfrak{t},\mathfrak{t}^{2d}}) = \underbrace{w(\mathfrak{t}, 1)}_{=1}\underbrace{\nu(\mathfrak{t}, g_{t,\mathfrak{t}^{2d}})}_{=-1} = -1.$$

Поэтому в образе $\widetilde{w}'\colon \mathrm{SL}_2(K)^3 \to \mathrm{SL}_2(K)$ содержатся $\pm u, 1 \neq u \in U$ и -1.

Теорема 1 доказана.

1.3. Доказательство Следствия 1

1.3.1. Доказательство следствия, часть 1.

Пусть $\omega(x, y) \in F_2, \omega(x, y) \neq x^l$ — неразложимое слово, для которого $\widetilde{\omega}\colon \mathrm{PGL}_2(K)^2 \to \mathrm{PGL}_2(K)$ — сюръективное вербальное отображение.

Положим

$$w_1(x, y) := \omega(x, y).$$

Предположим, что мы построили неразложимое слово $w_m(x, y) \in F_2^i, w(x, y) \neq x^l$ такое, что соответствующее вербальное отражение $\widetilde{w}_m$ сюръективно на $\mathrm{PGL}_2(K)^2$. Положим

$$w_{m+1} := (\underbrace{[[x, [x, w_m]]}_{\in F_2^i}, \underbrace{x[x[x, w_m]]x^{-1}]}_{\in F_2^i}) \in F_2^{i+1}.$$

Тогда w_{m+1} является неразложимым словом, так как $w_{m+1} \in [F_2, F_2]$ (лемма 1.1.2). По тем же аргументам, $w_{m+1}(x, y) \neq x^l$. Из Теоремы 1. следует сюръективность $\widetilde{w}_{m+1}$ на $\mathrm{PGL}_2(K)^2$.

1.3.2. **Доказательство следствия, часть 2.**

Пусть $\{w_m\}$ — последовательность слов, которая была построена выше. Также предполагаем, что вербальное отображение $\widetilde{w}_1$ сюръективно на $\mathrm{SL}_2(K)$. Положим $\nu_1(x,z)=1, w'_1(x,y,z)=\omega(x,y)=w_1(x,y)\nu_1(x,z)$. Теперь положим

$$\nu_{m+1}(x,z) := \underbrace{\Big[[x^{2d}, w_m(x,z)], x^d[x^{2d}, w_m(x,z)]x^{-d}\Big]}_{\in F_2^{i+1}},$$

где $d=d(w_m)$ (см. теорема 1, часть 2). Следовательно

$$w'_{m+1}(x,y,z) := \underbrace{w_{m+1}(x,y)}_{\in F_2^{i+1}=\langle x,y\rangle}\underbrace{\nu_{m+1}(x,z)}_{\in F_2^{i+1}=\langle x,z\rangle} \in F_3^{i+1}=\langle x,y,z\rangle.$$

Слово $w'_{m+1}(x,y,z)$ неразложимо, потому что $w'_{m+1}\in[F_3,F_3]$. Из Теоремы 1 следует, что каждое слово $w'_m(x,y,z)$ неразложимо и соответствующее вербальное отражение $\widetilde{w}'_m$ сюръективно на $\mathrm{SL}_2(K)^3$.

Следствие 1 доказано.

1.4. Доказательство Следствия 2

Пусть K — поле характеристики ноль. Тогда, согласно теореме Морозова–Джекобсона любой унипотентный элемент $u\in G$ простой алгебраической группы G вкладывается в замкнутую подгруппу $\Gamma\leq G$ изоморфную либо PGL_2, либо SL_2 (см. [6]). Ограничивая отображение $\widetilde{w}$, построенное в п. 1 Теоремы 1, на подгруппу Γ получим элемент $u\in\mathrm{Im}\,\widetilde{w}$.

1.5. Доказательство Следствия 3

Системы корней $R=B_r, C_r, D_{2r}, E_7, E_8, F_4, G_2$ имеют приводимые подсистемы R_1 того же ранга, состоящие из объединения систем ранга один. А именно

$\mathbf{R=B_r}$. $R=\langle\epsilon_1-\epsilon_2,\dots,\epsilon_{r-1}-\epsilon_r, e_r\rangle$.

$r=2m+1$. Тогда $R_1=\langle\epsilon_1-\epsilon_2,\epsilon_1+\epsilon_2,\dots,e_{2m-1}-\epsilon_{2m},\epsilon_{2m-1}+\epsilon_{2m},\ \epsilon_{2m+1}\rangle$.

$r=2m$. Тогда $R_1=\langle\epsilon_1-\epsilon_2,\epsilon_1+\epsilon_2,\dots,e_{2m-1}-\epsilon_{2m},\epsilon_{2m-1}+\epsilon_{2m}\rangle$

$\mathbf{R=C_r}$. Тогда $R_1=\langle 2\epsilon_1,\dots,2\epsilon_r\rangle$.

$\mathbf{R} = \mathbf{D_{2m}}$. Тогда R_1 строится как в случае $R = B_r$.

$\mathbf{R} = \mathbf{E_7}$. Тогда $R_1 = D_6 \cup \langle \epsilon_7 - \epsilon_8 \rangle$.

$\mathbf{R} = \mathbf{E_8}$. Тогда $D_8 \subset E_8$ и R_1 выбирается подсистемой D_8.

$\mathbf{R} = \mathbf{F_4}$ Тогда $D_4 \subset F_4$ и R_1 выбирается подсистемой D_4.

$\mathbf{R} = \mathbf{G_2}$. Тогда $R_1 = \langle \epsilon_1 - \epsilon_2 \rangle \cup \langle -2\epsilon_3 + \epsilon_1 + \epsilon_2 \rangle$.
(Здесь мы используем обозначения Н. Бурбаки [4], Таблицы I–X).
Пусть

$$\Gamma = \prod_{i=1}^{r} \Gamma_i$$

— замкнутая подгруппа G, соответствующая подсистеме корней R_1, где $\Gamma_i \approx \mathrm{SL}_2$ или $\Gamma_i \approx \mathrm{PGL}_2$. Максимальный тор T группы G — это произведение одномерных торов $H_i \leq \Gamma_i$. Поскольку отображение $\widetilde{w}'\colon \Gamma_i^3 \to \Gamma_i$, построенное в п.2. Теоремы 1, сюръективно, то в образе отображения $\widetilde{w}'\colon G^3 \to G$ содержится весь тор T, а значит все полупростые элементы. Строя последовательности $\{w_m\}$, как это делалось в Следствии 1, получим также $w_m \in F_3^m \setminus F_3^{m+1}$.

1.5.1. **Добавление независимой переменной.**

Как было сказано во введении, основной трудностью Теоремы 1 представляется построение сюръективного вербального отображения $\widetilde{w}$ из вербального отображения $\widetilde{\omega}(x, y)$ без добавления новых переменных. Однако, если это условие мы убираем, то построение сюръектиного отображения для группы PGL_2 является также следствием Теоремы Бореля. А именно, имеет место следующее

Предложение 1.5.1. *Пусть G — простая алгебраическая группа,*
$\widetilde{\omega} : G^n \to G$ — произвольное вербальное отображение, где

$$1 \neq \omega = \omega(x_1, \ldots, x_n) \in F_n.$$

Пусть, далее, y *— независимая от* $x_1, \dots, x_n$ *— переменная и пусть* $F_{n+1} \colon = \langle x_1, \dots, x_n, y\rangle$*. Тогда образ* $\mathrm{Im}\,\widetilde{w}$ *вербального отображения, где*

$$w(x_1, \dots, x_n, y) = [\omega(x_1, \dots, x_n), y\omega(x_1, \dots, x_n)y^{-1}]$$

содержит все унипотентные элементы группы G*.*

Доказательство.

Лемма 1.5.2. *Пусть* $B = TU \leq G$ *— подгруппа Бореля группы* G*,* $U = R_u(B)$ *— ее унипотентный радикал,* T *— максимальный тор в* B*. Далее возъмем* $t, s \in T$ *— два регулярных полупростых элемента. Тогда отображение*

$$\Theta \colon U \to U,$$

определенное формулой

$$\Theta(u) = [utu^{-1}, s(utu^{-1})s^{-1}]$$

сюръективно.

Доказательство. Имеем

$$[utu^{-1}, s(utu)s^{-1}] = [t\underbrace{[t^{-1}, u]}_{:=v\in U}, ts\underbrace{[t^{-1}, u]}_{:=v\in U}s^{-1}] \tag{1.5.1}$$

Поскольку отображение

$$\Psi \colon U \to U, \tag{1.5.2}$$

определенное формулой $\Psi(u) = [h, u]$ является сюръективным для любого регулярного $h \in T$ (см. [8]), то ввиду 1.5.1 можно вместо Θ рассматривать отображение

$$\Phi \colon U \to U,$$

определенное формулой $\Phi(v) = [tv, t(svs^{-1})]$. Далее, поскольку

$$[tv, t(svs^{-1})] = t\Big(vt(svs^{-1})v^{-1}t^{-1}(svs^{-1})^{-1}\Big)t^{-1} =$$

$$= t\Big(vt[s, v]t^{-1}v^{-1}[s, v]^{-1})\Big)t^{-1},$$

вместо сюръективности отображения Φ можно показать сюръективность отображения $\Xi\colon U \to U$, где

$$\Xi(v) = vt[s,v]t^{-1}v^{-1}[s,v]^{-1}.$$

Пусть

$$U = U_0, U_1 = [U,U], U_2 = [U,U_1], \ldots, U_m = [U,U_{m-1}], \ldots$$

— центральный ряд группы U. Так как отображения вида 1.5.2 сюръективны, то для любого $w \in U$ существует такой элемент $v_0 \in U = U_0$, что

$$t[s,v_0]t^{-1}[s,v_0]^{-1} = [t,[s,v_0]] = w. \tag{1.5.3}$$

Так как

$$v_0 t[s,v_0]t^{-1}v_0^{-1} \equiv t[s,v_0]t^{-1} (\operatorname{mod} U_1),$$

то из 1.5.3 получаем

$$\Xi(v_0) = v_0 t[s,v_0]t^{-1}v_0^{-1}[s,v_0]^{-1} \equiv w (\operatorname{mod} U_1). \tag{1.5.4}$$

Предположим, что

$$\Xi(v_{m-1}) = v_{m-1}t[s,v_{m-1}]t^{-1}v_{m-1}^{-1}[s,v_{m-1}]^{-1} \equiv w (\operatorname{mod} U_m) \tag{1.5.5}$$

для некоторого $v_{m-1} \in U$. Из 1.5.5 получаем

$$\Xi(v_{m-1})\mu_m \equiv w (\operatorname{mod} U_{m+1}) \tag{1.5.6}$$

для некоторого $\mu_m \in U_m$. Пусть $\nu_m \in U_m$. Тогда

$$\begin{aligned}[s, v_{m-1}\nu_m] = [s, v_{m-1}]\Big(v_{m-1}\underbrace{[s,\nu_m]}_{\in U_m}v_{m-1}^{-1}\Big) \equiv \\ \equiv [s,v_{m-1}][s,\nu_m] (\operatorname{mod} U_{m+1}) \Rightarrow \end{aligned} \tag{1.5.7}$$

$$\begin{aligned} v_{m-1}\nu_m t[s, v_{m-1}\nu_m]t^{-1}\nu_m^{-1}v_{m-1}^{-1} \equiv \\ \equiv \Big(v_{m-1}\nu_m t[s,v_{m-1}]t^{-1}\nu_m^{-1}v_{m-1}^{-1}\Big)\Big(v_{m-1}\nu_m t[s,\nu_m]t^{-1}\nu_m^{-1}v_{m-1}^{-1}\Big) \equiv \\ \equiv \Big(v_{m-1}t[s,v_{m-1}]t^{-1}v_{m-1}^{-1}\Big)\Big(t[s,\nu_m]t^{-1}\Big) (\operatorname{mod} U_{m+1}). \end{aligned} \tag{1.5.8}$$

Так как образы $[s,\nu_m], t[s,\nu_m]t^{-1}$ в факторгруппе U/U_{m+1} лежат в U_m/U_{m+1}, т.е. в центре группы U/U_{m+1}, то из 1.5.7, 1.5.8 получаем

$$\Xi(v_{m-1}\nu_m) = v_{m-1}\nu_m t[s,v_{m-1}\nu_m]t^{-1}\nu_m^{-1}v_{m-1}^{-1}[s,v_{m-1}\nu_m]^{-1} \equiv \tag{1.5.9}$$

$$\equiv \underbrace{\Big(v_{m-1}t[s,v_{m-1}]t^{-1}v_{m-1}^{-1}[s,v_{m-1}]^{-1}\Big)}_{=\Xi(v_{m-1})}\Big(t[s,\nu_m]t^{-1}[s,\nu_m]^{-1}\Big)(\operatorname{mod} U_{m+1}).$$

Отображение $\Psi_m\colon U_m/U_{m+1} \to U_m/U_{m+1}$, определенное формулой $\Psi_m(x) = [h,x]$, где $h \in T$ — регулярный элемент, является сюръективным (действительно, отображение Ψ_m — это обратимый линейный оператор на линейном пространстве U_m/U_{m+1} (см. [8])). Следовательно, существует такой элемент $\nu_m \in U_m$, что

$$t[s,\nu_m]t^{-1}[s,\nu_m]^{-1} \equiv \mu_m(\operatorname{mod} U_{m+1}). \qquad (1.5.10)$$

Положим $v_m := v_{m-1}\nu_m$, где $\nu_m \in U_m$ – элемент, удовлетворяющий сравнению 1.5.10. Тогда из 1.5.9 и 1.5.6 получаем

$$\Xi(v_m) \equiv w(\operatorname{mod} U_{m+1}). \qquad (1.5.11)$$

Таким образом, показали (по индукции; см. 1.5.5), что для любого m выполнено сравнение 1.5.11. Так как $U_n = 1$ для некоторого n, то $\Xi(v_{n-1}) = w$.

Лемма доказана. □

Теперь утверждение предложения вытекает из Леммы 1.5.2 и Теоремы Бореля. Действительно, поскольку образ $\widetilde{\omega}$ доминантен, а множество регулярных полупростых элементов группы G — это непустое открытое множество в G (см.[20]), то в образе $\widetilde{\omega}$ найдется регулярный полупростой элемент. Поскольку образ инвариантен относительно сопряжения элементами группы G, то в образе $\operatorname{Im}\widetilde{\omega}$ можно найти любой элемент вида utu^{-1}, где $t \in T$ — фиксированный регулярный элемент, а u — произвольный элемент группы $U = R_u(B)$. Положим $y := s$ для некоторого регулярного элемента $s \in T$. Тогда, ввиду Леммы 1.5.2, любой элемент из группы U лежит в образе $\widetilde{w}$, а значит, и любой унипотентный элемент группы G также лежит в образе $\widetilde{w}$.

□

Замечание 1.5.3. *Таким образом, мы также можем строить последовательность сюрьективных вербальных отображений, как и в Следствии 1, но содержащиеся в F_∞ (поскольку на каждом шаге мы прибавляем новую переменную).*

Доказательство Теорем 2–4

2.6. Слова с константами

В данном пункте мы рассматриваем свойства слов с константами для произвольной (абстрактной) группы G. Ниже $Z(G)$ — центр группы G.

2.6.1. **Подстановки.**

Пусть $w_\Sigma(x_1, \ldots, x_n)$ — слово с константами от n переменных группы G.

Предположим $1 \leq k < n$. Тогда

$$w_\Sigma(x_1, \ldots, x_n) =$$

$$= \nu_1(x_1, \ldots, x_k)\omega_1(x_{k+1}, \ldots, x_n)\nu_2(x_1, \ldots, x_k) \cdots \omega_l(x_{k+1}, \ldots x_n)\nu_{l+1}(x_1, \ldots, x_k), \tag{2.6.1}$$

где:

$\omega_i(x_{k+1}, \ldots, x_n)$ — *слова от* $(n-k)$ *переменных* $x_{k+1}, \ldots, x_n$ *(без констант)*,

$\nu_j(x_1, \ldots, x_k)$ — *слова с константами от* k *переменных (возможно постоянные)*.

(Действительно, $\omega_i(x_{k+1}, \ldots, x_n)$ — это промежутки в слове $w_\Sigma(x_1, \ldots, x_n)$, не содержащие констант и переменных $x_1, \ldots, x_k$.)

Пусть $g_1, \ldots, g_k \in G$. Подставим элементы $g_1, \ldots, g_k$ в 2.6.1 вместо $x_1, \ldots, x_k$ соответственно. Получим

$$w_\Sigma(g_1, \ldots, g_k, x_{k+1}, \ldots, x_n) = \tag{2.6.2}$$

$$\nu_1(g_1, \ldots, g_k)\omega_1(x_{k+1}, \ldots, x_n)\nu_2(g_1, \ldots, g_k) \cdots \omega_l(x_{k+1}, \ldots x_n)\nu_{l+1}(g_1, \ldots, g_k).$$

Если G — группа без центра, то всегда $w_\Sigma(g_1, \ldots, g_k, x_{k+1}, \ldots, x_n) = w_\Delta$ — слово с константами, где

$$\Delta \subset \{\nu_1(g_1, \ldots, g_k), \ldots, \nu_{l+1}(g_1, \ldots, g_k)\} \subset G.$$

Заметим, что w_Δ может быть постоянным словом или может стать нетривиальным словом без констант. Кроме того, если центр группы G — нетривиален, то в выражении 2.6.2 могут появиться центральные константы.

Пример 2.6.1.

1) Пусть $w_\Sigma(x_1, x_2) = \sigma_1 x_2 x_1 \sigma_2 x_2^{-1}$. *Тогда* $w_\Sigma(\sigma_2^{-1}, x_2) = \sigma_1 x_2 x_2^{-1} = \sigma_1$.

2) Пусть $w_\Sigma(x_1, x_2) = x_2 x_1 \sigma_1 x_2$. *Тогда* $w_\Sigma(\sigma_1^{-1}, x_2) = x_2^2$.

3) Пусть $w_\Sigma(x_1, x_2) = x_2 x_1 z \sigma_1 x_2$, *где* $z \in Z(G)$. *Тогда* $w_\Sigma(\sigma_1^{-1}, x_2) = z x_2^2$.

2.6.2. **Тождества с константами.**

Пусть $w_\Sigma = w_\Sigma(x_1, \ldots, x_n) \neq g \in G$ — *непостоянное слово* с константами (напомним, что в слове с константами w_Σ мы предполагаем, что в множестве констант Σ нет элементов из центра). Слово w_Σ называется *тождеством с константами на группе* G, если

$$\widetilde{w}_\Sigma \colon G^n \to G$$

— единичное отображение, т.е.

$$\widetilde{w}_\Sigma((g_1, \ldots, g_n)) = 1 \tag{2.6.3}$$

для любой последовательности $(g_1, \ldots, g_n) \in G^n$.

Следующее предложение показывает, что существование постоянных вербальных отображений, соответствующих непостоянным словам (без центральных констант), эквивалентно существованию тождеств с константами.

Предложение 2.6.2. *Для группы* G *существует непостоянное слово с константами* w_Σ, *для которого* $\widetilde{w}_\Sigma$ *— постоянное отображение, тогда и только тогда, когда существуют тождества с константами на* G.

Доказательство. Пусть

$$w_\Sigma = w_1 \sigma_1 w_2 \sigma_2 \cdots w_m \sigma_m w_{m+1}$$

и пусть $g \in G$ такой элемент, что

$$\widetilde{w}_\Sigma((g_1,\dots,g_n)) = g \in G \quad \text{для любой последовательности } (g_1,\dots,g_n) \in G^n.$$

Предположим, что $g \notin Z(G)$. Если $w_1 \neq 1$ или $w_{m+1} \neq 1$, то $g^{-1}\widetilde{w}_\Sigma$ или $\widetilde{w}_\Sigma g^{-1}$ – тождество с константами. Если $w_1 = w_{m+1} = 1$, то $m > 1, \sigma_1, \sigma_m \notin Z(G)$. Если при этом $g^{-1}\sigma_1 \notin Z(G)$, то $g^{-1}\widetilde{w}_\Sigma$ — тождество с константами. Если $g^{-1}\sigma_1 = z \in Z(G)$, то

$$\underbrace{w_2}_{\neq 1}\sigma_2 \cdots w_m \underbrace{(z\sigma_m)}_{\notin Z(G)}$$

— тождество с константами.

Предположим, что $g = z \in Z(G)$. Пусть $\omega \in F_n$ — такое слово, что $\omega w_1 \neq 1$. Тогда $w'_\Sigma = [\omega, w_\Sigma]$ — тождество с константами. $\square$

2.6.3. **Группа $G * F_n$.**

Любому элементу свободного произведения $\upsilon \in G * F_n$ мы также можем сопоставить отображение $\widetilde{\upsilon}\colon G^n \to G$. В этом пункте мы сравниваем такие отображения для элементов группы $G * F_n$ и $G/Z(G) * F_n$, где $Z(G)$ — центр группы G.

Пусть $\varphi\colon G \to G/Z(G)$ — естественный гомоморфизм, а

$$\Phi\colon G * F_n \to G/Z(G) * F_n$$

— гомоморфизм, определенный формулой

$$\Phi(w_1\sigma_1w_2\sigma_2\cdots w_m\sigma_m w_{m+1}) = w_1\varphi(\sigma_1)w_2\varphi(\sigma_2)\cdots w_m\varphi(\sigma_m)w_{m+1}.$$

Положим

$$\mathcal{Z}(G, F_n) = \operatorname{Ker}\Phi.$$

Пусть $\upsilon \in G * F_n$. Из определения гомоморфизма Φ следует, что

$$\upsilon = w_\Sigma - \text{слово с константами} \Rightarrow \upsilon \notin \mathcal{Z}(G, F_n).$$

Кроме того, имеет место следующее предложение.

Предложение 2.6.3. *Образ $\Phi(w_\Sigma)$ непостоянного слова с константами w_Σ является словом C-типа в $G/Z(G) * F_n$ тогда и только тогда, когда*

$$w_\Sigma = w'_\Delta \omega,$$

где w'_Δ — слово C-типа и $\omega \in \mathcal{Z}(G,F)$.

Доказательство. Пусть $\Phi(w_\Sigma)$ — слово C-типа. Тогда $\Phi(w_\Sigma) = \omega_\Lambda \tau \omega_\Lambda^{-1}$, где

$$\omega_\Lambda = \omega_1 \lambda_1 \omega_2 \cdots \lambda_m \omega_{m+1}, \;\; 1 \neq \lambda_i \in G/Z(G),\, 1 \neq \tau \in G/Z(G), \;\omega_j \in F_n.$$

Кроме того, либо $\omega_1 \neq 1$, либо $\omega_2 \neq 1$, поскольку w_Σ – непостоянное слово. Зафиксируем некоторую последовательность $\delta'_1, \ldots \delta'_m \in G \setminus Z(G)$ и элемент $g \in G \setminus Z(G)$ такие, что $\varphi(\delta'_i) = \lambda_i, \varphi(g) = \tau$. Положим

$$w'_\Delta = (\omega_1 \delta'_1 \omega_2 \cdots \delta'_m \omega_{m+1}) g (\omega_1 \delta'_1 \omega_2 \cdots \delta'_m \omega_{m+1})^{-1}.$$

Из построения следует, что $w'_\Delta \in G * F_n$ — слово с константами C-типа и $\Phi(w'_\Delta) = \Phi(w_\Sigma)$. Следовательно, $w_\Sigma = w'_\Delta \omega$ для некоторого $\omega \in \mathcal{Z}(G,F)$. □

Пример 2.6.4. *Пусть $\sigma_1, \sigma_2 \in G \setminus Z(G)$, $1 \neq z \in Z(G)$ и пусть $1 \neq w \in F_n$. Далее, пусть $\Sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, z\sigma_1^{-1}\}$. Тогда слово с константами*

$$w_\Sigma = w \sigma_1 w^{-1} \sigma_2 w (z \sigma_1^{-1}) w^{-1}$$

не является словом C-типа, но слово $\Phi(w_\Sigma)$ – это слово C-типа. Здесь

$$w_\Sigma = \underbrace{w \sigma_1 w^{-1} \sigma_2 w \sigma_1^{-1} w^{-1}}_{:= w'_\Delta} \underbrace{w z w^{-1}}_{:= \omega}.$$

Предложение 2.6.5. *Пусть G – группа без тождеств с константами и пусть $v \in G * F_n$. Тогда*

$$v \in \mathcal{Z}(G,F) \Leftrightarrow \mathrm{Im}\; \widetilde{v} = z \;\; \textit{для некоторого} \;\; z \in Z(G).$$

Доказательство. Импликация $\Rightarrow$ непосредственно вытекает из определения $\mathcal{Z}(G,F_n)$. Пусть $\mathrm{Im}\;\widetilde{v} = z \in Z(G)$. Пусть v' – элемент группы $G * F_n$, полученный переносом всех констант σ_i, которые содержатся в $Z(G)$, в начало слова v, т.е. $v' = z'\omega$, где z' – это произведение элементов множества $Z(G)$, которые содержатся в слове v, а $\omega \in G * F_n$ – слово, полученное из v вычеркиванием всех центральных констант. После сокращений в слове ω стоящих рядом $x_i^{\pm a}x_i^{\mp a}$ могут также появиться константы из центра, которые также можно вынести в начало слова и т.д. Таким образом, мы можем считать, что слово ω не сократимо и не равно $z'' \in Z(G)$, где $z'' \neq 1$. Далее, из построения слова с константами v' следует

$$\widetilde{v}((g_1, \dots, g_n)) = \widetilde{v}'((g_1, \dots, g_n)) = z'\omega((g_1, \dots, g_n)) = z$$

для любой последовательности $(g_1, \dots, g_n) \in G^n$. При этом, либо $\omega = 1$, либо элемент $\omega \in G * F_n$ — нетривиальное слово с константами, которому соответствует постоянное отображение $\widetilde{\omega}\colon G^n \to G$, что противоречит Предложению 2.6.2. Таким образом, $\omega = 1$, а значит, слово $v' = z'$ может быть получено из слова v операциями переноса центральных констант в левую часть и сокращений частей слова вида $x_i^{\pm a}x_i^{\mp a}$. Следовательно $v \in \operatorname{Ker}\Phi = \mathcal{Z}(G, F_n)$. $\square$

Предложения 2.6.3, 2.6.5 показывают, что изучение слов с константами групп $G * F_n$ и $G/Z(G) * F_n$ (если G — группа без тождеств) отличается появлением множителей из группы $\mathcal{Z}(G, F_n)$, которым соответствуют постоянные вербальные отображения со значениями в центре. Поэтому, для упрощения терминологии и обозначений далее будем рассматривать только группы без центра.

2.6.4. **Слова C-типа в группах без центра.**

Далее G — группа без центра. Для такой группы любой элемент свободного произведения $G * F_n$ — это слово с константами.

Условия симметрии для слов C-типа. Слово с константами

$$w_\Sigma = w_1\sigma_1w_2\sigma_2 \cdots w_m\sigma_m w_{m+1} \tag{2.6.4}$$

является словом C-типа тогда и только тогда, когда $m = 2k - 1$,

$$w_1 = w_{m+1}^{-1}, w_2 = w_m^{-1}, \dots, w_i = w_{m+2-i}^{-1}, \dots, w_k = w_{k+1}^{-1} \tag{2.6.5}$$

и, если $m > 1$, то

$$\sigma_1 = \sigma_m^{-1}, \sigma_2 = \sigma_{m-1}^{-1}, \dots, \sigma_i = \sigma_{m+1-i}^{-1}, \dots, \sigma_{k-1} = \sigma_{k+1}^{-1}. \tag{2.6.6}$$

Действительно, слово с константами является словом C-типа тогда и только тогда, когда последовательным сопряжением в $G * F_n$ элементами групп F_n и G это слово можно привести к некоторому элементу $g \in G$.

Предположим, что слова $w_1, \ldots, w_{m+1}$ в слове с константами 2.6.4 не удовлетворяют условию 2.6.5. Тогда для любых констант

$$\Delta = \{\delta_1 \neq 1, \ldots, \delta_m \neq 1\} \subset H \tag{$\circledast$}$$

любой группы H, у которой $Z(H) = 1$, слово с константами

$$w_\Delta = w_1\delta_1 w_2\delta_2 \cdots w_m\delta_m w_{m+1}$$

группы H не является словом C-типа.

Предположим, что слова $w_1, \ldots, w_{m+1}$ в слове с константами 2.6.4 удовлетворяют условию 2.6.5, но не удовлетворяют условию 2.6.6, т.е. $m > 1$ и $\sigma_i \neq \sigma_{m+1-i}$ для некоторого $i \leq k - 1$. Пусть

$$i_* := \min\{l = 1, \ldots, [\frac{m-1}{2}] \ \mid \ \sigma_{i_*} \neq \sigma^{-1}_{m+1-i_*}\}. \tag{2.6.7}$$

Для любой последовательности $\Delta = \{\delta_1, \ldots, \delta_m\}$ любой группы H без центра, у которой выполнены условия

$$\delta_{i_*} \neq \delta^{-1}_{m+1-i_*}, \text{ и } \delta_j \neq 1 \ \text{ для любого } j = 1, \ldots, m, \tag{$\circledast\circledast$}$$

соответствующее слово с константами $w_\Delta = w_1\delta_1 w_2\delta_2 \cdots w_m\delta_m w_{m+1}$ не является словом C-типа для группы H.

Предложение 2.6.6. *Слово с константами w_Σ не является словом C-типа тогда и только тогда, когда оно сопряжено в $G * F_n$ со словом вида*

$$\sigma_1 w_1(x_1, \ldots, x_n) \cdots \sigma_l w_l(x_1, \ldots, x_n), \tag{2.6.8}$$

где $l \in \mathbb{N}$ и $\sigma_i \neq 1, 1 \neq w_i \in F_n$.

Доказательство. Сопрягая слово с константами с подходящими элементами групп F_n и G, получим либо $g \in G$, либо слово вида 2.6.8. $\square$

2.6.5. **Слова конечного порядка в группах без центра.**

Предложение 2.6.7. *Пусть G — группа без тождеств с константами. Далее, пусть $w_\Sigma = w_\Sigma(x_1, \ldots, x_n) \in G * F_n$ — слово с константами, для которого существует такое натуральное число k, что*

$$(\widetilde{w}_\Sigma((g_1, \ldots, g_k)))^k = 1$$

для любой последовательности $(g_1, \ldots, g_n) \in G^n$. Тогда w_Σ — слово C-типа.

Доказательство. Элемент $\widetilde{w}_\Sigma^k$ является тождеством на группе G, а следовательно, $(w_\Sigma)^k = 1$. Таким образом, $\langle w_\Sigma \rangle$ — конечная циклическая подгруппа группы $G * F_n$. По теореме Куроша (см. [17], §34)

$$w_\Sigma = vgv^{-1}$$

для некоторого $v \in G * F_n$, $g \in G$.

$\square$

2.7. Редукция к подполям $\overline{F}_p$

2.7.1. **Обозначения.**

В этой части мы используем следующие обозначения.

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{C}$ — множества натуральных, целых, рациональных и комплексных чисел;

$\mathbb{Q}^{alg}, \mathbb{Z}^{alg}$ — поле всех алгебраических чисел и кольцо всех целых алгебраических чисел;

$\mathbb{Z}_{[\frac{1}{d}]}, \mathbb{Z}^{alg}_{[\frac{1}{d}]}$ – локализации соответствующих колец относительно мультипликативного множества $\{\frac{1}{d^k} \mid k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ (здесь $d \in \mathbb{N}$ – фиксированное число);

F_p — простое поле характеристики p;

для поля L символ $\overline{L}$ обозначает его алгебраическое замыкание;

$\operatorname{char} L$ — характеристика поля L.

2.7.2. **Простые алгебраические группы типа I и II.**

В данной работе мы разбиваем все простые алгебраические группы на два типа.

Тип I — это группы, у которых соответствующие системы корней имеют одинаковые длины корней

$$\mathbf{A_r},\ \mathbf{D_r}, \mathbf{E_6}, \mathbf{E_7}, \mathbf{E_8}$$

Тип II — это группы, у которых соответствующие системы корней имеют разные длины корней

$$\mathbf{B_r},\ \mathbf{C_r}, \mathbf{F_4}, \mathbf{G_2}$$

Напомним, что для групп типа I не существует тождеств с константами, а для групп типа II — существуют.

Напомним, что для групп типа II мы будем использовать следующее определение.

Определение 2.7.1. *Пусть G — простая алгебраическая группа, соответствующая системе корней R, и T — соответствующий максимальный тор. Элемент $g \in G \setminus Z(G)$ называется малым полупростым элементом, если он сопряжен некоторому элементу $t \in T$, для которого $\alpha(t) = 1$ для любого длинного корня $\alpha \in R$. Элемент $g \in G$ называется малым унипотентным элементом, если он сопряжен некоторому корневому элементу $x_\alpha(s)\,(s \neq 1)$ для какого-либо длинного корня α.*

2.7.3. **Присоединенная простая группа.**

Пусть G — простая алгебраическая группа, соответствующая системе корней R.

В данной работе группа G отождествляется с группой точек $G(K)$ для некоторого алгебраически замкнутого поля K бесконечной степени трансцендентности над простым подполем, в частности, в случае $\operatorname{char} L = 0$ будем считать, что $L = \mathbb{C}$. Таким образом, будем считать, что для групп над полем характеристики ноль $G = G(\mathbb{C})$ и группа G определена и расщепима над полем $\mathbb{Q}$.

Далее, мы будем считать, что $Z(G) = 1$ и отождествлять $G = G(K)$ с подгруппой $\mathrm{GL}(L(G))$ (здесь $L(G)$ – алгебра Ли группы G), которая соответствует образу присоединенного представления $G \to \mathrm{GL}(L(G))$. Мы фиксируем базис Шевалле алгебры $L(G)$ и таким образом отождествляем группу G с подгруппой $\mathrm{GL}_r(K)$, где $r = \dim G$. Мы фиксируем также *систему корневых подгрупп* $\langle x_\alpha(t) \mid t \in K \rangle \le \mathrm{GL}_r(K)$, где $\alpha \in R$. При $K = \mathbb{C}$ элементы матриц $x_\alpha(t)$ имеют вид zt^a для некоторых $z \in \mathbb{Z}, a \in \mathbb{N}$ (см. [5], 4.; [21], §3).

2.7.4. **Спуск в поле алгебраических чисел.**

Пусть $G = G(\mathbb{C})$ и пусть $A \subset \mathbb{C}$ — некоторое подкольцо (с единицей). Положим

$$G(A) := G \cap \mathrm{GL}_r(A). \tag{2.7.1}$$

Таким образом, $G(A) \le GL_r(A)$. Далее, пусть $f\colon A \to A'$ — гомоморфизм колец. Тогда ему соответствует гомоморфизм групп $\widetilde{f}\colon G(A) \to \mathrm{GL}_r(A')$, который получается заменой элементов матриц $a_{ij} \in A$ на $f(a_{ij})$.

Положим

$$G_{f,A} := \widetilde{f}(G(A)) \le \mathrm{GL}_r(A'). \tag{2.7.2}$$

Ниже мы рассматриваем случай, когда $A = \mathbb{Q}^{alg}[a_1, \ldots, a_e]$ — конечнопорожденная алгебра над полем $\mathbb{Q}^{alg}$, а $A' = \mathbb{Q}^{alg}$. Пусть

$$f\colon A = \mathbb{Q}^{alg}[a_1, \ldots, a_e] \to \mathbb{Q}^{alg}$$

— нетривиальный гомоморфизм $\mathbb{Q}^{alg}$-алгебр. Тогда $f(\alpha) = \alpha$ для любого $\alpha \in \mathbb{Q}^{alg}$ и $\operatorname{Im} f = \mathbb{Q}^{alg}$. Поскольку ограничение $\widetilde{f}$ на подгруппу $G(\mathbb{Q}^{alg}) \le G(A)$ является тождественным гомоморфизмом, то из определений 2.7.1, 2.7.2 следует, что

$$G_{f,A} = G(\mathbb{Q}^{alg}) \le G.$$

2.7.5. **Редукция по простому модулю.**

Пусть теперь $A = \mathbb{Z}^{alg}_{[\frac{1}{d}]}$ и $\mathcal{P} \subset A$ — максимальный идеал. Тогда

$$\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}_{[\frac{1}{d}]} = p\mathbb{Z}_{[\frac{1}{d}]}$$

для некоторого простого числа p взаимно простого с d и $A/\mathcal{P} = \overline{F}_p$. Естественному гомоморфизму колец $f\colon A \to A/\mathcal{P}$ соответствует гомоморфизм групп

$$\widetilde{f}\colon G(A) \to \mathrm{GL}_r(\overline{F}_p).$$

Следующая лемма является ключевой для данной главы.

Лемма 2.7.2. *Для любой последовательности элементов* $\delta_1, \ldots, \delta_m \in G(\mathbb{Q}^{alg})$ *существует такое натуральное число* d *и такой максимальный идеал* $\mathcal{P} \subset A = \mathbb{Z}^{alg}_{[\frac{1}{d}]}$, *что* $\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}_{[\frac{1}{d}]} = p\mathbb{Z}_{[\frac{1}{d}]}$, *где* $p \neq 2, 3$ *и:*

a. $\widetilde{f}(H) = G_p(\overline{F}_p)$ *для некоторой подгруппы* $H \leq G(A)$*;*

b. $\delta_1, \ldots, \delta_m \in H$*;*

c. если $\delta_i \neq 1$ *для некоторого* i, *то* $\widetilde{f}(\delta_i) \neq 1$*;*

d. если $\delta_i \neq \delta_j^{-1}$ *для некоторых* $i \neq j$, *то* $\widetilde{f}(\delta_i) \neq \widetilde{f}(\delta_j^{-1})$.

Если при этом G *— группа типа II, то имеют место и следующие утверждения:*

e. если δ_i *не является малым полупростым элементом для некоторого* i, *то* $\widetilde{f}(\delta_i)$ *также не является малым полупростым элементом;*

f. если δ_i *не является малым унипотентным элементом для некоторого* i, *то* $\widetilde{f}(\delta_i)$ *также не является малым унипотентным элементом в группе* $G_p(\overline{F}_p)$.

Доказательство. Поскольку для любого алгебраически замкнутого поля L группа точек $G(L)$ над этим полем порождается корневыми подгруппами ([21], §5), для любого элемента $\delta_i \in G(\mathbb{Q}^{alg})$ и любого корня α существует конечное множество элементов $\{t_\alpha(i,k)\}_{k=1}^{k_\alpha} \in \mathbb{Q}^{alg}$ таких, что

$$\delta_i = \prod_{\alpha \in R, 1 \leq k \leq k_\alpha} x_\alpha(t_\alpha(i,k)),$$

где произведение элементов $x_\alpha(t_\alpha(i,k))$ берется в некотором (зависящем от δ_i) порядке.

Любое алгебраическое число можно представить в виде $\frac{z}{l}$ для некоторых $z \in \mathbb{Z}^{alg}, l \in \mathbb{N}$. Обозначив через d наименьшее общее кратное таких знаменателей для всех алгебраических чисел $t_\alpha(i,k) \in \mathbb{Q}^{alg}$, получим

$$t_\alpha(i,k) \in A := \mathbb{Z}^{alg}_{[\frac{1}{d}]}$$

для любых α, i, k, а значит, для любого $i = 1, \ldots, m$

$$\delta_i \in H := \langle x_\alpha(t) \quad | \quad \alpha \in R,\, t \in A \rangle \leq G(A).$$

Таким образом, подгруппа H порождается корневыми подгруппами, а значит, для любого максимального идеала $\mathcal{P} \subset A$ ее образ $\widetilde{f}(H)$ также порождается корневыми подгруппами $x_\alpha(\bar{t})$, где $\bar{t} \in A/\mathcal{P}$. Так как $\overline{F}_p$ — алгебраически замкнутое поле, то соответствующие корневые подгруппы порождают группу $G_p(\overline{F}_p)$. Таким образом, получаем условия a и b.

Так как множество $\{(t_\alpha(i,k)\}$ конечно, то найдется конечное множество целых алгебраических чисел $\varsigma_1, \dots, \varsigma_s$ таких, что

$$\{(t_\alpha(i,k)\} \subset B := \mathbb{Z}_{[\frac{1}{d}]}[\varsigma_1, \dots, \varsigma_s],$$

а значит, для любого $i = 1, \dots, m$

$$\delta_i \in H_B := \langle x_\alpha(t) \quad | \quad \alpha \in R,\, t \in B \rangle.$$

Пусть P — простой идеал кольца B, а $\mathcal{P} \subset A$ — максимальный идеал кольца A, содержащий P. Кольцо $B = \mathbb{Z}_{[\frac{1}{d}]}(\varsigma_1, \dots, \varsigma_s)$ — это локализация некоторого кольца целых алгебраических чисел. Поэтому P — максимальный идеал в B, $P = \mathcal{P} \cap B$, $P \cap \mathbb{Z}_{[\frac{1}{d}]} = p\mathbb{Z}_{[\frac{1}{d}]}$ для некоторого простого числа p. Кроме того, для фиксированного элемента $0 \neq b \in B$ существует лишь конечное число простых идеалов $P \subset B$, для которых $b \in P$.

Для того, чтобы неравенства вида $\delta_i \neq 1, \delta_i \neq \delta_j^{-1}$ не сохранялись в группе $\widetilde{f}(H_B) \leq \mathrm{GL}_r(B/P)$ необходимо, чтобы все элементы матриц $1-\delta_i, \delta_i - \delta_j^{-1} \neq 0$ содержались в идеале P. Так как множество простых идеалов кольца B бесконечно, найдется такой простой идеал P, что для любого i

$$\delta_i \neq 1 (\operatorname{mod} P), \;\; \delta_i \neq \delta_j^{-1} (\operatorname{mod} P),$$

если $\delta_i \neq 1, \delta_i \neq \delta_j^{-1}$.

Далее,

$$\begin{array}{ccc} H_B & \xrightarrow{\psi} & \mathrm{GL}_r(B/P) \\ {\scriptstyle i_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i_2} \\ H & \xrightarrow{\varphi} & \mathrm{GL}_r(A/\mathcal{P}) \end{array}$$

— коммутативная диаграмма, поскольку $P = \mathcal{P} \cap B$ (здесь вертикальные стрелки i_1, i_2 — это естественные вложения, а горизонтальные ψ, φ — факторизации по модулям $P, \mathcal{P}$). Следовательно, $\widetilde{f}(H_B) = i_2 \circ \psi(H_B) \leq \mathrm{GL}_r(A/\mathcal{P}) =$

$\mathrm{GL}_r(\overline{F}_p)$, а значит, образы различных элементов $\delta_i, 1$ и δ_i, δ_j^{-1} при отображении $\widetilde{f}$ остаются различными в $\mathrm{GL}_r(\overline{F}_p)$. Отсюда получаем условия c и d.

e. Пусть $\delta_i \in H_B$ не является полупростым малым элементом. Пусть $\delta_i = \delta_{is}\delta_{iu}$ — разложение Жордана элемента δ_i в группе $G(\mathbb{Q}^{alg})$. Ввиду свойства b. мы можем предполагать, что любая конечная последовательность элементов группы $G(\mathbb{Q}^{alg})$ содержится в подгруппе $H_B \leq G(\mathbb{Q}^{alg})$ для подходящего кольца целых алгебраических чисел B. Поэтому будем считать, что $\delta_{is}, \delta_{iu} \in H_B$ для любого i. Предположим, что $\delta_{iu} \neq 1$. Напомним, что любой элемент группы $H_B \leq \mathrm{GL}_r(\mathbb{Q}^{alg})$ — это матрица с коэффициентами из кольца B. Так как существует лишь конечное число простых идеалов кольца B, которые содержат все неединичные элементы матрицы δ_{iu} (возможно таких простых идеалов не существует), то для бесконечного множества простых идеалов $P \subset B$ имеем $\delta_{iu} \neq 1(\mathrm{mod}\ P)$ (здесь $\delta_{iu}(\mathrm{mod}\ P)$ — это образ $\widetilde{f}(\delta_{iu})$ соответствующего отображения $\widetilde{f}\colon H \to G(\overline{F}_p)$). Таким образом, существует бесконечное множество простых идеалов $P \subset B$, для которых $\delta_i(\mathrm{mod}\ P)$ не является полупростым элементом. Предположим, что $\delta_{iu} = 1$. Поскольку $\delta_i = \delta_{is}$ полупростой, но не малый элемент, существует такой длинный корень $\alpha \in R$, что $[\delta_i, x_\alpha(s)] = x_\alpha(s') \neq 1$ (мы можем считать, $\delta_i \in T$). Здесь мы также имеем бесконечное множество простых идеалов $P \subset B$ таких, что $[\delta_i, x_\alpha(s)] \neq 1((\mathrm{mod}\ P)$ и для них мы получим не малый элемент $\delta_i(\mathrm{mod}\ P)$.

f. Пусть $\delta_i = \delta_{is}\delta_{iu}$ — разложение Жордана элемента δ_i. Если $\delta_{is} \neq 1$, то можно выбрать идеал P, для которого $\delta_{is} \neq 1(\mathrm{mod}\ P)$ (так же, как и для случая c). Тогда $\delta_{is} \neq 1(\mathrm{mod}\ P)$ – не унипотентный элемент. Пусть

$$\delta_i = \delta_{iu} = \prod_{k=1}^{l} x_{\alpha_k}(s_k)$$

— разложение в произведение корневых элементов. Поскольку δ_i не является длинным корневым элементом, то либо $l > 1$, либо $\delta_i = x_\alpha(s)$ — корневой элемент, соответствующий короткому корню $\alpha \in R$. Так же как и выше, найдется бесконечное множество простых идеалов P, для которых разложение $\delta_i = \delta_{iu}(\mathrm{mod}\ P)$ в группе $G(\overline{F}_p)$ в произведение корневых элементов либо число сомножителей будет больше, чем 1, либо это будет корневой элемент, соответствующий короткому корню.

□

2.8. Многообразие констант

2.8.1. Случай $\operatorname{char} \mathbf{K} = \mathbf{0}$. Редукция к полю алгебраических чисел.

Пусть $G = G(\mathbb{C})$ — простая присоединенная алгебраическая группа, определенная над $\mathbb{Q}^{alg}$.

Пусть, далее,

$$\Sigma = \{\sigma_1, \dots, \sigma_m\} \subset G \leq \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$$

— конечная последовательность элементов группы. Каждый такой элемент σ_j представляется матрицей

$$\sigma_j = \begin{pmatrix} s(j)_{11} & s(j)_{12} & \cdots & s(j)_{1r} \\ s(j)_{21} & s(j)_{22} & \cdots & s(j)_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s(j)_{r1} & s(j)_{r2} & \cdots & s(j)_{rr} \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{C}). \tag{2.8.1}$$

Пусть

$$S_j := \{s(j)_{pq} \quad | \quad s(j)_{pq} - \text{трансцендентное число}\},$$

$$S_\Sigma := \bigcup_{j=1}^{m} S_j.$$

Таким образом, S_Σ — это множество всех трансцендентных элементов матриц, соответствующих всем элементам σ_j. Так как $\mathbb{Q}^{alg}[S_\Sigma] \subset \mathbb{C}$ — конечно-порожденная алгебра над $\mathbb{Q}^{alg}$, то существует аффинное многообразие $\mathcal{M}_\Sigma$, определенное над $\mathbb{Q}^{alg}$ такое, что

$$\mathbb{Q}^{alg}[\mathcal{M}_\Sigma] \approx \mathbb{Q}^{alg}[S_\Sigma]$$

(здесь $\mathbb{Q}^{alg}[\mathcal{M}_\Sigma]$ — это аффинная алгебра многообразия $\mathcal{M}_\Sigma$). Это многообразие назовем *многообразием констант.*

Так как $A := \mathbb{Q}^{alg}[\mathcal{M}_\Sigma] \approx \mathbb{Q}^{alg}[S_\Sigma] \subset \mathbb{C}$, то многообразие неприводимо и если $S_\Sigma \neq \emptyset$, то $\dim \mathcal{M}_\Sigma > 0$.

Пусть $t \in \mathcal{M}_\Sigma$ — точка многообразия $\mathcal{M}_\Sigma$ и пусть A_t — факторалгебра A, соответствующая t (т.е. алгебра, получающаяся из A подстановкой вместо элементов S_Σ координат точки t). Пусть

$$\Upsilon_\Sigma^t\colon A = \mathbb{Q}^{alg}[\mathcal{M}_\Sigma] \approx \mathbb{Q}^{alg}[S_\Sigma] \to A_t$$

— соответствующий эпиморфизм. Этот эпиморфизм продолжается до гомоморфизма

$$\widetilde{\Upsilon}_\Sigma^t\colon G(A) \to G(A_t)$$

(см. пункт 2.7.4).

Пусть теперь $t \in \mathcal{M}_\Sigma$ — это $\mathbb{Q}^{alg}$-точка. Тогда

$$\Upsilon_\Sigma^t\colon \mathbb{Q}^{alg}[\mathcal{M}_\Sigma] \approx \mathbb{Q}^{alg}[S_\Sigma] \to \mathbb{Q}^{alg}$$

— соответствующий эпиморфизм аффинной алгебры многообразия $\mathcal{M}_\Sigma$ в ее поле вычетов, который продолжается до гомоморфизма групп точек (см. пункт 2.7.4)

$$\widetilde{\Upsilon}_\Sigma^t\colon G(\mathbb{Q}^{alg}[S_\Sigma]) \to G(\mathbb{Q}^{alg}). \tag{2.8.2}$$

Заметим, что все константы σ_j содержатся в подгруппе $G(\mathbb{Q}^{alg}[S_\Sigma])$, поскольку все элементы матриц 2.8.1 содержатся в алгебре $\mathbb{Q}^{alg}[S_\Sigma]$.

Для групп типов I и II положим:

$$\mathcal{M}'_\Sigma := \{t \in \mathcal{M}_\Sigma \;\;|\;\; \widetilde{\Upsilon}_\Sigma^t(\sigma_j) = 1 \text{ для некоторого } \; j = 1, \dots, m\},$$

$$\mathcal{M}''_\Sigma := \{t \in \mathcal{M}_\Sigma \;\;|\;\; \widetilde{\Upsilon}_\Sigma^t(\sigma_{i_*}) = \delta_{i_*} = \delta_{m+1-i_*}^{-1} = \widetilde{\Upsilon}_\Sigma^t(\sigma_{m+1-i_*})\},$$

где

$$i_* := \min\{l = 1, \dots, [\frac{m-1}{2}] \;\;|\;\; \sigma_{i_*} \neq \sigma_{m+1-i_*}^{-1}\}. \tag{2.8.3}$$

Для групп типа II положим:

$$\mathcal{M}^*_\Sigma := \{t \in \mathcal{M}_\Sigma \;\;|\;\; \widetilde{\Upsilon}_\Sigma^t(\sigma_j) \text{ — малый полупростой элемент для некоторого } \; j = 1, \dots, m\}.$$

$$\mathcal{M}^{**}_\Sigma := \{t \in \mathcal{M}_\Sigma \quad | \quad \widetilde{\Upsilon}^t_\Sigma(\sigma_j) \text{ — или малый унипотентный элемент,}$$
$$\text{или } \widetilde{\Upsilon}^t_\Sigma(\sigma_j) = 1 \text{ для некоторого } j = 1, \ldots, m\}.$$

Лемма 2.8.1. *Множества $\mathcal{M}'_\Sigma, \mathcal{M}''_\Sigma, \mathcal{M}^*, \mathcal{M}^{**}$ — это замкнутые алгебраические подмножества в многообразии $\mathcal{M}_\Sigma$, определенные над полем $\mathbb{Q}^{alg}$.*

Доказательство. Для множеств $\mathcal{M}'_\Sigma, \mathcal{M}''_\Sigma$ утверждение леммы очевидно.

Пусть $\mathcal{U} \subset G$ — многообразие унипотентных элементов (см. [6], 1.5). Для полей характеристики ноль множество

$$\mathcal{U}_1 := \{g x_\alpha(s) g^{-1} \quad | \quad \alpha - \text{ длинный корень } s \in \mathbb{C}\}$$

замкнуто в $\mathcal{U}$ (см. [6], 13.4), а значит, и в G. Кроме того, $\mathcal{U}_1$ — это множество, определенное над полем $\mathbb{Q}^{alg}$.

Далее, существует лишь конечное число классов сопряженных элементов в группе G, которые являются малыми полупростыми элементами (см.[9]). Поскольку любой полупростой класс сопряженных элементов — это замкнутое множество (см. [20]), все малые полупростые элементы — это замкнутое подмножество $\mathcal{S}$ в группе G. Кроме того, $\mathcal{S}$ — это множество, определенное над полем $\mathbb{Q}^{alg}$, так как представитель любого класса сопряженных малого полупростого элемента содержится в группе $G(\mathbb{Q}^{alg})$ (см.[9]).

Условия $\widetilde{\Upsilon}^t_\Sigma(\sigma_j) \in \mathcal{S}, \mathcal{U}_1$ определяют алгебраические соотношения (над $\mathbb{Q}^{alg}$) для элементов матриц $\{\widetilde{\Upsilon}^t_\Sigma(\sigma_j)\}$, где $t \in \mathcal{M}_\Sigma$, которые, в свою очередь, определяют замкнутые подмножества $\mathcal{M}^*_\Sigma, \mathcal{M}^{**}_\Sigma$. При этом, $\mathcal{M}^*_\Sigma$, $\mathcal{M}^{**}_\Sigma$ — замкнутые алгебраические подмножества, определенные над полем $\mathbb{Q}^{alg}$.

□

Символ $\mathcal{M}_\Sigma(\mathbb{Q}^{alg})$ обозначает ниже множество $\mathbb{Q}^{alg}$-точек многообразия констант.

Лемма 2.8.2. *Пусть слово с константами*

$$w_\Sigma = w_1 \sigma_1 w_2 \sigma_2 \cdots w_m \sigma_m w_{m+1}$$

не является словом C-типа.

Предположим также, что, если G — группа типа II, то

i. в множестве Σ нет малых полупростых элементов

или

ii. в множестве Σ нет малых унипотентных элементов.

Тогда существует такая точка $t \in \mathcal{M}_\Sigma(\mathbb{Q}^{alg})$, что для последовательности

$$\Delta := \{\delta_1 = \widetilde{\Upsilon}^t_\Sigma(\sigma_1), \delta_2 = \widetilde{\Upsilon}^t_\Sigma(\sigma_2), \ldots, \delta_m = \widetilde{\Upsilon}^t_\Sigma(\sigma_m)\}$$

слово с константами

$$w_\Delta = w_1\delta_1 w_2\delta_2 \cdots w_m\delta_m w_{m+1}$$

не является словом C-типа.

Кроме того, если G — группа типа II, то

i. в множестве Δ нет малых полупростых элементов*

или, соответственно,

ii. в множестве Δ нет малых унипотентных элементов.*

Доказательство. Пусть

$$w_\Sigma = w_1\sigma_1 w_2\sigma_2 \cdots w_m\sigma_m w_{m+1}$$

не является словом C-типа.

Предположим, что для исходного слова не выполнены условия симметрии 2.6.5:

$$w_1 = w_{m+1}^{-1}, w_2 = w_m^{-1}, \ldots, w_i = w_{m+2-i}^{-1}, \ldots, w_k = w_{k+1}^{-1}.$$

Тогда слово $w_\Delta = w_1\delta_1 w_2\delta_2 \cdots w_m\delta_m w_{m+1}$ не является словом C-типа, если выполнено условие

$$\Delta = \{\delta_1 \neq 1, \ldots, \delta_m \neq 1\}. \qquad (\circledast)$$

Так как w_Σ не является словом C-типа, то для общей точки $t \in \mathcal{M}_\Sigma$ имеет место $t \notin \mathcal{M}'_\Sigma$, а значит $\mathcal{M}'_\Sigma$ — собственное замкнутое подмножество в $\mathcal{M}_\Sigma$. Поскольку многообразие $\mathcal{M}_\Sigma$ определено над $\mathbb{Q}^{alg}$, множество $\mathbb{Q}^{alg}$-точек $\mathcal{M}_\Sigma(\mathbb{Q}^{alg})$ плотно в $\mathcal{M}_\Sigma$ ([3], A.G. 13.3), а значит, множество $\mathbb{Q}^{alg}$-точек плотно в $\mathcal{M}_\Sigma \setminus \mathcal{M}'_\Sigma$. Следовательно существует точка

$$t \in \mathcal{M}_\Sigma(\mathbb{Q}^{alg}) \setminus \mathcal{M}'_\Sigma,$$

а значит выполнено условие $\circledast$ и слово w_Δ не является словом C-типа.

Предположим, что для исходного слова не выполнены условия симметрии 2.6.5. Тогда достаточным условием для слова w_Δ, чтобы не быть словом C-типа, является условие

$$\delta_{i_*} \neq \delta_{m+1-i_*}^{-1}, \text{ и } \delta_j \neq 1 \text{ для любого } j = 1, \ldots, m, \tag{$\circledast\circledast$}$$

где i_* определено в 2.8.3. Так как w_Σ — это не слово C-типа, то как и в предыдущем случае получаем точку

$$t \in \mathcal{M}_\Sigma(\mathbb{Q}^{alg}) \setminus (\mathcal{M}'_\Sigma \cup M''_\Sigma),$$

существование которой обеспечивает нам условие ($\circledast\circledast$), а следовательно, и тот факт, что w_Δ – не является словом C-типа.

Пусть G – группа типа II и пусть для констант слова w_Σ выполнены условия $i.$ или $ii.$.

Предположим, что для исходного слова w_Σ выполнены условия 2.6.5. Тогда, как и выше, найдется точка

$$t \in \mathcal{M}_\Sigma(\mathbb{Q}^{alg}) \setminus (\mathcal{M}'_\Sigma \cup \mathcal{M}^*_\Sigma) \text{ соответственно } t \in \mathcal{M}_\Sigma(\mathbb{Q}^{alg}) \setminus (\mathcal{M}'_\Sigma \cup \mathcal{M}^{**}_\Sigma),$$

для которой множество

$$\Delta := \{\delta_1 = \widetilde{\Upsilon}^t_\Sigma(\sigma_1), \delta_2 = \widetilde{\Upsilon}^t_\Sigma(\sigma_2), \ldots, \delta_m = \widetilde{\Upsilon}^t_\Sigma(\sigma_m)\}$$

определяет слово w_Δ, не являющиеся словом C-типа и не имеющее среди своих констант малых полупростых (соответственно, малых унипотентных) элементов. Предположим, что для исходного слова w_Σ не выполнены условия 2.6.5. Тогда, как и выше, найдется точка

$$t \in \mathcal{M}_\Sigma(\mathbb{Q}^{alg}) \setminus (\mathcal{M}''_\Sigma \cup \mathcal{M}^*_\Sigma) \ \Big(\text{соответственно } t \in \mathcal{M}_\Sigma(\mathbb{Q}^{alg}) \setminus (\mathcal{M}''_\Sigma \cup \mathcal{M}^{**}_\Sigma)\Big),$$

для которой соответствующее множество Δ удовлетворяет утверждениям леммы. $\square$

Теперь мы можем доказать Теорему 2.

2.9. Доказательство Теоремы 2

2.9.1. Случай $\operatorname{char}\mathbf{K} = \mathbf{0}$.

Здесь $G = G(\mathbb{C})$.

Пусть $w_\Sigma \in G * F_n$ — слово, не являющееся словом C-типа. Так как G — группа без тождеств с константами, то отображение

$$\widetilde{w}_\Sigma\colon G^n \to G$$

не может быть постоянным (Предложение 2.6.2). Так как замыкание образа неприводимого множества G является неприводимым алгебраическим множеством, то

$$\dim \overline{\mathrm{Im}\ \widetilde{w}_\Sigma} \geq 1.$$

Предположим, что

$$\dim \overline{\mathrm{Im}\,\pi \circ \widetilde{w}_\Sigma} = 0. \tag{2.9.1}$$

Поскольку $\mathrm{Im}\,\pi \circ \widetilde{w}_\Sigma$ — это образ связного множества, $\mathrm{Im}\,\pi \circ \widetilde{w}_\Sigma$ — это в точности одна точка. Поэтому из 2.9.1

$$\mathrm{Im}\ \widetilde{w}_\Sigma \subset \overline{C}_g,$$

где C_g — класс сопряженных элемента $g \in G$, а g — некоторый регулярный элемент группы G (см. [20], II, §3). Пусть $g = g_s g_u$ — разложение Жордана, где g_s, g_u — полупростая и унипотентная компонента элемента g. Тогда для любой последовательности $(g_1, \ldots, g_n) \in G^n$ имеет место

$$w_\Sigma(g_1, \ldots, g_n) = h g_s u h^{-1} \tag{2.9.2}$$

при некотором $h \in G$ и некотором унипотентном элементе u, коммутирующим с g_s (здесь h, u зависят от последовательности $(g_1, \ldots, g_n)$, а элемент g_s зафиксирован).

Далее, как было показано выше (см. Лемма 2.7.2), последовательность Σ содержится в группе $G(A)$ для некоторой конечнопорожденной над $\mathbb{Q}^{alg}$ алгебры $A \subset \mathbb{C}$ и существует эпимоморфизм

$$\widetilde{\Upsilon}^t_\Sigma\colon G(A) \to G(\mathbb{Q}^{alg}) \tag{2.9.3}$$

такой, что для последовательности

$$\Delta = \{\delta_1 = \widetilde{\Upsilon}^t_\Sigma(\sigma_1), \dots, \delta_m = \widetilde{\Upsilon}^t_\Sigma(\sigma_m)\}$$

соответствующее слово

$$w_\Delta = w_1\delta_1 w_2\delta_2 \cdots w_m\delta_m w_{m+1}$$

также не является словом C-типа в $G(\mathbb{Q}^{alg}) * F_n$ (Лемма 2.8.2). Мы также можем предполагать, что $g_s \in G(A)$ (действительно, можно предполагать, что в алгебре A содержатся также трансцендентные элементы матрицы $g_s \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$). Для любой последовательности $(g_1, \dots, g_n) \in G(\mathbb{Q}^{alg})^n$ элемент $w_\Delta(g_1, \dots, g_n) \in G(\mathbb{Q}^{alg})$ является образом элемента $w_\Sigma(g_1, \dots, g_n) \in G(A)$ при гомоморфизме 2.9.3, который в свою очередь индуцирован гомоморфизмом колец $\Upsilon^t_\Sigma\colon A \to \mathbb{Q}^{alg}$. Из 2.9.2 следует, что

$$\pi(w_\Sigma(g_1, \dots, g_n)) = \pi(g_s),$$

а значит,

$$\pi(\widetilde{\Upsilon}^t_\Sigma(w_\Sigma(g_1, \dots, g_n)) = \pi(\widetilde{\Upsilon}^t_\Sigma(g_s)).$$

Поэтому элемент

$$\widetilde{\Upsilon}^t_\Sigma(w_\Sigma(g_1, \dots, g_n)) = w_\Delta(g_1, \dots, g_n)$$

сопряжен в группе $G(\mathbb{Q}^{alg})$ некоторому элементу, полупростая часть которого равна полупростой части $\widetilde{\Upsilon}^t_\Sigma(g_s)_s$ элемента $\widetilde{\Upsilon}^t_\Sigma(g_s)$. Таким образом, имеет место равенство

$$w_\Delta(g_1, \dots, g_n) = h' \underbrace{\widetilde{\Upsilon}^t_\Sigma(g_s)_s}_{:=\delta^*} u' h'^{-1} = h'\delta^* u' h'^{-1} \tag{2.9.4}$$

при некотором $h' \in G(\mathbb{Q}^{alg})$ и некотором унипотентном элементе $u' \in G(\mathbb{Q}^{alg})$, коммутирующим с $\delta^* = \widetilde{\Upsilon}^t_\Sigma(g_s)_s$.

Из Леммы 2.7.2 следует, что существует подгруппа $H \le G(A)$, для которой $\Delta \subset H$, а также, гомоморфизм $\widetilde{f}\colon G(A) \to \mathrm{GL}_r(\overline{F}_p)$ факторизации, для которого $\widetilde{f}(H) = G_p(\overline{F}_p)$ (напомним, что здесь G_p – редукция простой расщепимой алгебраической группы по модулю p, где $p\mathbb{Z}_{[\frac{1}{d}]} = \mathbb{Z}_{[\frac{1}{d}]} \cap \mathcal{P}$) и последовательность

$$\bar{\Delta} = \{\bar{\delta}_1 = \widetilde{f}(\delta_1), \dots, \bar{\delta}_m = \widetilde{f}(\delta_m)\}$$

удовлетворяет условию ⊛ или (соответственно) условию (⊛⊛). Таким образом,

$$w_{\bar{\Delta}} = w_1\bar{\delta}_1 w_2\bar{\delta}_2 \cdots w_m\bar{\delta}_m w_{m+1}$$

не является словом C-типа в $G_p(\overline{F}_p) * F_n$. Далее, из определения вербальных отображений $\widetilde{w}_\Delta, \widetilde{w}_{\bar{\Delta}}$ следует, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H^n & \xrightarrow{\widetilde{f}^n} & G_p^n(\overline{F}_p) \\ {\scriptstyle \widetilde{w}_\Delta}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \widetilde{w}_{\bar{\Delta}}} \\ H & \xrightarrow{\widetilde{f}} & G_p(\overline{F}_p) \end{array}$$

коммутативна, а значит, ввиду сюръективности $\widetilde{f}, \widetilde{f}^n$ и 2.9.4 получаем, что для любой последовательности $(g_1, \ldots, g_n) \in G_p(\overline{F}_p)^n$ элемент $w_{\bar{\Delta}}(g_1, \ldots, g_n)$ сопряжен некоторому элементу, полупростая часть которого совпадает с полупростой частью $(\overline{\delta^*})_s$ элемента $\overline{\delta^*}$. Таким образом,

$$w_{\bar{\Delta}}(g_1, \ldots, g_n) = h''(\overline{\delta^*})_s u'' h''^{-1} \tag{2.9.5}$$

при некотором $h'' \in G_p(\overline{F}_p)$ и некотором унипотентном элементе $u'' \in G_p(\overline{F}_p)$, коммутирующим с $(\overline{\delta^*})_s$.

Существует натуральное число $q = p^a$ такое, что $u''^q = 1$ для любого унипотентного элемента $u'' \in G_p(\overline{F}_p)$. Далее пусть c — это порядок элемента $(\overline{\delta^*})_s$ в группе $G_p(\overline{F}_p)$. Из 2.9.5 получаем

$$(w_{\bar{\Delta}}(g_1, \ldots, g_n))^{cq} = h''(\overline{\delta^*})_s^{cq} u''^{cq} h''^{-1} = 1$$

для любой последовательности $(g_1, \ldots, g_n) \in G(\overline{F}_p)$. Следовательно,

$$\widetilde{w}_{\bar{\Delta}}^{cq} \equiv 1$$

— тождество с константами на группе $G(\overline{F}_p)$, а значит, $w_{\bar{\Delta}}^{cq} = 1$ и, ввиду Предложения 2.11.3, слово $w_{\bar{\Delta}}$ должно быть словом C-типа. Противоречие. Таким образом,

$$\dim \operatorname{Im} \pi \circ \widetilde{w}_\Sigma \geq 1.$$

2.9.2. **Случай $\mathbf{char\,K = p > 0}$.**

Аналогично случаю char$K = 0$ мы можем редуцировать задачу к случаю слов с константами для группы $G(\overline{F}_p)$, для которой доказательство будет повторять доказательство, проделанное выше для $G_p(\overline{F}_p)$.

2.10. Доказательство Теоремы 4

2.10.1. **Редукция к слову от одной переменной.**

Предложение 2.10.1. *Пусть G — простая присоединенная алгебраическая группа без тождеств с константами, $\Sigma \subset G$ и пусть $w_\Sigma = w_\Sigma(x_1, \ldots, x_n)$ — слово с константами, не являющееся словом C-типа. Предположим также, что $n > 1$. Тогда существуют элементы $g_1, \ldots, g_{n-1}$ такие, что $w_\Sigma(g_1, \ldots, g_{n-1}, x_n)$ не является словом с константами C-типа от одной переменной.*

Доказательство.

Лемма 2.10.2. *Пусть $\nu_1(x), \ldots, \nu_l(x)$ — некоторая последовательность неединичных слов с константами группы G от одной переменной x. Тогда существует такой элемент $g \in G$, что $\nu_1(g) \neq 1, \ldots, \nu_l(g) \neq 1$.*

Доказательство. Действительно, так как G — группа без тождеств с константами, то $\mathcal{V}_i = \nu_i^{-1}(1)$ — это собственное замкнутое подмножество в G, а значит, $G \setminus (\cup_i \mathcal{V}_i)$ — непустое подмножество в G. $\square$

Заметим, что вместо слова w_Σ можно рассматривать сопряженное к нему слово $w_\Delta := v w_\Sigma v^{-1}$ для некоторого $v \in G * F_n$. Действительно, если $w_\Delta(g_1, \ldots, g_{n-1}, x_n)$ не является словом с константами C-типа от одной переменной, то и слово $w_\Sigma(g_1, \ldots, g_{n-1}, x_n) =$
$= v(g_1, \ldots, g_{n-1}, x_n) w_\Delta(g_1, \ldots, g_{n-1}, x_n) v(g_1, \ldots, g_{n-1}, x_n)^{-1}$ не является словом с константами C-типа от одной переменной. Таким образом, мы можем считать (см. Предложение 2.11.2), что слово w_Σ имеет вид

$$w_\Sigma(x_1, \ldots, x_n) = \sigma_1 w_1(x_1, \ldots, x_n) \cdots \sigma_m w_m(x_1, \ldots, x_n),$$

где $w_i \in F_n$, $w_i \neq 1$. Тогда слово w_Σ можно записать в виде

$$\sigma_1\mu(x_1)\omega_0(x_2,\ldots x_n)\nu_1(x_1)\omega_1(x_2,\ldots x_n)\cdots\nu_l(x_1)\omega_l(x_2,\ldots x_n)\xi(x_1),$$

где $\omega_i(x_2,\ldots,x_n)$ — неединичные слова от переменных $x_2,\ldots,x_n$, $\nu_i(x_n)$ — слова с константами от одной переменной (возможно постоянные: $\nu_i(x_1) = \tau_i \in \Sigma$), а сомножители $\mu(x_1), \xi(x_1)$ могут быть или $= 1$, или иметь вид

$$\mu(x_1) = x_1^a\delta\cdots, \ \ \xi(x_1) = \cdots\gamma x_1^b, \ \text{ где } \ \delta,\gamma \in \Sigma, \ a,b \neq 0. \tag{2.10.1}$$

Положим $\nu_0(x_1) := \sigma_1\mu(x_1), \nu_{l+1}(x_1) := \xi(x_1)\nu_0(x_1) = \xi(x_1)\sigma_1\mu_1(x_1)$. Тогда $\nu_0(x_1), \nu_{l+1}(x_1)$ — неединичные слова (см. 2.10.1). Следовательно, существует элемент $g \in G$ (Лемма 2.10.2), для которого $\nu_i(g) \neq 1$ для любого $i = 0,\ldots,l+1$. При этом,

$$\tau := \sigma_1\mu_1(g) \neq 1, \ \ \tau' = \xi(g) \neq \tau^{-1} \ \text{(поскольку } \ \nu_{l+1}(g) = \xi(g)\sigma_1\mu(g) \neq 1).$$

Следовательно,

$$w_\Sigma(g,x_2,\ldots,x_n) = \tau\omega_1(x_2,\ldots x_n)\nu_1(g)\omega_1(x_2,\ldots x_n)\cdots\nu_l(g)\omega_l(x_2,\ldots x_n)\tau', \tag{2.10.2}$$

где $\nu_i(g) \neq 1$ для любого $i = 1,\ldots,m$ и $\tau \neq 1, \tau' \neq \tau^{-1}$.

Полученное слово вида 2.10.2 не является словом C-типа (ввиду условия (⊛⊛) для τ, τ'). Таким образом, подставив подходящий элемент $x_1 := g$ в слово $w_\Sigma(x_1,\ldots,x_n)$, мы можем получить слово с константами $w_\Sigma(g,x_2,\ldots,x_n)$ от $(n-1)$ переменных, которое не является словом C-типа. Продолжая подстановки подходящих элементов группы G вместо констант, получим слово $w_\Sigma(g_1,\ldots,g_{n-1},x_n)$, которое не является словом с константами C-типа от одной переменной.

□

2.10.2. **Доказательство Теоремы 4′.**

Мы докажем следующую теорему, из которой очевидно вытекает утверждение Теоремы 4.

Теорема 4′. *Пусть K — алгебраически замкнутое поле. Пусть*

$$\widetilde{w}_\Sigma\colon SL_2(K)^n \to \mathrm{SL}_2(K)$$

— вербальное отображение с константами. Тогда либо любой нецентральный полупростой класс сопряженных элементов группы $\mathrm{SL}_2(K)$ *пересекается с образом* $\widetilde{w}_\Sigma$*, либо* $w_\Sigma = w_\Delta\omega$*, где* w_Δ *— слово* C*-типа, а* $\omega \in \mathcal{Z}(G, F_n)$*.*

Доказательство. Пусть $w_\Sigma \neq w_\Delta\omega$, где w_Δ — слово C-типа, $\omega \in \mathcal{Z}(G, F_n)$. Тогда образ $\Phi(w_\Sigma)$ в группе $\mathrm{PGL}_2(K) * F_n$ не является словом C-типа (напомним, что $\Phi\colon \mathrm{SL}_2(K) * F_n \to \mathrm{PGL}_2(K) * F_n$ — естественный гомоморфизм и $\mathcal{Z}(G, F_n) = \mathrm{Ker}\,\Phi$).

Ввиду предложения 2.10.1 существуют такие элементы $g_1, \ldots, g_{n-1} \in \mathrm{PGL}_2(K)$, что $\Phi(w_\Sigma)(g_1, \ldots, g_{n-1}, x_n)$ — слово от одной переменой, которое также не является словом C-типа. Ввиду Предложения 2.6.6 слово $\Phi(w_\Sigma)(g_1, \ldots, g_{n-1}, x_n)$ сопряжено в группе $\mathrm{PGL}_2(K) * F_n$ со словом вида

$$\gamma_1 x^{a_1} \gamma_2 x^{a_2} \ldots \gamma_k x^{a_k},$$

где $x := x_n, \gamma_1, \ldots, \gamma_k \in \mathrm{PGL}_2(K)$. Пусть

$$w_\Gamma(x) := \gamma_1' x^{a_1} \gamma_2' x^{a_2} \ldots \gamma_k' x^{a_k}$$

— слово с константами от одной переменой, где $\Gamma = \{\gamma_1', \ldots, \gamma_k'\} \in \mathrm{SL}_2(K)$ — константы, образ которых в $\mathrm{PGL}_2(K)$ совпадает соответственно с элементами $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$. Пусть $g_1', \ldots, g_{n-1}' \in \mathrm{SL}_2(K)$ — некоторый набор прообразов элементов $g_1, \ldots, g_{n-1} \in \mathrm{PGL}_2(K)$. Из определения w_Γ следует, что

$$w_\Sigma(g_1', \ldots, g_{n-1}', x) = \mu_\Omega(x) w_\Gamma(x) \mu_\Omega^{-1}(x) \nu_\Pi(x), \tag{2.10.3}$$

где $x = x_n, \mu_\Omega(x), \nu_\Pi(x) \in \mathrm{SL}_2(K) * F_1$ и $\nu_\Pi(x)$ — элемент ядра естественного гомоморфизма $\mathrm{SL}_2(K) * F_1 \to \mathrm{PGL}_2(K) * F_1$ (здесь $F_1 = \langle x \rangle$).

Для любого элемента $\tau \in \mathrm{SL}_2(K)$ значение $\nu_\Pi(\tau)$ одно и то же и равно или 1 или -1 (Предложение 2.6.5). Поэтому, из формулы 2.10.3 следует, что, если образ $\mathrm{Im}\,\widetilde{w}_\Gamma$ имеет нетривиальные пересечения с любым нецентральным полупростым классом сопряженных элементов группы $\mathrm{SL}_2(K)$, то и образ $\mathrm{Im}\,\widetilde{w}_\Sigma$ имеет нетривиальные пересечения с любым нецентральным полупростым классом сопряженных элементов группы $\mathrm{SL}_2(K)$. Поэтому мы сразу можем предполагать, что $\widetilde{w}_\Sigma$ – это слово от одной переменной x вида

$$w_\Sigma(x) = \sigma_1 x^{a_1} \sigma_2 x^{a_2} \ldots \sigma_m x^{a_m},$$

где $\sigma_i \neq \pm 1, a_i \in \mathbb{Z}, a_i \neq 0$. Положим

$$\varsigma = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_m.$$

Тогда

$$\operatorname{tr}(\widetilde{w}_\Sigma(1)) = \operatorname{tr} \varsigma. \tag{2.10.4}$$

Ввиду Теоремы 2 существует такой элемент $g \in \mathrm{SL}_2(K),\ g \neq -1$, для которого

$$\operatorname{tr} \widetilde{w}_\Sigma(g)) \neq \operatorname{tr} \varsigma \tag{2.10.5}$$

(здесь $\operatorname{tr} x$ — след матрицы x). Действительно, образ отображения $\pi \circ \widetilde{w}_\Sigma :$ $\mathrm{PGL}_2(K) \to T'/W$ не является одной точкой (здесь T' — максимальный тор $\mathrm{PGL}_2(K)$). Поскольку это образ неприводимого многообразия, то он содержит непустое открытое подмножество в T/W, а значит и образ отображения $\pi \circ w_\Sigma \colon \mathrm{SL}_2(K) \to T/W$ содержит непустое открытое подмножество T/W.

Далее, существует такой элемент $h \in \mathrm{SL}_2(K)$, что

$$g = h \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} h^{-1} \tag{2.10.6}$$

для некоторых $\alpha, \beta \in K$ (любой нецентральный элемент группы $\mathrm{SL}_2(K)$ сопряжен элементу вида $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; см. [7]). Рассмотрим подмножество

$$\mathcal{V}_{h,\,y,z} = \{h \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} h^{-1} \quad | \quad y, z \in K\} \subset \mathrm{SL}_2(K).$$

При $y = z = 0$ получаем $1 \in \mathcal{V}_{h,\,y,z}$, а при $y = \alpha, z = \beta$ получаем $g \in \mathcal{V}_{h,\,y,z}$ (см. 2.10.6). Таким образом, ограничение отображения $\operatorname{tr} \circ \widetilde{w}_{\Sigma'}$ на подмножество $\mathcal{V}_{h,\,y,z}$ — не является постоянной функцией (см. 2.10.4, 2.10.5). С другой стороны, это ограничение является многочленом от двух переменных $f(y, z)$. Следовательно, $f(y, z)$ — непостоянный многочлен, который принимает любые значения. Таким образом,

$$\operatorname{tr} \circ \widetilde{w}_\Sigma(\mathrm{SL}_2(K)) = K.$$

Следовательно, любой полупростой класс сопряженных элементов группы $\mathrm{SL}_2(K)$, кроме (возможно) ± 1, пересекается с $\operatorname{Im} \widetilde{w}_\Sigma$. $\square$

2.11. Доказательство Теоремы 3

2.11.1. **Условие на тождества с константами.**

Для тождества с константами имеется следующее необходимое условие.

Теорема 2.11.1. *Пусть K — поле характеристики $\neq 2, 3$ и G — простая алгебраическая группа, определенная над K типа II. Если непостоянное слово с константами определяет тождество с константами G, то среди констант имеются и малые полупростые элементы и малые унипотентные элементы.*

Доказательство. см. ([9], Theorm 2). □

2.11.2. **Слова с константами в группах типа II.**

Предложение 2.11.2. *Пусть G — простая приведенная алгебраическая группа типа II. Слово с константами w_Σ не является словом C-типа тогда и только тогда, когда оно сопряжено в $G * F_n$ со словом вида*

$$\gamma_1\omega_1(x_1, \ldots, x_n) \cdots \gamma_l\omega_l(x_1, \ldots, x_n), \tag{2.11.1}$$

где $l \in \mathbb{N}$ и $\gamma_i \neq 1, 1 \neq \omega_i \in F_n$. Если, при этом, среди констант слова w_Σ не было ни малых полупростых элементов, ни малых унипотентных элементов, то и среди констант слова 2.11.1 только γ_1 может быть либо малым полупростым элементом, либо малым унипотентным элементом.

Доказательство. Сопрягая слово с константами с подходящими элементами групп F_n и G, получим либо $g \in G$, либо слово вида 2.11.1. При этом, если w_Σ не является словом C-типа, то либо

$$w_\Sigma = w_1\sigma_1 w_2\sigma_2 \cdots w_{i_*}\sigma_{i_*} w_{i_*+1}\sigma_{i_*+1} \cdots w_{m+2-(i_*+1)} \underbrace{\sigma_{m+1-i_*}}_{\neq\sigma_{i_*}^{-1}} w_{i_*}^{-1} \cdots \sigma_1^{-1} w_1^{-1},$$

для некоторого i_*, либо

$$w_\Sigma = w_1\sigma_1 w_2\sigma_2 \cdots w_{i_*}\sigma_{i_*} w_{i_*+1}\sigma_{i_*+1} \cdots w_{m-i_*}\sigma_{m+1-i_*} \underbrace{w_{m+2-i_*}}_{\neq w_{i_*}^{-1}} \cdots \sigma_1^{-1} w_1^{-1}.$$

В первом случае

$$\gamma_1 = \sigma_{m+1-i_*}\sigma_{i_*}, \omega_1 = w_{i_*+1}, \gamma_2 = \sigma_{i^*+1}, \ldots, \gamma_l = \sigma_{i^*+l-1}, \omega_l = w_{m+2-(i_*+1)},$$

т.е. все константы γ_i, кроме γ_1, — это константы слова w_Σ, а γ_1 может стать малым полупростым или унипотентным элементом. Во втором случае любая константа нового слова являются также и константой слова w_Σ, а значит, в этом случае и у нового слова 2.11.1 нет константы, являющейся малым полупростым или унипотентным элементом. $\square$

Предложение 2.11.3. *Пусть G — присоединенная простая алгебраическая группа типа II и пусть w_Σ — непостоянное слово с константами и $\widetilde{w}_\Sigma \colon G^n \to G$ соответствующее вербальное отображение с константами. Предположим, что*

a) среди констант Σ нет малых полупростых и малых унипотентных элементов;

b) существует такое натуральное число k, что $(\widetilde{w}_\Sigma((g_1, \dots, g_k)))^k = 1$ для любой последовательности $(g_1, \dots, g_n) \in G^n$.

Тогда w_Σ — слово C-типа.

Доказательство. Предположим, что w_Σ не является словом C-типа. Ввиду Предложения 2.11.2 можно считать, что

$$w_\Sigma = \sigma_1 w_1 \sigma_2 w_2 \cdots \sigma_l w_l,$$

где $l \in \mathbb{N}$ и $\sigma_i \neq 1, 1 \neq \omega_i \in F_n$ и, кроме σ_1, все константы не являются ни малыми полупростыми элементами, ни малыми унипотентными элементами. Элемент $\widetilde{w}_\Sigma^k$ является тождеством на группе G. Поскольку слово

$$(w_\Sigma)^k = (\sigma_1 w_1 \cdots \sigma_l w_l)(\sigma_1 w_1 \cdots \sigma_l w_l) \cdots (\sigma_1 w_1 \cdots \sigma_l w_l)$$

не содержит константы, являющиеся малыми полупростыми и малыми унипотентными элементами, то $(w_\Sigma)^k$ не является тождеством. Кроме того, $(w_\Sigma)^k \neq 1$, поскольку $\sigma_1 \neq 1, w_1 \neq 1$. Получили противоречие с условием предложения. Следовательно, w_Σ – слово C-типа.

$\square$

2.11.3. **Доказательство для групп типа II.**

Пусть $w_\Sigma = \sigma_1 w_1 \sigma_2 w_2 \cdots \sigma_l w_l$, — слово, не являющееся словом C-типа и не содержащее в качестве констант малых полупростых и малых унипотентных элементов. Следовательно отображение $\widetilde{w}_\Sigma$ не является тождеством. Кроме того оно не может быть постоянным отображением $\widetilde{w}_\Sigma \colon G^n \to G$. Действительно, если

$$\widetilde{w}_\Sigma(g_1, \dots, g_n) = 1 \ \text{ для любой последовательности } \ g_1, \dots, g_n \in G,$$

то $g^{-1} w_\Sigma$ — это тождество на G. Но слово w_Σ не может иметь не более одной малой константы и поэтому не может иметь одновременно и малые полупростые и малые унипотентные элементы.

Таким образом, $\dim \overline{\operatorname{Im} \widetilde{w}_\Sigma} \geq 1$. Предположим, что $\dim \overline{\operatorname{Im} \pi \circ \widetilde{w}_\Sigma} = 0$. Тогда рассуждения п.4.1, 4.2 показывают, что найдется последовательность

$$\Delta = \{\bar{\delta}_1, \dots, \delta_m = \delta_m\} \subset G(\overline{F}_p)$$

среди элементов которой нет ни малых полупростых, ни малых унипотентных элементов. Кроме того, слово с константами

$$w_\Delta = w_1 \delta_1 w_2 \delta_2 \cdots w_m \delta_m w_{m+1}$$

не является словом C-типа и w_Δ^k – тождество на $G(\overline{F}_p)$. Но это противоречит Предложению 2.11.3.

Теорема 3 полностью доказана.

2.12. Простые алгебраические группы с нетривиальным центром

Пусть G — простая алгебраическая группа с нетривиальным центром $Z(G)$ и $\Phi \colon G * F_n \to G/Z(G) * F_n$ — естественный эпиморфизм, $\operatorname{Ker} \Phi := \mathcal{Z}(G, F_n)$ и

$$w_\Sigma = w_1 \sigma_1 \cdots w_m \sigma_m w_{m+1}$$

— неединичное слово с константами из группы G. Тогда (Предложение 2.6.3)

$$\Phi(w_\Sigma) \text{ — слово } C\text{-типа} \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ \ w_\Sigma = w_\Delta \omega, \ \text{ где } w_\Delta \text{ — слово } C\text{- типа и } \ \omega \in \mathcal{Z}(G, F_n).$$

Отметим, что полупростой нецентральный элемент σ группы G является малым тогда и только тогда, когда его образ в присоединенной группе $G/Z(G)$ является малым. Кроме того, элемент u присоединеной группы $G/Z(G)$ является малым унипотентным элементом тогда и только тогда, когда любой его прообраз в группе G имеет вид zu', где u' — малый унипотентный элемент группы G, а $z \in Z(G)$. Элемент группы G, имеющий вид zu', где u' –малый унипотентный элемент группы G, а $z \in Z(G)$, будем называть *малым почти унипотентным элементом.*

Из Теоремы 2 получаем

Теорема 2$'$. *Пусть G — простая алгебраическая группа типа A_l, D_l, E_6, E_7, E_8. Пусть, далее, w_Σ — слово с константами из группы G. Множество $\mathrm{Im}\ \pi \circ \widetilde{w}_\Sigma$ состоит из одной точки тогда и только тогда, когда $w_\Sigma = w_\Delta \omega$, где w_Δ — слово C-типа, а $\omega \in \mathcal{Z}(G, F_n)$.*

Из Теоремы 3 получаем

Теорема 3$'$. *Пусть G — простая алгебраическая группа типа B_l, C_l, F_4, G_2, определенная над полем характеристики $\neq 2, 3$. Пусть далее, w_Σ — слово с константами из группы G, не содержащее одновременно среди констант малые полупростые и малые почти унипотентные элементы. Множество $\mathrm{Im}\ \pi \circ \widetilde{w}_\Sigma$ состоит из одной точки тогда и только тогда, когда $w_\Sigma = w_\Delta \omega$, где w_Δ — слово C-типа, а $\omega \in \mathcal{Z}(G, F_n)$.*

Глава 3. Образы вербальных отображений простых алгебраических групп для некоторых типов слов с константами

3.13. Общий случай

Пусть G — простая алгебраическая группа, $\widetilde{w}_\Sigma\colon G^n \to G$ — вербальное отображение с константами. Тогда $\overline{\mathrm{Im}\ \widetilde{w}_\Sigma}$ — это замкнутое неприводимое подмножество группы G, в котором содержится открытое в $\overline{\mathrm{Im}\ \widetilde{w}_\Sigma}$ подмножество $\mathcal{X} \subset \mathrm{Im}\ \widetilde{w}_\Sigma$. Положим

$$\dim \mathrm{Im}\ \widetilde{w}_\Sigma := \dim \overline{\mathrm{Im}\ \widetilde{w}_\Sigma}.$$

В этом параграфе мы описываем некоторые характеристики образа $\mathrm{Im}\ \widetilde{w}_\Sigma$, а также даем оценки $\dim \mathrm{Im}\ \widetilde{w}_\Sigma$ некоторых типов отображений $\widetilde{w}_\Sigma$.

В работе [13] показано, что вербальное отображение с константами $\widetilde{w}_\Sigma : G^n \to G$ простой алгебраической группы G доминантно (т.е. $\dim \mathrm{Im}\ \widetilde{w}_\Sigma = \dim G$) для любого набора констант $\{\sigma_1, \dots, \sigma_m\}$ из некоторого открытого множества $\mathcal{U} \subset G^m$ при условии

$$w_1 w_2 \cdots w_{m+1} \neq 1. \tag{3.13.1}$$

Очевидно, что если условие 3.13.1 не выполняется, то отображение $\widetilde{w}_\Sigma$ может быть не доминантным. Например, для слова с константами $w_\Sigma = x\sigma x^{-1}$ образ соответствующего вербального отображения — это класс сопряженных элемента σ. Также в работе [13] (Theorem 1.6) показано, что существует непустое открытое подмножество $\mathcal{V} \subset T$ максимального тора T такое, что для любого $t \in \mathcal{V}$ отображение $\pi \circ \widetilde{w}_\Sigma\colon G^n \to T/W$ доминантно, где

$$w_\Sigma = w_1 t^{k_1} w_2 t^{k_2} \cdots w_m t^{k_m} w_{m+1} \ \text{ при } \ \sum_{i=1}^{m} k_i = 0.$$

Напомним, что $\pi : G \to T/W$ — это отображение факторизации простой алгебраической группы и доминантность отображения $\pi \circ \widetilde{w}_\Sigma$ означает, что образ $\mathrm{Im}\ \widetilde{w}_\Sigma$ отображения с константами $\widetilde{w}_\Sigma$ содержит представителей “почти всех” полупростых классов сопряженных элементов группы G.

Здесь мы получаем следующий результат.

Теорема 5. *Пусть G — простая алгебраическая группа и пусть*

$$w_1, \dots, w_{m+1} \in F_n, \text{ где } w_2 \neq 1, m > 1.$$

Тогда существует такое непустое открытое подмножество $\mathcal{U} \subset G^n$, что для любой последовательности $\sigma_1, \dots, \sigma_m \in \mathcal{U}$ отображение

$$\pi \circ w_\Sigma \colon G^n \to T/W,$$

где

$$w_\Sigma = w_1 \sigma_1 w_2 \sigma_2 \cdots w_m \sigma_m w_{m+1},$$

доминантно.

Доказательство. Следующая лемма — вариация аналогичного утверждения, приведенного в работе [13]

Лемма 3.13.1. *Существует открытое подмножество $\mathcal{U} \subset G^m$, удовлетворяющее следующим условиям:*

а. для любой последовательности $\sigma_1, \dots, \sigma_m \in \mathcal{U}$ образ отображения

$$\pi \circ w_\Sigma \colon G^n \to T/W,$$

где

$$w_\Sigma = w_1 \sigma_1 w_2 \sigma_2 \cdots w_m \sigma_m w_{m+1},$$

имеет одну и ту же размерность $\mathfrak{d}$;

в. для любой последовательности $\delta_1, \dots, \delta_m \in G^m$ образ отображения

$$\pi \circ w_\Delta \colon G^n \to T/W,$$

где

$$w_\Delta = w_1 \sigma_1 w_2 \sigma_2 \cdots w_m \sigma_m w_{m+1}$$

имеет размерность $\leq \mathfrak{d}$.

Доказательство. Пусть $w_1, \dots, w_{m+1} \in F_n = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ и пусть $y_1, \dots,$ y_m — независимые от $x_1, \dots, x_n$ переменные. Положим

$$\mathfrak{w} := w_1 y_1 w_2 y_2 \cdots w_m y_m w_{m+1} \in F_{n+m} = \langle x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m \rangle.$$

Теперь мы рассмотрим отображения

$$\pi \circ \widetilde{\mathfrak{w}} \colon G^{n+m} \to T/W, \;\; p_y : G^{n+m} \to G^m,$$

где p_y — проекция на последние m компонент. Поскольку $\widetilde{\mathfrak{w}}, \pi, p_y$ — морфизмы аффинных многообразий, то

$$F\colon G^{n+m} \stackrel{(\pi\circ\widetilde{\mathfrak{w}}, p_y)}{\longrightarrow} T/W \times G^m$$

— также морфизм аффинных многообразий. Положим

$$X := \overline{\mathrm{Im}\ F}.$$

Тогда $F\colon G^{n+m} \to X$ — доминантный морфизм неприводимых аффинных многообразий, а значит существует открытое подмножество $\mathcal{V} \subset \mathrm{Im}\ F$, удовлетворяющее следующим условиям:

1) для любой точки $v \in \mathcal{V}$ размерность любой неприводимой компоненты $F^{-1}(v)$ равна $\mathfrak{r} = \dim G^{n+m} - \dim X$;

2) для любой точки $x \in \mathrm{Im}\ F$ размерность любой неприводимой компоненты $F^{-1}(x) \geq \mathfrak{r}$.

(см. [3], Теорема 10.1).

Рассмотрим теперь проекцию

$$\widetilde{p}_y\colon X \to G^m.$$

Так как для любой последовательности $\Sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_m) \in G^m$ множество

$$Z_\Sigma = \{\pi \circ w_\Sigma(g_1, \ldots, g_n) \ \mid \ g_1, \ldots, g_n \in G^n\} \subset T/W \tag{3.13.2}$$

не пусто, то

$$\widetilde{p}_y(X) = G^m.$$

Следовательно, существует открытое подмножество $\mathcal{U} \subset G^m$ такое, что

$$\mathcal{U} \subset \widetilde{p}_y(\mathcal{V}).$$

Фиксируем $\Sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_m) \in \mathcal{U}$ и пусть $v \in \mathcal{V}$ такая точка, что $\widetilde{p}_y(v) = (\sigma_1, \ldots, \sigma_m)$. Ввиду условия 1) размерность любой неприводимой компоненты

$$F^{-1}(v) = \mathfrak{r}. \tag{3.13.3}$$

Теперь рассмотрим отображение

$$F_\Sigma\colon G^n \to T/W \times G^m, \tag{3.13.4}$$

определенное формулой

$$F_\Sigma(g_1,\dots,g_n) = (\pi\circ w_\Sigma(g_1,\dots,g_n),\sigma_1,\dots,\sigma_m).$$

Из определения F_Σ следует, что $\mathrm{Im}\ F_\Sigma = Z_\Sigma$, где Z_Σ — множество, определенное 3.13.4. Поэтому $\overline{Z}_\Sigma$ — неприводимое замкнутое подмножество в X. Поскольку $v\in\mathcal{V}\cap Z_\Sigma$, то существует открытое подмножество $\mathcal{W}$ в $\overline{Z}_\Sigma$, содержащее точку v. Так как $\mathcal{W}\subset\mathcal{V}$, то для любой точки $v'\in\mathcal{W}$ следует из 3.13.3, что размерность любой неприводимой компоненты

$$F^{-1}(v') = \mathfrak{r}. \tag{3.13.5}$$

Пусть

$$v' = (t,\sigma_1,\dots,\sigma_m)\in\mathcal{W}\subset X\subset T/W\times G^m.$$

Тогда

$$F_\Sigma^{-1}(v') = \{(g_1,\dots,g_n)\in G^n \quad | \quad \pi\circ w_\Sigma(g_1,\dots,g_n) = t\},$$

$$F^{-1}(v') = \{(g_1,\dots,g_n;\sigma_1,\dots,\sigma_m)\in G^{n+m} \ \ | \ , \ \pi\circ w_\Sigma(g_1,\dots,g_n) = t\}.$$

Очевидно, что $F_\Sigma^{-1}(v')$, $F^{-1}(v')$ — изоморфные замкнутые аффинные множества. Из 3.13.6 получаем размерность любой неприводимой компоненты

$$F_\Sigma^{-1}(v') = \mathfrak{r} \tag{3.13.6}$$

для любой точки v', содержащейся в открытом подмножестве $\mathcal{W}$ аффинного многообразия $\overline{Z}_\Sigma = \overline{F_\Sigma(G^m)}$. Так как размерность образа любого морфизма неприводимых аффинных многообразий равна размерности исходного многообразия минус размерность слоя некоторого открытого подмножества образа, то из 3.13.6 получаем

$$\dim\ \mathrm{Im}\ F_\Sigma = \mathfrak{d} := n\dim G - \mathfrak{r}. \tag{3.13.7}$$

Отметим, что равенство 3.13.7 имеет место для любой последовательности $\Sigma = (\sigma_1,\dots,\sigma_m)$, содержащейся в открытом множестве $\mathcal{U}\subset G^m$. Кроме того, из построения F_Σ следует, что $\overline{\mathrm{Im}\ F_\Sigma}$ — это аффинное многообразие, изоморфное $\overline{\mathrm{Im}\ \pi\circ w_\Sigma}$, а значит, из 3.13.7 получаем

$$\dim\overline{\mathrm{Im}\ \pi\circ w_\Sigma} = \mathfrak{d}$$

для любой последовательности $\Sigma\in\mathcal{U}$, что доказывает пункт а. леммы.

Пусть $\Delta = \{\delta_1, \dots, \delta_m\} \in G^m$ и пусть

$$\pi \circ w_\Delta \colon G^n \to T/W$$

— соответствующее отображение. Как и выше получаем, что слои отображений $\pi \circ w_\Delta$ и $F_\Delta \colon G^n \to T/W \times G^m$ совпадают, а также изоморфны соответствующим слоям отображения $F \colon G^{n+m} \to T/W \times G^m$. Поскольку ввиду 2) размерности всех слоев $F^{-1}(x) \geq \mathfrak{r}$, то размерность общего слоя отображения $\pi \circ w_\Delta \geq \mathfrak{r}$, а значит,

$$\dim \overline{\mathrm{Im}\ \pi \circ w_\Delta} \leq m \dim G - \mathfrak{r} = \mathfrak{d}$$

для любой последовательности $\Delta \in G^m$, что доказывает пункт b. леммы.

$\square$

Теперь мы можем доказать Теорему 5. Поскольку $m > 1$ можно найти такие элементы $\sigma_1 = t_1, \sigma_2 = t_2, \dots \sigma_m = t_m \in T$, что $t_1 t_2 \dots t_m = 1$ и отображение $\pi \circ w_\Sigma$ доминантно (см. [13]), а значит, ввиду Леммы 3.13.1, такое отображение будет доминантным для любой последовательности $\Sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_m) \in \mathcal{U}$ из некоторого открытого подмножества $\mathcal{U} \subset G^m$. $\square$

Замечание 3.13.2. *Условие $m > 1$ существенно, поскольку для $w_\Sigma = w\sigma w^{-1}$ образ отображения $\mathrm{Im}\ \pi \circ \widetilde{w}_\Sigma$ — одна точка. Также существенным является независимость в выборе констант $\{\sigma_1, \dots, \sigma_m\}$. Скажем, для $w_\Sigma = w_1\sigma_1 w_2 \sigma_2 w_2^{-1} \sigma_1^{-1} w_1^{-1}$ образ отображения $\mathrm{Im}\ \pi \circ \widetilde{w}_\Sigma$ — также одна точка.*

Таким образом, для “общего” набора констант $\{\sigma_1, \dots, \sigma_m\}$ образ отображения $\pi \circ \widetilde{w}_\Sigma$ доминантен, а значит в этом образе содержатся представители “почти всех” регулярных полупростых элементов. Для некоторых типов групп мы ниже приводим более точный результат.

3.14. Группы ранга один

Здесь K – алгебраически замкнутое поле.

Предложение 3.14.1. *Пусть $G = \mathrm{SL}_2(K)$ и пусть $\Sigma = \{\sigma_1, \dots, \sigma_m\}$ – подмножество нецентральных элементов группы G таких, что $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$*

для любых i, j. Пусть

$$w_\Sigma = w_1\sigma_1 w_2\sigma_2 \cdots w_m\sigma_m w_{m+1}$$

и пусть

$$\widetilde{w}_\Sigma \colon G^n \to G$$

— непостоянное вербальное отображение с константами Σ. Тогда $\dim \overline{\mathrm{Im}\ \widetilde{w}_\Sigma} \geq 2$.

Доказательство. Пусть T, W, U — фиксированный одномерный тор, группа Вейля и унипотентный радикал фиксированной подгруппы Бореля группы G. Можно считать, что все константы $\sigma_i \in H$, где $H = T$ или $H = Z(G)U$. Пусть w_Σ не является словом типа $w_\Delta\omega$, где w_Δ — слово C-типа, а $\omega \in \mathcal{Z}(G, F_n)$. Тогда (Теорема 4)

$$\dim \mathrm{Im}\ \pi \circ \widetilde{w}_\Sigma = 1. \tag{3.14.1}$$

Лемма 3.14.2. *Существует непустое открытое подмножество $\mathcal{V} \subset \overline{\mathrm{Im}\ \widetilde{w}_\Sigma}$ такое, что $\mathcal{V} \cap H = \emptyset$.*

Доказательство. Предположим, что для любого непустого открытого подмножества $\mathcal{V}' \subset \overline{\mathrm{Im}\ \widetilde{w}_\Sigma}$ имеет место

$$\mathcal{V}' \cap H \neq \emptyset.$$

Тогда $\overline{\mathrm{Im}\ \widetilde{w}_\Sigma} \subset H$, поскольку H неприводимое замкнутое подмножество группы G. Далее, существует элемент $h \in H$, для которого $\omega_{\Sigma'} := [w_\Sigma, h]$ – непостоянное слово с константами (достаточно взять $h \neq \pm 1, \pm\sigma_1^{-1}$), для которого, в свою очередь, $\widetilde{\omega}_{\Sigma'} \colon G^n \to G$ – отображение тождественно равное единице. Но на группе типа A_1 не существуют тождеств с константами, а значит, получили противоречие. □

Рассмотрим теперь $\pi_\Sigma \colon \overline{\mathrm{Im}\ \widetilde{w}_\Sigma} \to A^1_K \approx T/W$ – ограничение отображения факторизации $\pi \colon G \to A^1_K \approx T/W$ на замкнутое подмножество $\overline{\mathrm{Im}\ \widetilde{w}_\Sigma}$. Так как все константы слова w_Σ содержатся в группе H, то множество $\overline{\mathrm{Im}\ \widetilde{w}_\Sigma}$ является инвариантным относительно сопряжения элементами группы H. Далее, для любого $g \in \overline{\mathrm{Im}\ \widetilde{w}_\Sigma}$ подмножество $\{hgh^{-1} \mid h \in H\} \subset \overline{\mathrm{Im}\ \widetilde{w}_\Sigma}$ содержится в слое отображения π_Σ. Пусть $g \in \mathcal{V}$, где $\mathcal{V}$ — открытое подмножество $\overline{\mathrm{Im}\ \widetilde{w}_\Sigma}$, для которого $\mathcal{V} \cap H = \emptyset$.

Размерность множества $\overline{\{hgh^{-1} \mid h \in H\}}$ равна 1, поскольку $g \notin H$. Таким образом размерность слоя отображения $\pi_\Sigma \geq 1$ для некоторого открытого множества в T/W. Теперь наше неравенство вытекает из 3.14.1.

Пусть $w_\Sigma = w_\Delta \omega$, где w_Δ — слово C-типа, а $\omega \in \mathcal{Z}(G, F_n)$. Слово hw_Σ, где $h\sigma_1 \neq \pm 1, \pm\sigma_m^{-1}$, уже не представимо в виде произведения слова C-типа и слова из $\mathcal{Z}(G, F_n)$, а значит, ввиду уже доказанного

$$\dim\ \mathrm{Im}\ \widetilde{w}_\Sigma = \dim \mathrm{Im}\ h\widetilde{w}_\Sigma \geq 2.$$

$\square$

Замечание 3.14.3. *Аналогичный результат можно получить и для группы $G = \mathrm{PGL}_2(K)$, если заменить условие коммутирования констант условием их принадлежности одному и тому же тору T или унипотентной группе U.*

3.15. Группы типов $\mathbf{B_r}, \mathbf{C_r}, \mathbf{D_{2r}}, \mathbf{E_7}, \mathbf{E_8}, \mathbf{F_4}, \mathbf{G_2}$

Простые алгебраические группы содержат полупростые подгруппы того же лиевского ранга, что и сами группы, и при этом все компоненты этих подгрупп являются группами типа A_r (см. [2]). Это позволяет в некоторых случаях описывать образы вербальных отображений $\mathrm{Im}\ \widetilde{w}$, используя соответствующие результаты для групп типа A_r. В частности, для группы типа $B_r, C_r, D_{2r}, E_7, E_8, F_4, G_2$ доказано(см. [13], Теорема 2.8), что образ любого нетривиального вербального отображения $\widetilde{w}\colon G^m \to G$ содержит все регулярные полупростые элементы группы G. Для этих же групп и вербальных отображений с константами мы можем доказать аналогичный результат, однако, при некотором дополнительном предположении. Напомним, что для группы G с тривиальным центром слово с константами, не являющееся словом C-типа, сопряжено в группе $G * F_n$ со словом вида

$$w_\Sigma = \sigma_1 w_1 \sigma_2 \cdots \sigma_m w_m, \tag{3.15.1}$$

где $\Sigma = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_m\} \subset G$ — подмножество нецентральных элементов, $w_i \in F_n, w_i \neq 1$. Ниже мы будем рассматривать слова вида 3.15.1, не предполагая тривиальность центра.

Теорема 6. *Пусть G — простая алгебраическая группа типа $B_r, C_r, D_{2r}, E_7, E_8, F_4, G_2$, и пусть $T \leq G$ — зафиксированный максимальный тор. Далее, пусть w_Σ — слово вида 3.15.1, где $\Sigma = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_m\} \subset T$ — некоторое множество регулярных элементов. Тогда образ $\operatorname{Im} \widetilde{w}_\Sigma$ вербального отображения $\widetilde{w}_\Sigma \colon G^n \to G$ пересекает любой полупростой регулярный класс элементов группы G.*

Доказательство. Для групп указанных типов существует подгруппа

$$\Gamma = \prod_{i=1}^{l} \Gamma_i, \quad \Gamma_i \approx \mathrm{SL}_2(K) \text{ или } \mathrm{PGL}_2(K),$$

где l — это лиевский ранг группы G. При этом каждая компонента $\Gamma_i = \langle X_{\pm\alpha_i} \rangle$ порождается корневыми группами $X_{\pm\alpha_i}$, соответствующими корню $\alpha_i : T \to K^*$ (см., например, [13], Lemma 2.9). Так как ранг группы Γ совпадает с рангом группы G, то $T = H_1 H_2 \cdots H_l$, где H_i — соответствующий одномерный тор группы $\Gamma_i = \langle X_{\pm\alpha_i} \rangle$. Пусть

$$\sigma_j = h_{1j} h_{2j} \cdots h_{rj},$$

где $h_{ij} \in H_i$. Так как $\sigma_j \in T$ — регулярный элемент группы G, любой элемент $h_{ij} \in \Gamma_i$ не являтся центральным элементом Γ_i, поскольку в таком случае элемент h_{ij}, а значит и элемент σ_j коммутировал бы с унипотентными элементами из $X_{\pm\alpha_i}$. Пусть

$$w_{\Sigma,i} := h_{i1} w_1 h_{i2} \cdots h_{im} w_m$$

и пусть $\widetilde{w}_{\Sigma,i} \colon \Gamma_i^n \to \Gamma_i$ — соответствующее вербальное отображение. Тогда образ $\operatorname{Im} \widetilde{w}_{\Sigma,i}$ пересекает все нецентральные полупростые классы сопряженных элементов группы Γ_i (Теорема 4$'$). Далее, пусть $s \in T$ — регулярный полупростой элемент групп G. Тогда

$$s = s_1 s_2 \cdots s_r, \ \ s_i \in H_i - \text{регулярный элемент группы} \quad \Gamma_i.$$

Таким образом, для любого i существует элемент $s_i' \in \Gamma_i$, сопряженный в Γ_i с s_i, и такой, что $\widetilde{w}_{\Sigma,i}(\gamma_i) = s_i'$ для некоторого $\gamma_i \in \Gamma_i$. Далее, пусть

$$\widetilde{w}_{\Sigma|\Gamma} \colon \Gamma^n \to \Gamma$$

— ограничение отображения $\widetilde{w}_\Sigma$ на подгруппу Γ. Так как все компоненты Γ коммутируют друг с другом, то для $\gamma = \gamma_1 \dots \gamma_r$

$$\widetilde{w}_{\Sigma|\Gamma}(\gamma) = \prod_{i=1}^{r} \widetilde{w}_{\Sigma,i}(\gamma_i) = s_1' s_2' \cdots s_r' =: s' \in \Gamma.$$

Поскольку каждая из компонент s_i' элемента s' сопряжена в Γ_i с элементом s_i, то s' сопряжен с элементом s в $\Gamma \leq G$, а значит, класс сопряженных элемента s в группе Γ пересекается с Im w_Σ.

$\square$

Для тех же типов групп, что и в Предложении 3.15.1, можно оценить снизу размерность Im w_Σ для более широкого класса вербальных отображений с константами.

Предложение 3.15.1. *Пусть G — простая алгебраическая группа типа $B_r, C_r, D_{2r}, E_7, E_8, F_4, G_2$ и пусть $T \leq G$ — зафиксированный максимальный тор группы G. Далее, пусть $w_\Sigma = w_1\sigma_1 w_2 \sigma_2 \cdots w_m \sigma_m w_{m+1}$ — слово с константами, где $\Sigma = \{\sigma_1, \dots, \sigma_m\} \subset T$ — некоторое множество регулярных элементов. Тогда*

$$\dim \operatorname{Im} \widetilde{w}_\Sigma \geq 2 \dim T.$$

Доказательство. Ограничения $\widetilde{w}_{\Sigma,i}$ отображения $\widetilde{w}_\Sigma$ на подгруппы $\Gamma_i \leq G$, введенные в доказательстве предыдущего предложения, также являются отображениями с константами, лежащими в одном и том же торе H_i группы Γ_i. Из Предложения 3.14.1 и Замечания 3.14.3 следует, что $\dim \operatorname{Im} \widetilde{w}_{\Sigma,i} \geq 2$, а значит,

$$\dim \widetilde{w}_\Sigma \geq \dim \operatorname{Im} \widetilde{w}_{\Sigma,i}(\operatorname{rank} G) \geq 2 \dim T.$$

$\square$

Заключение

В первой главе данной работы рассматривается вопрос сюръективности вербальных отображений, соответствующих неразложимым словам. Приводится алгоритм, позволяющий строить бесконечные рекурсивные последовательности неразложимых слов, для которых соответствующие вербальные отображения на группах $\mathrm{PGL}_2(K)^2$ и SL_2 сюръективны, и члены этой последовательности соответствуют всем членам нормального ряда. Значимым моментом доказательства сюръективности вербальных отображений таких последовательностей является метод подстановки в вербальные отображения $\widetilde{w}(x_1, \ldots, x_n)$ вместо переменных $x_1, \ldots, x_k$ элементов группы $\mathrm{PGL}_2(K)^2$ (или SL_2). Такие подстановки превращают вербальные отображения в отображения с константами. В данном случае важным фактом является отсутствие *тождеств с константами* на группах $\mathrm{PGL}_2(K)^2$ и SL_2.

Во второй и третьей главе рассматриваются только отображения с константами. Вторая глава посвящена изучению "малых" вербальных отображений с константами. Получено описание слов с константами, для которых образ $\mathrm{Im}\ \pi \circ \widetilde{w}_\Sigma$ является в точности одной точкой. Результат второй главы разбит на две части: в первой части рассматриваются простые алгебраические группы типов A_l, D_l, E_6, E_7, E_8 — т.е. группы, у которых все корни соответствующей системы корней имеют одинаковую длину, а во второй части — типов B_l, C_l, F_4, G_2 — группы, у которых корни имеют разную длину. Это связано с тем фактом, что для групп первого типа существуют так называемые *тождества с константами*, а для второго — нет. Изучение "малых" вербальных отображений с константами является важным инструментом исследования произвольных вербальных отображений с константами и просто вербальных отображений (см., например, [13]). Дальнейшие исследования в этом направлении, как нам кажется, помогут прояснить различные вопросы теории вербальных отображения простых алгебраических групп.

В третьей главе были рассмотрены некоторые типы вербальных отображений с константами, для которых, оценивался образ, при помощи результатов, полученных в предыдущей главе. Доказано две теоремы, первая из которых является обобщением результата работы [13].

Список литературы

[1] T. Bandman, Yu. G. Zarhin, *Surjectivity of certain word maps on $PSL(2,\mathbb{C})$ and $SL(2,\mathbb{C})$*, Eur. J. Math. **2** (2016), 614–643.

[2] A. Borel, *On free subgroups of semisimple groups*, Enseign. Math. **29** (1983), 151–164.

[3] A. Borel. Linear Algebraic groups. 2nd enl.ed., Graduate texts in mathematics **126**. Springer-Verlag New York Inc.1991.

[4] N. Bourbaki. Éléments de Mathématique. Groupes et Algèbres de Lie, Chap. IV, V, VI, 2ème édition. Masson, Paris 1981.

[5] R. W. Carter. Simple groups of Lie type. Pure and Applied Mathematics, Vol. 28. John Wiley & Sons, London-New York-Sydney, 1972.

[6] R. W. Carter. Finite Groups of Lie Type. Conjugacy Classes and Complex Characters. A Wiley - Interscience Publication, John Wiley& Sons, Chichester-New York-Bribane-Toronto-Singapure, 1985.

[7] V. Chernousov, E. W. Ellers, N. Gordeev, *Gauss decomposition with prescribed semisimple part: short proof*, J. Algebra 229 (2000), no. 1, 314-332.

[8] E. W. Ellers, N. Gordeev, *Gauss decomposition with prescribed semisimple part in classical Chevalley groups*, Comm. Algebra 22 (1994), no. 14, 5935Ц5950.

[9] N.L. Gordeev, *Freedom in conjugacy classes of simple algebraic groups and identities with constants*, Алгебра и Анализ, том 9 (1997), выпуск 4, 63-78;перевод в:St. Petersburg Math.Jouranal, vol.9 (1998), 709-723.

[10] Ф.А. Гнутов, Н.Л. Гордеев, *Об образе вербального отображения с константами простой алгебраической группы*, Записки научных семинаров ПОМИ РАН, т. 478(2019), 78-99.

[11] F. Gnutov, N.Gordeev, *Recursive sequences of surjective word maps for the algebraic groups* PGL_2 *and* SL_2, Arch. Math. (Basel) 114 (2020), no. 6, 609Ц618.

[12] Н. Л. Гордеев, Б. Э. Кунявский, Е. Б. Плоткин, *Вербальные отображения и вербальные отображения с константами простых алгебраических групп*, Докл. Акад. Наук, **2016**, том 471, є 2, с. 136-138. перевод в : Dokl. Math. 94 (2016), no. 3, 632 - 634.

[13] N. Gordeev, B. Kunyavskii, E. Plotkin, *Word maps, word maps with constants and representation varieties of one-relator groups*, J. Algebra **500** (2018), 390–424.

[14] N. Gordeev, B. Kunyavskii, E. Plotkin, *Word maps on perfect algebraic groups*, Intern. J. Algebra Comput. **28** (2018), No. 8, 1487-1515.

[15] Н. Л. Гордеев, Б. Э. Кунявский, Е. Б. Плоткин, *Геометрия вербальных отображений в простых алгебраических группах над специальными полями*, Успехи Мат. Наук **73** (2018), no. 5(443), 3-52; перевод в: Russian Math. Surveys 73 (2018), no. 5, 753-796

[16] A.A. Klyacko, M.A. Ryabtseva, *The dimension of solution sets to systems of equations in algebraic groups*, arXiv:1903.05236v1 [math.GR] (2019).

[17] А. Г. Курош, *Теория групп*, Издание третье, дополненное, "Наука", Главная редакция физико-математической литературы, Москва, 1967 г.

[18] В.В. Нестеров, А.В. Степанов, *Тождества с константами групп в группе Шевалле типа* F_4, Алгебра и Анализ, том 21 (2009), выпуск 5, 196-202; перевод в: St. Petersburg Math. J. 21 (2010), no. 5, 819Ц823.

[19] T. A. Springer. Linear Algebraic Groups, 2nd edition. Progress in Mathematics 9. Birkhäuser Boston, Boston MA, 1998.

[20] T. A. Springer, R. Steinberg,*Conjugacy classes*, in: "Seminar on Algebraic Groups and Related Finite Groups", Lecture Notes Math., vol. **131**, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1970, pp. 167–266.

[21] R. Steinberg, *Лекции о группах Шевалле*, "Мир" , Москва 1975.

[22] A. Thom, *Convergent sequences in discrete groups*, Canad. Math. Bull. **56** (2013), 424–433.