Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
лаборатория алгоритмов и технологий анализа сетевых структур

На правах рукописи
УДК 519.85+519.17

Грибанов Дмитрий Владимирович

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧ ЦЕЛОЧИСЛЕННОЙ ЛИНЕЙНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ С ОГРАНИЧЕННЫМ СПЕКТРОМ МИНОРОВ

01.01.09 — «дискретная математика и математическая кибернетика»

Диссертация на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., доц. Малышев Дмитрий Сергеевич

Нижний Новгород — 2016 год

Оглавление

Введение

1. Актуальность, степень разработанности темы исследований и формулировки основных результатов диссертации

Задача целочисленного линейного программирования, далее «задача ЦЛП», является одной из классических задач дискретной оптимизации. Многие задачи дискретной оптимизации могут быть сформулированы как задачи ЦЛП. Несмотря на то, что задача ЦЛП хорошо изучена с многих сторон, имеется множество открытых вопросов, связанных с данной задачей. Одним из открытых вопросов является вопрос о сложности задачи ЦЛП с ограниченным спектром миноров матрицы системы ограничений, задающей область допустимых решений. Исследование структуры допустимых решений задачи ЦЛП также представляет большой интерес. Существует немало работ, посвященных данным вопросам [17, 24, 37, 56, 71].

Развитие теории сложности вычислений способствовало формированию фактических стандартов эффективной разрешимости и трудноразрешаемости. Под эффективной разрешимостью данной массовой задачи понимается возможность ее решения на детерминированной машине Тьюринга за время, ограниченное полиномом от длины входных данных. В то же время, имеется ряд «неподдающихся» (называемых в теории сложности NP-трудными) задач, для которых на настоящее время не разработано быстрых алгоритмов. Справедливость известной гипотезы P$\neq$NP означала бы, что таких алгоритмов вообще не существует.

Задача ЦЛП является классической NP-трудной задачей [39, 66]. Таким образом, эффективных алгоритмов решения данной задачи, скорее всего, не существует. Этот факт побуждает исследователей к рассмотрению различных частных случаев задачи ЦЛП, допускающих полиномиальные алгоритмы решения. Рассмотрим некоторые из них. Пусть $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{Z}^m$ и $c \in \mathbb{Z}^n$. Интерес представляют две постановки задачи ЦЛП: первая состоит в максимизации линейного функционала на целых точках области, заданной системой линейных неравенств — задача $\max\{c^\top x : Ax \leqslant b,\, x \in \mathbb{Z}^n\}$, вторая постановка состоит в максимизации линейного функционала на линейном многообразии, заданном системой линейных уравнений, при дополнительном условии неотрицательности и целочисленности переменных — задача $\max\{c^\top x : Ax = b,\, x \in \mathbb{Z}^n_+\}$.

По существу, случаев полиномиальной разрешимости три.

а) Ограниченная размерность. Задача ЦЛП в первой постановке является полиномиально разрешимой в случае ограниченной размерности n. Данный факт был доказан в работе Х. Ленстры [57]. Трудоемкость алгоритма Ленстры в самом начальном варианте составляет $O(\text{poly}(L)2^{n^4})$, где L — размер входа, а $\text{poly}(\cdot)$ — некоторый полином. В дальнейшем Р. Канан [50] улучшил зависимость сложности от размерности до $O(\text{poly}(L)2^{n \log n})$. Дальнейшие улучшения алгоритма Канана проводились, например, в работах [22, 46, 47, 63].

Отметим, что случай, когда число неравенств m ограничено, полиномиально сводится к случаю ограниченной размерности n задачи. Таким образом, задача ЦЛП при ограниченном m также решается за полиномиальное время алгоритмом Ленстры.

Обратим внимание на зависимость сложности алгоритма Ленстры от m и s, где s — максимальная битовая длина записи числа, входящего в систему $Ax \leqslant b$. Если реализовать поиск округляющих эллипсоидов для алгоритма Ленстры так, как это сделано в работе [58], то это приведет к алгоритму с битовой сложностью $O(ms + s^2)$. При фиксированном m это означает трудоемкость алгоритма Евклида. К. Кларксон [30] построил рандомизированный алгоритм, решающий задачу ЦЛП за ожидаемое количество арифметических операций $O(m)$ и $O(\log m)$ обращений к оракулу, решающему задачу ЦЛП для некоторого подмножества ограничений изначальной системы неравенств фиксированного размера. Результат К. Кларксона был использован Ф. Эзенбрандом в работе [35] для получения алгоритма с битовой трудоемкостью $O(m + s \log m)$. Для размерности $n = 2$ Ф. Эзенбрандом и С. Лауе [36] был разработан полностью детерминированный алгоритм с битовой трудоемкостью $O((m + \log m \, \log s) M(s))$, где $M(s)$ — трудоемкость перемножения двух целых чисел битовой сложности s. Заметим, что арифметическая трудоемкость данного алгоритма (количество элементарных операций) оптимальна — $O(m + s)$.

b) Ограниченность количества строк и абсолютного значения чисел, входящих в систему неравенств, задающую область допустимых решений задачи. Данный результат принято формулировать для второй постановки задачи, т. е. для системы с равенствами. А именно, Х. Пападимитриу показал [61], используя аппарат динамического программирования, что если m и максимальное абсолютное значение чисел, входящих в систему $Ax \leqslant b$, ограничены, то задача ЦЛП во второй постановке может быть решена за полиномиальное время. Зависимость от правой части системы ограничений, т. е. от вектора b, можно убрать, следуя, например, методу работы [17].

Заметим, что для первой постановки это влечет следующий факт. Если $m = n + k$ для некоторого ограниченного k и максимальное абсолютное значение ранговых миноров ограничено, то задача ЦЛП в первой постановке может быть решена за полиномиальное время с использованием нормальной формы Эрмита.

c) Случай квадратной невырожденной системы неравенств с ограниченным по абсолютному значению определителем. Рассмотрим задачу в первой постановке при дополнительных условиях $m = n$ и $|\det(A)| > 0$. В работах Р. Гомори [40] (см. также книгу Т. Ху [48]) было доказано, что данная задача может быть решена за полиномиальное время при условии ограниченности $|\det(A)|$. Трудоемкость данного алгоритма равна $O(n|\det(A)|)$. Заметим, что на самом деле этот случай является подслучаем случая **b)**, но трудоемкость алгоритма Р. Гомори существенно лучше.

Существует гипотеза о том, что задача ЦЛП в первой постановке может быть решена за полиномиальное время при условии ограниченности абсолютных значений всех ранговых миноров матрицы A или расширенных матриц $(A\,b)$ и $\begin{pmatrix} c^{\mathrm{T}} \\ A \end{pmatrix}$ [14, 40, 61]. В дальнейшем мы будем называть эту гипотезу *гипотезой ограниченных миноров*. Обозначим максимальное абсолютное значение миноров матрицы A символом Δ. Хорошо известно, что данная гипотеза справедлива для $\Delta \leqslant 1$. Матрицы с такими свойствами известны под именем *тотально унимодулярных* матриц [66]. Классическим фактом, связанным с тотально унимодулярными матрицами, является то, что вершины полиэдра задачи ЦЛП, заданной системой с тотально унимодулярной матрицей A, имеют целые компоненты. Это приводит к тому, что исходная задача ЦЛП может быть решена любым полиномиальным алгоритмом линейного программирования [53, 54, 60, 62]. Хорошим введением в теорию унимодулярных матриц являются книги [66, 67].

По мнению ряда ведущих ученых в области ЦЛП (Ф. Эзенбранд, Р. Вейшмантел и др.) в теории целочисленных линейных программ с ограниченными минорами имеется некоторый недостаток результатов. Далее будут представлены немногие известные результаты в этой области.

Гипотеза ограниченных миноров была частично подтверждена в работе [17], а именно, существование полиномиального алгоритма было доказано при условии ограниченности абсолютного значения всех ранговых миноров матрицы A и при дополнительном условии невырожденности всех ранговых миноров матрицы A.

В работе В. Е. Алексеева и Д. В. Захаровой [1] вариант гипотезы с расширенной матрицей $\begin{pmatrix} c^{\mathrm{T}} \\ A \end{pmatrix}$ был доказан для $\{0,\ 1\}$–задач ЦЛП (т. е. задач ЦЛП с $A \in \{0,1\}^{m\times n}, b \in \{0,1\}^m, c \in \{0,1\}^n$) с не более чем двумя единицами в каждой строке матрицы ограничений. В работе Д.С. Малышева и Д.В. Грибанова [7] справедливость гипотезы была подтверждена для естественных линейных $\{0,1\}$-постановок задач о реберном и вершинном доминирующих множествах.

Отдельно следует рассмотреть случай $\Delta \leqslant 2$. Матрицы с таким свойством были названы *бимодулярными* в работе С. И. Веселова и А. Ю. Чиркова [71]. Политопы задач ЦЛП с бимодулярными матрицами обладают удивительными свойствами. Оказывается, что из телесности такого полиэдра следует существование целой точки внутри полиэдра. Также известно, что в бимодулярном случае вершины выпуклой оболочки целых точек полиэдра исходной задачи лежат на ребрах исходного полиэдра. Это приводит к тому факту, что задача ЦЛП с бимодулярными матрицами может быть решена за полиномиальное время при дополнительном условии ограниченности степеней вершин графа полиэдра задачи (вершинами данного графа являются вершины полиэдра, а ребрами — ребра полиэдра) некоторым полиномом от размерности n. К сожалению, существуют контрпримеры с экспоненциальной степенью вершин. Один из таких примеров приведен в данной диссертации.

В случае $\Delta \geqslant 3$ нельзя утверждать, что вершины выпуклой оболочки целых точек лежат на ребрах исходного полиэдра. Тем не менее, если политоп матрицы ограничений задачи является достаточно широким, то он обязательно содержит целую точку. Более того, некоторая целая точка внутри этого полиэдра может быть найдена за полиномиальное время. Данный результат получен в работах Д. В. Грибанова и С. И. Веселова [42, 44], полное его изложение приводится в настоящей диссертации. Под *шириной выпуклого тела* P понимается величина:

$$\operatorname{width}(P) = \min_{c \in \mathbb{Z}^n \setminus \{\mathbf{0}\}} \{\max_{x \in P} c^\top x - \min_{x \in P} cx\}.$$

Факт о том, что политоп достаточной ширины содержит целую точку, следует из теоремы А. Хинчина [11]. Приведем данную теорему. Пусть P — выпуклое тело в $\mathbb{R}^n$ и $P \cap \mathbb{Z}^n = \emptyset$, тогда $\operatorname{width}(P) \leqslant f(n)$, где величина $f(n)$ зависит только от размерности. В работе А. Хинчина было доказано, что $f(n) \leqslant n!$. В работах [18, 19, 45, 65] оценка величины $f(n)$ многократно улучшалась. Наилучшая, на текущий момент, оценка $f(n) = O(n^{\frac{4}{3}} \log^c n)$ (для общего случая) приведена в работе М. Рудельсона [65], для случая симметричных выпуклых тел приведена в работе [18], где $f(n) = O(n \log n)$. Для симплексов наилучшая оценка $f(n) = O(n \log n)$ приведена в работе [19], а наилучшая оценка для эллипсоидов $f(n) = O(n)$ — в работе [18]. В работах [52, 68] показано, что на определенных симплексах без целых точек достигается ширина n, откуда следует, что $f(n) = \Omega(n)$. Таким образом, возникает гипотеза, что $f(n) = \Theta(n)$, которая доказана только для эллипсоидов. Ширине симплексов без целых точек посвящены работы [45, 68]. Очень хорошее введение и обзор данной тематики содержатся в работах [27, 34].

В работах Д. В. Грибанова и С. И. Веселова [42, 44] был рассмотрен аналог теоремы А. Хинчина для полиэдров. Оказалось, что в данном случае зависимость $f(n)$ от n можно сделать линейной или даже избавиться от нее для случая симплексов. Более того, результаты данных работ являются конструктивными и позволяют находить целые точки внутри широких полиэдров за полиномиальное время. Эти результаты приводятся в данной диссертации.

Задача определения ширины произвольного полиэдра является NP-трудной, более того, это верно уже для симплексов [68]. В работе Д. В. Грибанова и А. Ю. Чиркова [43] было показано, что ширина симплекса, заданного системой с ограниченными минорами, может быть найдена за полиномиальное время. Полное изложение упомянутого результата приводится в настоящей диссертации.

Наконец, рассмотрим задачу ЦЛП в постановке, использующей выпуклую оболочку некоторого набора точек. Пусть $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ и $c \in \mathbb{Z}^n$, пусть политоп P является выпуклой оболочкой столбцов матрицы A. Нетрудно видеть, что задача максимизации линейного функционала $c^\top x$ на целых точках политопа P является тривиальной, для этого достаточно перебрать столбцы матрицы A. Для того, чтобы усложнить задачу, исключим из политопа P его вершины. Множество вершин P обозначим через $\mathrm{vert}(P)$. Финальный вариант задачи выглядит следующим образом:

$$\max\{c^\top x : x \in (P \cap \mathbb{Z}^n) \setminus \mathrm{vert}(P)\}.$$

Нетрудно видеть, что эта задача NP-трудна. Действительно, пусть P — симплекс. Тогда можно получить представление симплекса в виде системы неравенств, после чего добавить отсечения для вершин симплекса, не затрагивающее других целых точек. Как известно, задача ЦЛП в первой постановке NP-трудна уже на симплексах, так как политоп задачи о рюкзаке является симплексом. Тем самым, задача ЦЛП на симплексе с удаленными вершинами является NP-трудной. В работе Грибанова и Чиркова [43] было показано, что при условии ограниченности n и максимального абсолютного значения ранговых миноров A для данной задачи существует субэкспоненциальный алгоритм, а при более жестких ограничениях на миноры A можно получить полиномиальный алгоритм. Полное изложение данного результата также приводится в настоящей диссертации.

В диссертации содержатся результаты исследования гипотезы ограниченных миноров и близких к ней задач. Приведенные выше факты говорят об актуальности выбранной темы исследований и об ее недостаточной разработанности.

2. Цели и задачи работы

Целью работы является исследование гипотезы ограниченных миноров для задач ЦЛП и других, близких задач дискретной оптимизации.

3. Научная новизна работы

В ходе работы получен ряд новых результатов, существенно пополняющих теорию задач ЦЛП с ограниченным спектром миноров. При помощи новых приемов полиэдральной комбинаторики и теории графов были построены полиномиальные алгоритмы решения некоторых задач ЦЛП и близких к ним задач. Все полученные в диссертации результаты являются новыми.

4. Теоретическая и практическая значимость работы

Работа носит теоретический характер. Результаты диссертации могут применяться при анализе сложности различных задач ЦЛП и близких к ним задач. Они могут найти применения в исследованиях, проводимых в профильных российских и международных научных группах. Они могут также применяться при разработке и чтении курсов и спецкурсов по дискретной оптимизации и теории графов.

5. Методология и методы диссертационного исследования

В диссертации использованы методы геометрии чисел, линейной алгебры, комбинаторного анализа, теории полиэдров и теории графов.

6. Положения, выносимые на защиту

Наиболее важными из полученных результатов являются следующие.

1. Доказан аналог теоремы А. Я. Хинчина [11] для произвольных полиэдров. Показано, что если полиэдр имеет достаточно большую ширину, то он обязан содержать внутри как минимум $n+1$ целую точку, где n — есть размерность полиэдра. Приведенный результат является конструктивным, а именно, предложен полиномиальный алгоритм поиска некоторой целой точки внутри полиэдра, имеющего достаточную ширину. Для случая, когда полиэдр является симплексом, нижняя оценка ширины, превышение которой гарантирует существование целой внутренней точки, существенно уточнена.

2. Показано, что если система, задающая симплекс, имеет ограниченные миноры, то существует полиномиальный алгоритм вычисления ширины такого симплекса.

3. Сформулировано определение особого класса полиэдров, полученных пересечением некоторого простого многогранного конуса C системой полупространств, таких что нормали данных полупространств находятся в определенном соотношении с конусом C.

Показано, что если конус C задан системой с ограниченными минорами, то задача ЦЛП на всем полиэдре может быть решена за полиномиальное время.

Данный факт использован для получения субэкспоненциального алгоритма для решения задачи ЦЛП на полиэдрах, заданных выпуклой оболочкой точек в случае, если матрицы, составленные из компонент точек, имеют ограниченные миноры. Показано, что алгоритм можно сделать полиномиальным, если наложить более сильные ограничения на матрицу, составленную из компонент точек.

4. Установлена справедливость гипотезы ограниченных миноров для некоторых естественных $\{0,1\}$-постановок задач о вершинном и реберном доминирующих множествах в графах. Для основного результата работы [1], касающегося естественной $\{0,1\}$-постановки задачи о независимом множестве, предложено более простое доказательство.

В первой главе приводятся обозначения и формулировки некоторых определений и фактов. В данной главе излагаются результаты работ [42, 44] про аналоги теоремы А. Хинчина и полиномиальные алгоритмы поиска целых точек в достаточно широких полиэдрах.

Во второй главе приводится алгоритм вычисления ширины симплекса из [43]. Доказывается его полиномиальность для случая ограниченности миноров системы целочисленных неравенств, задающих симплекс. В данной главе также приводятся алгоритмы для решения задач ЦЛП для некоторых классов полиэдров. Доказывается, что сложность данных алгоритмов является полиномиальной или субэкспоненциальной при некоторых условиях, одним из которых является условие ограниченности миноров.

В третьей главе приводятся результаты работы [7]. Здесь доказывается справедливость гипотезы ограниченных миноров для естественных $\{0, 1\}$-постановок задач о реберном и вершинном доминирующих множествах обыкновенного графа. В данной главе также приводится упрощенное доказательство результата В. Е. Алексеева и Д. В. Захаровой из [1].

7. Степень достоверности и апробации результатов работы

Все результаты, полученные автором, являются новыми и достоверными. Это подтверждается наличием строгих математических доказательств, опубликованных в рецензируемых научных изданиях из перечня ВАК РФ. Результаты диссертации докладывались и обсуждались на следующих конференциях и семинарах:

1. 3rd-6th International Conferences on Network Analysis (Нижний Новгород, 2013–2016),

2. XIV и XV Всероссийские конференции «Математическое программиро-

вание и приложения» (Екатеринбург, 2013, 2015),

3. III Международная научная конференция «Дискретная математика, алгебра и их приложения» (Минск, 2015),

4. IX Международная конференция «Дискретные модели в теории управляющих систем» (Моск. обл., 2015),

5. XII международный научный семинар «Дискретная математика и ее приложения» (Москва, 2016),

6. общегородские семинары г. Н. Новгорода по дискретной математике,

7. семинары лаборатории алгоритмов и технологий анализа сетевых структур НИУ ВШЭ НН.

По теме диссертации имеется 4 публикации в изданиях из перечня МинОбрНауки РФ:

1. Gribanov D. V., Veselov S. I. On integer programming with bounded determinants // Optimization Letters. — 2016. — V. 10, No 6. — P. 1169–1177.
2. Gribanov D. V., Chirkov A. Y. The width and integer optimization on simplices with bounded minors of the constraint matrices // Optimization Letters. — 2016. — V. 10, No 6. — P. 1179–1189.
3. Грибанов Д. В., Малышев Д. С. Сложность некоторых задач на графах с ограниченными минорами их матриц ограничений // Журнал Средневолжского математического общества. — 2016. — Т. 18, No. 4 — Стр. 11–23.
4. Gribanov D. V. The flatness theorem for some class of polytopes and searching an integer point // Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. — 2014. — V. 104. — P. 37–43.

Автор работы выражает глубокую признательность своему научному руководителю д.ф.-м.н., доц. Дмитрию Сергеевичу Малышеву за постоянное внимание к работе, полезные советы и замечания.

Глава 1

Терминология, обозначения и конструктивные аналоги теоремы А. Хинчина

1.1 Терминология и обозначения

В данном разделе вводится ряд понятий и обозначений, которые будут использоваться на протяжении всей диссертации. Мы также приведем некоторые известные факты, необходимые для дальнейшего изложения диссертации. Эти факты можно найти, например, в работах [8, 12, 14, 15, 48, 49, 66, 74].

1.1.1 Множества и матрицы

Через $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$ мы будем обозначать множества натуральных, целых, рациональных и действительных чисел соответственно.

Через $\mathbb{Q}^n$, $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{Z}^n$ мы будем обозначать линейные пространства векторов размерности n над множеством рациональных чисел, множеством действительных чисел и решетку n-мерных целочисленных векторов соответственно.

Приписывая знак плюс, как это сделано, например, в обозначении $\mathbb{R}^n_+$, мы имеем в виду множество неотрицательных векторов из данного множества.

Для некоторой $m \times n$-матрицы A через $A_{i\,j}$ обозначим элемент, находящийся на пересечении i-й строки и j-го столбца. Через $A_{*\,j}$ и $A_{i\,*}$ обозначим, соответственно, j-й столбец и i-ю строку матрицы A.

Мы будем использовать следующие обозначения для стандартных матриц:

1. J_n — матрица порядка n, состоящая из одних единиц,
2. O_n — матрица порядка n, состоящая из одних нулей,
3. I_n — единичная матрица порядка n,
4. j_n — вектор с n компонентами, состоящий из одних единиц,
5. o_n — вектор с n компонентами, состоящий из одних нулей,
6. $A^\top$ — матрица, транспонированная к A.

Замечание 1.1.1 *Вектор, состоящий из одних нулей, также будем обозначать жирным символом* $\mathbf{0}$*, не используя обозначение* o_n*, если его размер понятен из контекста или попросту не важен. Того же правила будем придерживаться и для вектора из одних единиц, который будем обозначать через* $\mathbf{1}$.

Для произвольных подмножеств $I \subseteq \{1, 2, \ldots, m\}$ и $J \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ через $A_{I\,J}$ обозначим подматрицу матрицы A, образованную пересечением строк с номерами из I и столбцов с номерами из J. Порядок строк и столбцов определятся естественным образом, по возрастанию номеров. При необходимости, символ I или символ J будет заменяться на символ $*$, что будет обозначать взятие всех строк или столбцов матрицы A соответственно.

Ранг матрицы A будем обозначать как $\operatorname{rank}(A)$.

Пусть $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$, где $\mathbb{F}$ — некоторое числовое множество. Мы будем использовать следующие виды оболочек:

- $\operatorname{lin.hull}(A) = \{x = At : t \in \mathbb{F}^n\}$ — линейная оболочка столбцов A,
- $\operatorname{aff.hull}(A) = \{x = At : t \in \mathbb{F}^n, \sum\limits_{i=1}^{n} t_i = 1\}$ — аффинная оболочка столбцов A,
- $\operatorname{cone.hull}(A) = \{x = At : t \in \mathbb{F}^n_+\}$ — коническая оболочка столбцов A,

- $\operatorname{conv.hull}(A) = \{x = At : t \in \mathbb{F}^n_+,\ \sum\limits_{i=1}^{n} t_i = 1\}$ — выпуклая оболочка столбцов A,
- $[x, y] = \{x = tx + (1 - t)y : 0 \leqslant t \leqslant 1\}$ — отрезок, выпуклая оболочка двух точек x, y.

Основными теоремами для анализа выпуклых и конических оболочек являются теоремы Каратеодори (см., например, [8, 49, 66, 74]). Приведем их:

Теорема 1.1.1 (Теорема Каратеодори для конической оболочки) *Пусть* $x \in \operatorname{cone.hull}(A)$, *где* $A \in \mathbb{R}^{n \times s}$. *Тогда* $x \in \operatorname{cone.hull}(A_{*\,J})$, *для* $J \subseteq \{1, 2, \ldots, s\}$ *и* $|J| \leqslant \operatorname{rank}(A) = \dim(\operatorname{lin.hull}(A))$.

Теорема 1.1.2 (Теорема Каратеодори для выпуклой оболочки) *Пусть* $x \in \operatorname{conv.hull}(A)$, *где* $A \in \mathbb{R}^{n \times s}$. *Тогда* $x \in \operatorname{conv.hull}(A_{*\,J})$, *для* $J \subseteq \{1, 2, \ldots, s\}$ *и* $|J| \leqslant \operatorname{rank}(\bar{A}) = \dim(\operatorname{aff.hull}(A)) + 1$, *где* $\bar{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1}^\top \\ A \end{pmatrix}$.

Мы будем использовать стандартные обозначения (см., например, [32]) для классов сложности алгоритмов:

- $O(f(n)) = \{g(n) : \exists c \in \mathbb{R}_+, \forall n \in \mathbb{N}, c|f(n)| \geqslant |g(n)|\}$,
- $\Omega(f(n)) = \{g(n) : \exists c \in \mathbb{R}_+, \forall n \in \mathbb{N}, c|g(n)| \geqslant |f(n)|\}$,
- $\Theta(f(n)) = O(f(n)) \cap \Omega(f(n))$.

Определим длину входа, например, как это сделано в книге [66]. Определим размер целого числа z как $\operatorname{size}(z) = 1 + \lceil \log_2(|z| + 1) \rceil$. Размер рационального числа $z = p/q$ определим как $\operatorname{size}(z) = 1 + \lceil \log_2(|p| + 1) \rceil + \lceil \log_2(|q| + 1) \rceil$. Размер $m \times n$-матрицы A с рациональными коэффициентами определим как $\operatorname{size}(A) = mn + \sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{n} \operatorname{size}(A_{i\,j})$. Аналогичным же образом определим размер рационального вектора.

Алгоритм называется *полиномиальным*, если количество его битовых операций можно оценить полиномом от длины входа задачи.

Алгоритм называется *субэкспоненциальным*, если количество его битовых операций можно оценить величиной $O(2^{\mathrm{poly}(\log s)})$, где под $\mathrm{poly}(\cdot)$ понимается некоторый полином фиксированной степени.

Иногда вместо символа O мы будем использовать символ $\tilde{O}$. Данный символ будет обозначать, что мы игнорируем логарифмический множитель при анализе трудоемкости, т. е.

$$\tilde{O}(f(n)) = \{g(n) :\ g(n) = O(f(n)\,\log(f(n)))\}.$$

Для обозначения минорных характеристик[1] некоторой матрицы $A \in \mathbb{Z}^{m\times n}$ нам потребуются следующие обозначения (без ограничения общности, будем считать, что $m \leqslant n$):

- $\Delta_k(A) = \max\{|\det(A_{J\,J})| : J \subseteq \{1,2,\dots,m\},\ |J| = k\}$ — максимальное абсолютное значение миноров порядка k матрицы A,
- $\delta_k(A) = \min\{|\det(A_{J\,J})| > 0 : J \subseteq \{1,2,\dots,m\},\ |J| = k\}$ — минимальное абсолютное значение ненулевых миноров порядка k матрицы A,
- $\Delta(A) = \Delta_{\mathrm{rank}(A)}(A)$ — максимальное абсолютное значение миноров рангового порядка матрицы A,
- $\delta(A) = \delta_{\mathrm{rank}(A)}(A)$ — минимальное абсолютное значение ненулевых миноров рангового порядка матрицы A,
- $\Delta_{\mathrm{gcd}}(k, A) = \gcd\{\det(A_{J\,J}) : J \subseteq \{1,2,\dots,m\},\ |J| = k\}$ — наибольший общий делитель миноров порядка k матрицы A,
- $\Delta_{\mathrm{lcm}}(k, A) = \mathrm{lcm}\{\det(A_{J\,J}) \neq 0 : J \subseteq \{1,2,\dots,m\},\ |J| = k\}$ — наименьшее общее кратное ненулевых миноров порядка k матрицы A,
- $\Delta_{\mathrm{gcd}}(A) = \Delta_{\mathrm{gcd}}(\mathrm{rank}(A), A)$ — наибольший общий делитель миноров рангового порядка матрицы A,
- $\Delta_{\mathrm{lcm}}(A) = \Delta_{\mathrm{lcm}}(\mathrm{rank}(A), A)$ — наименьшее общее кратное ненулевых миноров рангового порядка матрицы A.

[1] Под минорными характеристиками матрицы понимаются различные свойства миноров данной матрицы. Например, это может быть свойство ограниченности абсолютного значения всех ранговых миноров.

Стандартные определения унимодулярных и тотально унимодулярных матриц приведены в [66, 67]. Матрица A называется *унимодулярной*, если $\Delta(A) = 1$. Если $\Delta_i(A) \leqslant 1$ для всех $i \in \mathbb{N}$, то такая матрица A называется *тотально унимодулярной*.

Матрицу A, для которой $\Delta(A) = k$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$, мы будем называть *k-ограниченной*. Если $\Delta_i(A) \leqslant k$ для всех i, то такую матрицу A мы будем называть *тотально k-ограниченной*. Очевидно, что класс 1-ограниченных матриц совпадает с классом тотально унимодулярных матриц.

В работе [56] было введено понятие *k-модулярных* матриц. Матрица называется *k-модулярной*, если каждый ее минор рангового порядка принимает значения из множества $\{0, \pm k^s : s \in \mathbb{Z}_+\}$. В работе [56] приведен критерий целочисленности полиэдра, заданного k-модулярной матрицей. Данный результат является, своего рода, обобщением классических результатов о тотально унимодулярных матрицах.

В работе [71] введен класс *бимодулярных* матриц. В наших обозначениях этот класс совпадает с классом 2-ограниченных матриц.

1.1.2 Сведения из теории решеток

Под *решеткой*, порожденной невырожденной матрицей $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, понимается множество $\Lambda(A) = \{x = At : t \in \mathbb{Z}^n\}$. Если элементы A являются рациональными числами (т. е. $A \in \mathbb{Q}^{n \times n}$), то решетка $\Lambda(A)$ называется *рациональной решеткой*. Столбцы матрицы A называются *базисом* решетки. Очевидно, что $\mathbb{Z}^n = \Lambda(I_n)$. Число $\det(\Lambda(A)) = |\det(A)|$ называется *определителем* решетки $\Lambda(A)$. Введение в теорию решеток есть в книге [27].

Очевидно, что невырожденная квадратная матрица $U \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ является унимодулярной тогда и только тогда, когда $\det(U) = \pm 1$. Также нетрудно видеть, что невырожденная матрица U является унимодулярной тогда и только тогда, когда обратная к ней матрица состоит из целых элементов, т. е. $U^{-1} \in \mathbb{Z}^{n \times n}$. Данное обстоятельство приводит к следующему фундаментальному факту (см., например, [27, 49, 66]).

Лемма 1.1.1 *Пусть $A, B \in \mathbb{Z}^{n\times n}$. Равенство $\Lambda(A) = \Lambda(B)$ верно тогда и только тогда, когда $A = BU$ для некоторой унимодулярной матрицы U. Отсюда также следует, что если матрица $U \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ является унимодулярной, то $\Lambda(U) = \mathbb{Z}^n$.*

Важнейшими инструментами для исследования решеток и целочисленных решений систем линейных уравнений и неравенств являются нормальные формы Эрмита и Смита [27, 49, 66].

Теорема 1.1.3 *Любую матрицу $A \in \mathbb{Q}^{m\times n}$ ранга $r = \mathrm{rank}(A)$ можно представить в виде произведения $A = HU$, где матрица $U \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ является унимодулярной, а матрица $H \in \mathbb{Q}^{m\times n}$, называемая нормальной формой Эрмита, имеет следующий вид:*

$$\begin{pmatrix} H_{1\,1} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ H_{2\,1} & H_{2\,2} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ H_{r\,1} & H_{r\,2} & \dots & H_{r\,r} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ H_{m\,1} & H_{m\,2} & \dots & H_{m\,r} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Для элементов H с номерами $i, j \in \{1, 2, \dots, r\}$ верно следующее: $H_{i\,i} > 0$, $0 \leqslant H_{i\,j} < H_{i\,i}$ для $i < j$. Для остальных элементов матрицы H данные свойства могут быть не верны. Если исходная матрица A целочисленная, то и матрица H является целочисленной.

Теорема 1.1.4 *Нормальная форма Эрмита H матрицы A является инвариантом решетки $\Lambda(A)$ и, таким образом, самой матрицы A. Иными словами, пусть $H(A)$ и $H(B)$ — нормальные формы Эрмита для матриц A и B. Тогда $\Lambda(A) = \Lambda(B)$ тогда и только тогда, когда $H(A) = H(B)$.*

Теорема 1.1.5 *Любую матрицу $A \in \mathbb{Q}^{m\times n}$ ранга $r = \mathrm{rank}(A)$ можно представить в виде произведения $A = PSQ$, где матрицы $P \in \mathbb{Z}^{m\times m}$ и $Q \in \mathbb{Z}^{n\times n}$*

являются унимодулярными матрицами, а матрица $S \in \mathbb{Q}^{m\times n}$, *называемая нормальной формой Смита, имеет следующий вид:*

$$\begin{pmatrix} S_{1\,1} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & S_{2\,2} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \multicolumn{7}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \dots & S_{r\,r} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \multicolumn{7}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Если исходная матрица A *целочисленная, то и матрица* S *является целочисленной.*

Матрицы A и B называются *унимодулярно эквивалентными*, если выполняется соотношение $A = PSQ$ для некоторых квадратных унимодулярных матриц P и Q. Нетрудно видеть, что данное отношение действительно является отношением эквивалентности матриц.

Лемма 1.1.2 *Пусть* $A, B \in \mathbb{Z}^{m\times n}$. *Если данные матрицы унимодулярно эквивалентны, то* $\varDelta_{\mathrm{gcd}}(k, A) = \varDelta_{\mathrm{gcd}}(k, B)$ *для всех* k. *Таким образом, наибольший общий делитель миноров* k*-го порядка является инвариантом отношения унимодулярной эквивалентности. Отсюда, например, следует, что если* $S = S(A)$, *то* $S_{1\,1} = \varDelta_{\mathrm{gcd}}(1, A)$ *и*

$$S_{k\,k} = \varDelta_{\mathrm{gcd}}(k, A)/\varDelta_{\mathrm{gcd}}(k-1, A).$$

Из предыдущей леммы вытекает следующая теорема.

Теорема 1.1.6 *Нормальная форма Смита является матричным инвариантом для отношения унимодулярной эквивалентности. Иными словами, пусть* $S(A)$ *и* $S(B)$ *— нормальные формы матриц* A *и* B *соответственно. Тогда матрицы* A *и* B *унимодулярно эквивалентны тогда и только тогда, когда* $S(A) = S(B)$.

Замечание 1.1.2 *Известно, что для рациональных и полиномиальных матриц форма Эрмита и форма Смита могут быть найдены за полиномиальное время* [51]. *Рекордным на текущий момент, близким к оптимальному алгоритму для поиска нормальной формы Смита, является алгоритм из работы* [69]. *Аналогичный по характеристикам алгоритм для нормальной формы Эрмита может быть найден в работе* [70]. *Работа* [59] *посвящена разработке аналогичных алгоритмов, но с меньшими затратами памяти. Обзоры можно найти в* [59, 73].

1.1.3 Полиэдры и политопы

Необходимые сведения из теории полиэдров и политопов можно найти в книгах [8, 12, 49, 66, 74].

Пусть $M_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ и $M_2 \subseteq \mathbb{R}^n$. Под *суммой* множеств M_1 и M_2 понимается множество

$$M_1 \boldsymbol{+} M_2 = \{x + y : x \in M_1,\, y \in M_2\},$$

составленное из всевозможных сумм точек множеств M_1 и M_2. Такие суммы называются *суммами Минковского* [74].

Полиэдром называется множество решений системы линейных неравенств $P(A, b) = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leqslant b\}$. Если данное множество ограничено, то такой полиэдр называется *политопом. Многогранным конусом* называется полиэдр вида $P(A, \mathbf{0})$.

Через $\mathrm{lineal}(P)$ обозначим максимальное линейное многообразие, содержащееся в полиэдре P. Данное определение корректно, так как такое многообразие единственно. Заметим, что для многогранного конуса C множество $\mathrm{lineal}(C)$ является линейным подпространством пространства $\mathbb{R}^n$. Многогранный конус C, для которого верно $\dim(\mathrm{lineal}(C)) = 0$, называется *острым.* Известно, что $\mathrm{lineal}(P(A, b)) = \{x : Ax = b\}$, откуда

$$\dim(\mathrm{lineal}(P(A, b))) = n - \mathrm{rank}(A),$$

если A состоит из n столбцов.

Размерностью $\dim(P)$ *полиэдра* P называется размерность множества $\mathrm{aff.\,hull}(P)$, являющегося линейным многообразием, т.е. $\dim(P) = \dim(\mathrm{aff.\,hull}(P))$.

Множество $\mathrm{aff.\,hull}(P)$ также можно записать в виде подсистемы линейных уравнений исходной системы, задающей полиэдр. Для этого нам потребуется ввести понятие *явного равенства*. Неравенство $A_{i\,*}x \leqslant b_i$, являющееся i-м неравенством системы $Ax \leqslant b$, задающей полиэдр $P(A, b)$, называется *неявным равенством*, если равенство $A_{i\,*}x = b_i$ верно для всех точек полиэдра $P(A, b)$. Подсистему, состоящую из явных равенств системы $Ax \leqslant b$, принято обозначать через $A^{=}x \leqslant b^{=}$, а подсистему, составленную из оставшихся неравенств, через $A^{<}x \leqslant b^{<}$.

Известно, что $\mathrm{aff.\,hull}(P) = \{x : A^{=}x = b^{=}\}$, таким образом

$$\dim(P(A, b)) = n - \mathrm{rank}(A^{=}),$$

если A состоит из n столбцов.

Замечание 1.1.3 *Далее, в некоторых теоремах мы будем предполагать, что* $\dim(P(A, b)) = n$, *где* $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$. *Данное предположение можно делать без ограничения общности, так как при его нарушении можно за полиномиальное время найти неравенства системы* $A^{=}x \leqslant b^{=}$, *построить базис* $\mathrm{aff.\,hull}(P)$, *и, сделав замену координат, понизить размерность исходной системы до* $\dim(P)$.

Классическая теорема Минковского–Фаркаша–Вейля (см., например, [74]) является утверждением о существовании другого, эквивалентного способа задания многогранного конуса через коническую оболочку векторов.

Теорема 1.1.7 *Пусть* $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$, $P = P(A, \mathbf{0})$ *и* $\dim(\mathrm{lineal}(P)) = 0$. *Тогда существует такая матрица* $B \in \mathbb{Z}^{n \times s}$, *что* $P = \mathrm{cone.\,hull}(B)$.

Замечание 1.1.4 *Столбцы матрицы* B *являются* системой образующих *многогранного конуса* P. *Минимальная система образующих называется* остовом *конуса* P. *Если* $\dim(\mathrm{lineal}(P)) = 0$, *то остов единственен. Если* *же* $\dim(\mathrm{lineal}(P)) > 0$*, то, так как существует бесконечно много систем образующих линейного подпространства* $\mathrm{lineal}(P)$*, остов* P *также не является единственным. Элементы остова также часто называются* ребрами *или* лучами *конуса* P*.*

Про число s можно сказать следующее. Пусть $\dim(P) = n$ (см. замечание 1.1.3). Тогда величину s можно оценить как $s = O(n^{\lfloor d/2 \rfloor})$, используя теорему о политопе с максимально возможным числом вершин (см. работу [74]). Для такой оценки конус $\mathrm{cone.\,hull}(B_2)$ нужно пересечь с некоторой гиперплоскостью, пересекающей каждый луч конуса в единственной точке (такая гиперплоскость существует, так как конус острый). В пересечении получится политоп с числом вершин, совпадающим с размером остова конуса (данное число и есть s). К полученному политопу и применяется теорема о максимально возможном числе вершин (см. работу [74]).

Следующая теорема обобщает теорему 1.1.7 на случай $\dim(\mathrm{lineal}(P)) > 0$.

Теорема 1.1.8 *Пусть* $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ *и* $P = P(A, \mathbf{0})$*. Тогда существует такая матрица* $B \in \mathbb{Z}^{n \times s}$*, что* $P = \mathrm{cone.\,hull}(B)$*. Если конус* P *не острый или, что эквивалентно выполнению неравенства* $\dim(\mathrm{lineal}(P)) > 0$*, то его можно представить как*

$$P = \mathrm{cone.\,hull}(B) = \mathrm{lin.\,hull}(B_1) + \mathrm{cone.\,hull}(B_2),$$

где $\mathrm{cone.\,hull}(B_2)$ *— острый конус, а* $\mathrm{lin.\,hull}(B_1) = \mathrm{lineal}(P)$ *для некоторых целочисленных матриц* $B_1 \in \mathbb{Z}^{n \times s_1}$ *и* $B_2 \in \mathbb{Z}^{n \times s_2}$*.*

Замечание 1.1.5 *Данная теорема легко следует из теоремы* 1.1.7*. В случае, когда* $\dim(\mathrm{lineal}(P)) > 0$*, множество* $\mathrm{lineal}(P)$ *может быть найдено как множество решений системы* $Ax = \mathbf{0}$*. Построим к этому подпространству дополнение до прямой суммы (например, можно выбрать ортогональное дополнение со стандартным скалярным произведением), и перейдя в это дополнение, мы получим полиэдр* P'*, для которого* $\dim(\mathrm{lineal}(P')) = 0$*, мень-*

шей размерности $n - \dim(\mathrm{lineal}(P))$*. По этой причине мы иногда будем предполагать, что* $\dim(\mathrm{lineal}(P)) = 0$.

Про числа s, s_1 и s_2 можно сказать следующее. Очевидно, можно положить $s_1 = \dim(\mathrm{lineal}(P)) \leqslant n$. Пусть $\dim(P) = n$ (см. замечание 1.1.3). Тогда величину s_2 можно оценить так, как это было сделано в тексте после теоремы 1.1.7. Величину s можно оценить как $s \leqslant s_1 + s_2 + 1$. Данная оценка справедлива, так как для любой матрицы B верно $\mathrm{lin.\,hull}(B) = \mathrm{cone.\,hull}((B\,\delta))$, где столбец δ — сумма всех столбцов матрицы B, взятая с противоположным знаком, т. е. $\delta = -\sum\limits_i B_{*\,i}$.

Замечание 1.1.6 *Задача отыскания матриц B, B_1 и B_2 по матрице A называется задачей построения* двойственного описания многогранного конуса. *Заметим, что алгоритм для такого двойственного описания полиэдра не может быть полиномиальным, так как неполиномиальная нижняя оценка на s_2 достигается на классе простых политопов, двойственных к циклическим* [74]. *Отметим, что на текущий момент не известно алгоритма, который был бы полиномиальным по суммарной длине входа и выхода. Все известные на данный момент алгоритмы приводят к экспоненциальному росту промежуточных вычислений относительно длины входа и выхода. Обзоры можно найти, например, в* [2, 10, 13, 26, 28, 38]. *Положительной стороной является то, что при фиксированном m — числе неравенств нетрудно предоставить полиномиальный алгоритм для решения задачи двойственного описания полиэдра. Эффективными на практике и популярными являются, например, алгоритмы работ* [2, 28, 38].

Теорему Минковского–Фаркаша–Вейля можно сформулировать и для полиэдров общего случая. Примечательно, что данная теорема доказывается путем сведения к предыдущей теореме. Прием, который позволяет это сделать, называется *гомогенизацией* (см. [74]).

Рассмотрим полиэдр $P = P(A, b)$. Построим матрицу A' следующим образом: $A' = \begin{pmatrix} -1 & \mathbf{0}^\top \\ -b & A \end{pmatrix}$. Многогранный конус $H = P(A', \mathbf{0})$ называется *гомогенизацией* полиэдра P. Если полиэдру P соответствует система $Ax \leqslant b$, то конусу H соответствует система $\begin{cases} -x_0 \leqslant 0, \\ Ax - bx_0 \leqslant \mathbf{0}. \end{cases}$

Следующая лемма проводит прямую взаимосвязь между системами порождающих для многогранного конуса H, являющегося гомогенизацией P, и P.

Лемма 1.1.3 *Пусть $P = P(A, b)$ и H является гомогенизацией P, пусть также $V \in \mathbb{Q}^{n\times k}$ и $R \in \mathbb{Z}^{n\times s}$. Тогда, если $H = \operatorname{cone.hull}(M)$, для $M = \begin{pmatrix} {j_k}^\top & {o_s}^\top \\ V & R \end{pmatrix}$, то*

$$P = \operatorname{conv.hull}(V) + \operatorname{cone.hull}(R).$$

И обратно, если

$$P = \operatorname{conv.hull}(V) + \operatorname{cone.hull}(R),$$

то $H = \operatorname{cone.hull}(M)$. Также верно $\dim(P) = \dim(H) - 1$ и

$$\dim(\operatorname{lineal}(P)) = \dim(\operatorname{lineal}(H)) - 1.$$

Данная лемма вместе с теоремой 1.1.8 приводят к общей формулировке теоремы Минковского–Фаркаша–Вейля (см., например, [74]).

Теорема 1.1.9 *Пусть $A \in \mathbb{Z}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{Z}^m$ и $P = P(A, b)$. Тогда существуют такие матрицы $V \in \mathbb{Q}^{n\times k}$ и $R \in \mathbb{Z}^{n\times s}$, что*

$$P(A, b) = \operatorname{conv.hull}(V) + \operatorname{cone.hull}(R).$$

Если конус $\operatorname{cone.hull}(R)$ не острый, что эквивалентно выполнению неравенства $\dim(\operatorname{lineal}(P)) > 0$, то его можно представить как

$$\operatorname{cone.hull}(R) = \operatorname{lin.hull}(R_1) + \operatorname{cone.hull}(R_2),$$

где $\operatorname{cone.hull}(R_2)$ — острый конус, а

$$\operatorname{lin.hull}(R_1) = \operatorname{lineal}(\operatorname{cone.hull}(R))$$

для некоторых целочисленных матриц $R_1 \in \mathbb{Z}^{n\times s_1}$ *и* $R_2 \in \mathbb{Z}^{n\times s_2}$.

Столбцы матриц V, R, R_1 и R_2 называются *системой образующих* полиэдра P. Как и ранее, минимальная такая система называется *остовом.* Конус $\mathrm{cone.\,hull}(R)$ называется *конусом рецессивных направлений* полиэдра P. Минимальное множество столбцов матрицы R называется *множеством рецессивных направлений* полиэдра P.

Про числа k, s, s_1 и s_2 можно сказать следующее: так как $\mathrm{lineal}(\mathrm{conv.\,hull}(R))$ отличается от $\mathrm{lineal}(P)$ лишь сдвигом, то так же как и в теореме 1.1.8, можно положить $s_1 = \dim(\mathrm{lineal}(P))$. По лемме 1.1.3, сумму $k + s_2$ можно оценить так же, как и при анализе теоремы 1.1.8, откуда s оценивается как $s \leqslant s_1 + s_2 + k + 1$.

Замечание 1.1.7 *Задача отыскания матриц* V*,* R*,* R_1 *и* R_2 *называется задачей построения* двойственного описания полиэдра. *С использованием леммы* 1.1.3 *данная задача тривиально сводится к задаче построения двойственного описания многогранного конуса.*

Теорема Минковского–Фаркаша–Вейля для многогранных конусов справедлива и в обратную сторону, при переходе из описания через коническую оболочку векторов к описанию через систему линейных неравенств $Ax \leqslant \mathbf{0}$. То же верно и для общей версии теоремы. Проще всего в этом убедиться при помощи следующей леммы (см., например, [49, 66]).

Лемма 1.1.4 *Если* $P(A, \mathbf{0}) = \mathrm{cone.\,hull}(B)$*, то* $P(B^\top, \mathbf{0}) = \mathrm{cone.\,hull}(A^\top)$*.*

Таким образом, для построения двойственного представления конуса $\mathrm{cone.\,hull}(B)$ достаточно найти двойственное представление для $P(B^\top, \mathbf{0})$.

Замечание 1.1.8 *Для некоторых простых многогранных конусов и полиэдров можно выписать формулу для векторов, составляющих остовы.*

Пусть $P = P(A, \mathbf{0})$*, где* $A \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ *и* $\det(A) \neq 0$*. Тогда, нетрудно видеть, что* $P = \mathrm{cone.\,hull}(-A^{-1})$*.*

Если же $P = P(A, b)$, для некоторого $b \in \mathbb{Z}^n$, то из предыдущего получаем, что $P = v + \operatorname{cone.hull}(-A^{-1})$, где $v = A^{-1}b$.

1.1.4 Грани, вершины, фасеты

Пусть $P = P(A, b)$ для $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{Z}^m$ и пусть также $\dim(\operatorname{lineal}(P)) = 0$ и $\dim(P) = n$ (по поводу последних допущений, см. замечания 1.1.5 и 1.1.3). Пусть $v \in P$. Для дальнейшего изложения нам понадобится обозначение $J(v) = \{j \in \mathbb{N} : A_{j*}v = b_j\}$, представляющее собой множество номеров неравенств, обращающихся в равенства в точке v. Иногда, вместо одной точки v мы будем подставлять в $J(\cdot)$ целое множество точек, это означает, что нас интересует множество номеров неравенств, обращающихся в равенство на всех точках множества.

Неравенство $c^\top x \leqslant \gamma$, где $c \in \mathbb{Z}^n$ и $\gamma \in \mathbb{Q}$, называется *верным или опорным* для P, если $\forall x \in P$ верно $c^\top x \leqslant \gamma$.

Множество $F \subseteq P$ называется *гранью* P, если $F = P \cap \{x : c^\top x = \gamma\}$ для некоторого верного неравенства $c^\top x \leqslant \gamma$. *Размерностью грани* F называется число $\dim(F) = \dim(\operatorname{aff.hull}(F))$.

Нетрудно видеть, что пустое множество и сам полиэдр P являются гранями P. Действительно, $\emptyset = P \cap \{x : \mathbf{0}^\top x = 1\}$ для верного неравенства $\mathbf{0}^\top x \leqslant 1$ и $P = P \cap \{x : \mathbf{0}^\top x = 0\}$ для верного неравенства $\mathbf{0}^\top x \leqslant 0$.

Грани размерностей 0, 1 и $n - 1$ называются, соответственно, *вершинами, ребрами и фасетами*. Собственные грани минимальной и максимальной размерностей называются, соответственно, *минимальными гранями* и *максимальными гранями*. Множество максимальных граней всегда представляет собой множество фасет. Множество минимальных граней в случае, если $\dim(\operatorname{lineal}(P)) = 0$, представляет собой множество вершин. В случае, когда $\dim(\operatorname{lineal}(P)) > 0$, размерность минимальной грани совпадает с размерностью $\operatorname{lineal}(P)$, более подробно этот случай рассмотрен в замечании в конце параграфа. Множество всех вершин P будем обозначать через $\operatorname{vert}(P)$.

Замечание 1.1.9 *Предположим, что для полиэдра P было получено минимальное описание $P = \operatorname{conv.hull}(V) + \operatorname{cone.hull}(R)$, тогда множество столбцов матрицы V совпадает с $\operatorname{vert}(P)$.*

Основные факты о гранях P приведены в следующей теореме, взятой из [74]:

Теорема 1.1.10 *Пусть множество F является гранью P.*

1. *Грань F является полиэдром.*
2. *Пересечение любых двух граней P само является гранью P.*
3. *Грани F — в точности те грани P, которые содержатся в F.*
4. *$F = P \cap \operatorname{aff.hull}(F)$.*

Следующая теорема (см., например, [49, 66]) позволяет производить эффективные вычисления с гранями P:

Теорема 1.1.11 *Пусть F — грань P, тогда*

$$F = P \cap \{x : A_{J(F)*}x = b_{J(F)}\},$$

откуда $\dim(F) = n - \operatorname{rank}(A_{J(F)*})$. Таким образом, с каждой гранью F полиэдра P связано некоторое множество номеров $J(F)$. Данное отображение является инъективным.

Для вершин теорема немного упрощается, а именно, не требуется выполнять пересечение с P. Пусть $v \in \operatorname{vert}(P)$, тогда v является единственным решением системы уравнений $A_{J(v)*}x = b_{J(v)}$ и $\operatorname{rank}(A_{J(v)*}) = n$.

Замечание 1.1.10 *Множество всех граней полиэдра P образует частично упорядоченное множество. Данное частично упорядоченное множество является градуированной решеткой со свойствами атомарности, коатомарности и многими другими свойствами. Подробнее об этом можно прочитать в [74].*

Для дальнейшего изложения нам потребуются дополнительные обозначения. Пусть $v \in \mathrm{vert}(P)$, тогда

- $\mathrm{Norm}(v) = \mathrm{cone.hull}((A_{J(v)\,*})^\top)$ — конус нормалей к точке v,
- $\overline{\mathrm{Norm}} = \mathbb{R}^n \setminus \bigcup\limits_{v \in \mathrm{vert}(P)} \mathrm{Norm}(v)$ — дополнение к объединенному множеству всех нормалей P (заметим, что данное множество является открытым и даже его замыкание не является многогранным конусом).

С многогранным конусом $\mathrm{Norm}(v)$ связана следующая, важная для дальнейшего изложения лемма (доказательство можно найти в [15, 48, 49, 66, 74]).

Лемма 1.1.5 *Очевидно, что*

$$\mathbb{R}^n = \overline{\mathrm{Norm}} \cup \bigcup_{v \in \mathrm{vert}(P)} \mathrm{Norm}(v).$$

Если P является политопом, то $\overline{\mathrm{Norm}} = \emptyset$. Рассмотрим задачу максимизации линейного функционала $c^\top x$ для $c \in \mathbb{Z}^n$ на полиэдре P. Данная задача имеет вид $\max\limits_{x \in P} c^\top x$. Если $c \in \mathrm{Norm}(v)$ для некоторой $v \in \mathrm{vert}(P)$, то вершина v является оптимальным вектором исходной задачи. Если же $c \in \overline{\mathrm{Norm}}$, то целевой функционал исходной задачи не ограничен на P.

Замечание 1.1.11 *Требование $\dim(\mathrm{lineal}(P)) = 0$ не является строгим. По замечанию 1.1.5, мы можем легко перейти к полиэдру P', у которого $\dim(\mathrm{lineal}(P')) = 0$, причем $P = P' + \mathrm{lineal}(P)$. Последняя формула показывает, как выглядят грани P. Любая собственная грань F полиэдра P выглядит как $\mathrm{lineal}(P) + F'$, где F' — соответствующая грань полиэдра P'.*

1.1.5 Постановка задачи ЦЛП

Пусть, так же как и в предыдущем разделе, $P = P(A, b)$ для $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ и $b \in \mathbb{Z}$.

Обычно с ЦЛП связывают следующие задачи:

- **ЗЦЛП 1** Определение непустоты множества $P \cap \mathbb{Z}^n$. Данная задача NP-полна (см., например, [39, 66]).

- **ЗЦЛП 2** Пусть $c \in \mathbb{Z}^n$. Найти $\max\limits_{x \in P \cap \mathbb{Z}^n} c^\top x$. Данная задача NP-трудна (см., например, [39, 66]).

Заметим, что указанные задачи в общей постановке эквивалентны в терминах полиномиальной сводимости (см., например, [49, 66]), так как **ЗЦЛП 2** полиномиально сводится к **ЗЦЛП 1** с помощью дихотомии путем добавления отсечений вида $c^\top x \leqslant \gamma$. А **ЗЦЛП 1** тривиальным образом полиномиально сводится к **ЗЦЛП 2** путем введения любого линейного функционала.

Следующая лемма [66] позволяет строить алгоритмы для решения задач ЦЛП. Предварительно обозначим $P_I = \operatorname{conv.hull}(P \cap \mathbb{Z}^n)$.

Лемма 1.5.1 Множество $P_I \subseteq P \cap \mathbb{Z}^n$ является полиэдром.

Данная лемма позволяет сводить задачу ЦЛП к задаче ЛП. Действительно, можно, например, построить множество неравенств, задающих полиэдр P_I, после чего применить к нему методы ЛП. Но известно, что количество неравенств может быть экспоненциально большим, даже если исходный полиэдр являлся симплексом [66]. То же можно сказать про множество вершин и рецессивных направлений, в работах [4, 5, 6, 29, 31] даны верхние оценки. Оценки работ [4, 5, 6, 29] являются оптимальными.

Во введении к данной диссертации содержится ознакомительный список случаев, когда задачи **ЗЦЛП $\mathbf{1, 2}$** удается решить за полиномиальное время. Далее нас будет интересовать только случай, когда матрица A **ЗЦЛП $\mathbf{1, 2}$** является k-ограниченной. Сложностной статус задач **ЗЦЛП $\mathbf{1, 2}$** в этом случае неизвестен.

Приведем несколько вариантов гипотезы об ограниченных минорах, начиная с самого сильного варианта.

Гипотеза 1. Пусть матрица A является k-ограниченной матрицей. Тогда задача **ЗЦЛП 2** имеет полиномиальный алгоритм решения.

Следующий вариант допускает ослабление, заменяя задачу оптимизации задачей проверки на непустоту.

Гипотеза 2. Пусть матрица A является k-ограниченной матрицей. Тогда задача **ЗЦЛП 1** имеет полиномиальный алгоритм решения.

Справедливость гипотезы 2 влечет справедливость еще более слабого варианта гипотезы.

Гипотеза 3. Пусть расширенная матрица $\begin{pmatrix} c \\ A \end{pmatrix}$ является k-ограниченной матрицей. Тогда задача **ЗЦЛП 2** имеет полиномиальный алгоритм решения.

В самом слабом варианте гипотеза об ограниченных минорах звучит так:

Гипотеза 4. Пусть расширенная матрица $\begin{pmatrix} c^\top & 0 \\ A & b \end{pmatrix}$ является k-ограниченной матрицей. Тогда задача **ЗЦЛП 2** имеет полиномиальный алгоритм решения.

На текущий момент ни один из вариантов гипотезы не был подтвержден, и ни для одного из вариантов не была доказана NP-полнота.

Далее мы приведем небольшой обзор известных результатов в данной области.

Самым классическим из известных результатов является справедливость первой гипотезы для 1-ограниченных матриц, также известных, как унимодулярные матрицы (см., например, [66, 67]). Оказывается, что полиэдр задач **ЗЦЛП 1, 2** в этом случае является целочисленным, т. е. координаты всех его вершин являются целыми числами. К таким полиэдрам для решения задач ЦЛП достаточно применить полиномиальные алгоритмы ЛП [53, 54, 60, 62]. Существует много работ, посвященных тотально унимодулярным матрицам и целочисленным полиэдрам, обзор данных работ можно найти в [66, 67].

Самым общим, на текущий момент, результатом является результат работы [17]. В данной работе была доказана справедливость первого варианта гипотезы при дополнительном условии, что матрица A не имеет вырожденных подматриц рангового порядка. Разумеется, приведенный результат не может претендовать на всеобщность, так как существуют задачи комбинаторной оптимизации, в которых количество вырожденных подматриц рангового порядка может быть экспоненциально большим.

Очень интересным является случай, когда матрица A является 2-

ограниченной или бимодулярной. В работе [71] были доказаны удивительные свойства полиэдров в задачах ЦЛП с этими матрицами. Также была доказана справедливость второго, и следовательно, третьего вариантов гипотезы об ограниченных минорах для этого случая. Приведем основные результаты работы [71].

Теорема 1.1.12 *Пусть $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{Z}^n$ и $P = P(A, b)$. Тогда справедливо каждое из следующих утверждений:*

1. Если $\dim(P) = n$, то $P \cap \mathbb{Z}^n \neq \emptyset$. Соответствующая целая точка может быть найдена за полиномиальное время.

2. Существует полиномиальный алгоритм проверки непустоты множества $P \cap \mathbb{Z}^n$.

3. Для каждой строчки $A_{i\,*}$ матрицы A задача $\max\limits_{x \in P \cap \mathbb{Z}^n} A_{i\,*}^\top x$ может быть решена за полиномиальное время.

4. Для каждой вершины $v \in \operatorname{vert}(P_I)$ существует такая вершина $u \in P$, что v лежит на ребре, исходящем из u. Иными словами, все вершины выпуклой оболочки целых точек исходного полиэдра лежат на ребрах этого полиэдра.

5. Если все подматрицы рангового порядка являются невырожденными матрицами, то задача $\max\limits_{x \in P \cap \mathbb{Z}^n} c^\top x$ может быть решена за полиномиальное время.

Утверждение под номером 5 является частным случаем более общего результата [17]. Утверждение 2 напрямую влечет справедливость второго, а значит и третьего вариантов гипотезы. Наиболее важным, на наш взгляд, является утверждение под номером 4. А именно, оно приводит к следующей вычислительной процедуре. Для решения задачи $\max\limits_{x \in P \cap \mathbb{Z}^n} c^\top x$ сначала решим релаксированную ЛП-задачу $\max\limits_{x \in P} c^\top x$. Найдя оптимальную вершину ЛП-задачи, рассмотрим ребра, выходящие из нее. Оптимальная целочисленная вершина исходной задачи должна находится на одном из этих ребер (подробности раскрыты в оригинальной статье [71]). Таким образом, если каждая вершина исходного многогранника имеет количество ребер, ограниченное некоторым полиномом от размерности задачи и длины входа, то исходная ЦЛП-задача имеет полиномиальный алгоритм решения.

К сожалению, существуют примеры полиэдров ЦЛП-задач с бимодулярными матрицами ограничений и экспоненциальным числом ребер, исходящих из некоторой вершины. Приведем самый простой из них.

Рассмотрим стандартный единичный куб $D = \operatorname{conv.hull}(\{0,1\}^n)$. Очевидно, представление D в виде системы неравенств есть $\begin{cases} I_n x \leqslant j_n, \\ -I_n x \leqslant o_n. \end{cases}$ Построим гомогенизацию $H(D)$ для D (см. текст перед леммой 1.1.3). Нетрудно видеть, что $H(D) = P(A_D, \mathbf{0})$, где матрица A_D построена следующим образом: $A_D = \begin{pmatrix} -j_n & I_n \\ o_n & -I_n \end{pmatrix}$. Нетрудно видеть, что данная матрица тотально унимодулярна, а число ребер многогранного конуса $H(D)$ равно 2^n. Далее домножим некоторый столбец матрицы A_D на 2, полученную матрицу обозначим через A'_D. Так как такое домножение может быть достигнуто с помощью простого линейного преобразования, не меняющего комбинаторной структуры $H(D) = P(A_D, \mathbf{0})$, то полученный многогранный конус $P(A'_D, \mathbf{0})$ имеет такое же количество ребер. Таким образом, мы получили конус с 2^n ребрами, заданный бимодулярной матрицей ограничений.

Утверждения теоремы 1.1.12 неверны для k-ограниченных матриц со значениями параметра $k \geqslant 3$. Существуют соответствующие примеры. Но справедливость утверждений 1 и 2 можно сохранить, если потребовать дополнительно, чтобы полиэдр P имел достаточную ширину. Эти результаты приводятся в работах [42, 44] и будут изложены в данной главе.

Следующий результат работы В. Е. Алексеева и Д. В. Захаровой [1] касается матриц инцидентности обыкновенных графов. Он утверждает справедливость третьей гипотезы для $\{0,1\}$-входов, у которых в каждой строчке не более двух единиц.

Теорема 1.1.13 *Пусть матрица $A \in \{0,1\}^{m \times n}$ является k-ограниченной* *и имеет не более двух единиц в каждой строке, пусть также* $c \in \{0,1\}^n$ *и* $b \in \{0,1\}^m$. *Тогда задача* $\max\{c^\top x : Ax \leqslant b,\, x \geqslant \mathbf{0}\}$ *может быть решена за полиномиальное время для любого фиксированного* k.

Пока не известно, как обобщить упомянутый результат на случай $\{0,1\}$-матриц с большим числом единиц. В третьей главе настоящей диссертации мы рассматриваем естественные линейные $\{0,1\}$-формулировки трех классических задач на графах и доказываем гипотезу ограниченных миноров для соответствующих многогранников.

В дальнейшем нам также понадобится классическая теорема двойственности в ЛП (см., например, [15, 48, 49, 66]):

Теорема 1.1.14 *Пусть* $A \in \mathbb{Z}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{Z}^m$ *и* $c \in \mathbb{Z}^n$. *Тогда*

$$\max_{x \in P(A,b)} c^\top x = \min\{b^\top y : A^\top y = c,\, y \geqslant \mathbf{0}\}.$$

1.2 Аналоги теоремы А. Хинчина и их приложения

В этом разделе приводятся новые результаты, принадлежащие автору диссертации. Эти результаты опубликованы в работах [42, 44]. Во втором параграфе будет сформулирован аналог теоремы А. Хинчина для произвольных полиэдров. В третьем параграфе аналогичная, но более сильная теорема, будет сформулирована для симплексов. В обоих параграфах предлагаются полиномиальные алгоритмы вычисления внутренней целой точки широких полиэдров.

1.2.1 Ширина полиэдра и теорема А. Хинчина

Напомним понятие ширины выпуклого тела P. Под *выпуклым телом* понимается замкнутое, выпуклое и непустое подмножество точек из $\mathbb{R}^n$. Под *шириной выпуклого тела* P *по направлению* $c \in \mathbb{Z}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ понимается величина

$$\mathrm{width}_c(P) = \max_{x \in P} c^\top x - \min_{x \in P} c^\top x.$$

Под *шириной выпуклого тела* P понимается величина

$$\mathrm{width}(P) = \min_{c \in \mathbb{Z}^n \setminus \{\mathbf{0}\}} \mathrm{width}_c(P).$$

Заметим, что для неограниченного выпуклого тела P величина $\mathrm{width}(P)$ может быть не определена, так как возможно, что по любому из направлений $c \in \mathbb{Z}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ один из функционалов $c^\top x$ или $-c^\top x$ может быть неограничен.

Нетрудно видеть, что если $\mathrm{width}(P) > 0$, то $\dim(P) = n$. Также значение $\mathrm{width}(P)$ является инвариантом тела P относительно унимодулярных преобразований.

Приведем классическую теорему А. Хинчина [11]. Пусть P — выпуклое тело в $\mathbb{R}^n$. Теорема А. Хинчина утверждает, что если $P \cap \mathbb{Z}^n = \emptyset$ и величина $\mathrm{width}(P)$ определена, то $\mathrm{width}(P) \leqslant f(n)$, где величина $f(n)$ зависит только от размерности. Имеется множество оценок на величину $f(n)$ (см. работы [18, 19, 45, 65]). В следующей таблице мы приведем историю улучшений оценок $f(n)$.

Author	$f(n)$ upper bound
Khinchine'48	$O((n+1)!)$
Babai'86	$O(2^{O(n)})$
Lenstra-Lagarias-Schnorr'87	$O(n^{5/2})$
Kannan-Lovasz'88	$O(n^2)$
Banaszczyk et al'99	$O(n^{3/2})$
Rudelson'00	$O(n^{\frac{4}{3}}(1+\log n)^c)$

Таблица 1: Оценки на ширину выпуклого тела в $\mathbb{R}^n$ без целых точек.

Для симплексов наилучшей, на текущий момент, оценкой является оценка $f(n) = O(n \, \log n)$ из работы [19].

В следующей таблице мы приведем историю улучшений оценки на $f(n)$ для симметричных выпуклых тел.

Author	$f(n)$ upper bound
Khinchine'48	$O(n!)$
Babai'86	$O(2^{O(n)})$
Kannan-Lovasz'88	$O(n^2)$
Banaszczyk'93	$O(n^{3/2})$
Banaszczyk'96	$O(n \log n)$

Таблица 2: Оценки на ширину симметричного выпуклого тела в $\mathbb{R}^n$ без целых точек.

Для эллипсов $f(n) = O(n)$, как было доказано в работе [18].

Существует гипотеза, утверждающая, что $f(n) = \Theta(n)$ (см., например, [45, 68]). Хорошо известно (см., например, [68]), что $f(n) = \Omega(n)$, оценка достигается на симплексе следующего вида

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} x_i \leqslant n - \epsilon/2,\, x_i \geqslant \epsilon/2\}.$$

Данный симплекс не имеет целых точек и его ширина равна $n - \epsilon$. Ширине симплексов посвящены работы [45, 52, 68] и др. Очень хорошее введение и обзор данной тематики содержатся в работах [27, 34].

На текущий момент наилучшей оценкой величины $f(n)$ является оценка $f(n) = O(n^{\frac{4}{3}}(1 + \log n)^c)$ из работы М. Рудельсона [65], где c — некоторая константа, не зависящая от размерности.

В дальнейшем нас будет интересовать только случай, когда выпуклое тело P является полиэдром $P = P(A, b)$ для некоторой целочисленной матрицы A и некоторого целочисленного вектора b. Оказывается, что если матрица A является k-ограниченной, то $f(n)$ можно оценить как $f(n) \leqslant C_k n$, где C_k — константа, зависящая только от k. Более того, если $\operatorname{width}(P) > C_k n$, то целая точка внутри P может быть найдена за полиномиальное время. Заметим, что многие известные результаты не дают алгоритма, а тем более эффективного, для поиска целой точки внутри P в случае нарушения условия $\operatorname{width}(P) \leqslant f(n)$.

Если же полиэдр P является симплексом, то в оценке на величину $f(n)$ можно избавиться от явной зависимости от размерности, т. е. оценка приобретает вид $f(n) \leqslant k$, где k определяется минорными характеристиками[1] матрицы ограничений P.

1.2.2 Эффективный аналог теоремы А. Хинчина для полиэдров

Целью данного параграфа является доказательство следующей теоремы:

Теорема 1.2.1 *Пусть $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{Z}^m$ и $P = P(A, b)$ — политоп. Если*

$$\operatorname{width}(P) > (\varDelta_{\text{lcm}}(A) - 1)\frac{\varDelta(A)}{\varDelta_{\text{gcd}}(A)}(n+1),$$

то $|P \cap \mathbb{Z}^n| \geqslant n + 1$. Также, в этом случае некоторая целая точка множества $P \cap \mathbb{Z}^n$ может быть найдена за полиномиальное время.

Данная теорема имеет два тривиальных следствия:

Следствие 1.2.1 *Пусть $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{Z}^m$, $P = P(A, b)$ и матрица A является k-модулярной матрицей. Если*

$$\operatorname{width}(P) > (\varDelta(A) - 1)\frac{\varDelta(A)}{\delta(A)}(n+1),$$

то $|P \cap \mathbb{Z}^n| \geqslant n + 1$. Также, в этом случае некоторая целая точка множества $P \cap \mathbb{Z}^n$ может быть найдена за полиномиальное время.

Следствие 1.2.2 *Пусть $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{Z}^m$, $P = P(A, b)$ и каждый минор рангового порядка матрицы A принимает значения $\pm\varDelta(A)$ или 0. Если*

$$\operatorname{width}(P) > (\varDelta(A) - 1)(n+1),$$

то $|P \cap \mathbb{Z}^n| \geqslant n + 1$. Также, в этом случае некоторая целая точка множества $P \cap \mathbb{Z}^n$ может быть найдена за полиномиальное время.

Для доказательства теоремы 1.2.1 нам потребуется несколько лемм.

Лемма 1.2.1 *Пусть* $B \in \mathbb{Z}^{n \times s}$,

$$M = (\operatorname{cone.hull}(B) \cap \mathbb{Z}^n) \setminus \{\mathbf{0}\}$$

и $x^* = \arg\min\limits_{x \in M} c^\top x$. *Тогда* $x^* \in \operatorname{conv.hull}((\mathbf{0}\, B))$.

Доказательство. Предположим, что $c^\top B_{*\,k} = \min\limits_i c^\top B_{*\,i}$ и

$$x^* = Bt \notin \operatorname{conv.hull}((\mathbf{0}\, B)),$$

тогда $t_1 + \cdots + t_s > 1$. Таким образом,

$$c^\top x^* = c^\top Bt \geqslant (t_1 + \cdots + t_s) c^\top B_{*\,k} > c^\top B_{*\,k}.$$

Данное неравенство противоречит оптимальности x^*. ■

Лемма 1.2.2 *Пусть* $P = P(A, b)$, $P' = P(A, b')$ *— непустые полиэдры и величины* $\operatorname{width}(P)$, $\operatorname{width}(P')$ *определены. Тогда,*

$$|\operatorname{width}(P) - \operatorname{width}(P')| \leqslant \frac{\Delta(A)}{\Delta_{\gcd}(A)} (n+1) ||b - b'||_\infty.$$

Доказательство. По определению,

$$\operatorname{width}(P) = \min_{c \in \mathbb{Z}^n \setminus \{\mathbf{0}\}} (\max_{x \in P} c^\top x - \min_{x \in P} c^\top x).$$

По теореме двойственности ЛП (теореме 1.1.14), верны следующие равенства:

$$\max_{x \in P} c^\top x = \min\{b^\top x : A^\top x = c,\ x \geqslant \mathbf{0}\},$$
$$\min_{x \in P} c^\top x = -\min\{b^\top x : -A^\top x = c,\ x \geqslant \mathbf{0}\}.$$

Таким образом,

$$\operatorname{width}(P) = \min\{b^\top (y+z) : A^\top (y+z) = \mathbf{0},\ y \geqslant \mathbf{0},\ z \geqslant \mathbf{0},\ A^\top y \in \mathbb{Z}^n \setminus \{\mathbf{0}\}\}.$$

Рассмотрим конус

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2m} : A^\top (y+z) = \mathbf{0},\ \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \geqslant \mathbf{0} \right\}.$$

Из уравнения $A^\top (y+z) = \mathbf{0}$, правила Крамера и теоремы 1.1.11 следует, что остов C состоит из векторов с координатами, принимающими значения из множества всех миноров рангового порядка матрицы A. Таким образом, максимальная по абсолютному значению координата векторов остова не превосходит $\varDelta(A)$. Данное значение может быть уменьшено, оставаясь целым, за счет деления на $\varDelta_{\text{gcd}}(A)$, так как векторы остова конуса инвариантны относительно умножения на положительные константы. По теореме Каратеодори (теореме 1.1.1), каждый вектор остова содержит не более $n+1$ ненулевых координат. Таким образом, по лемме 1.2.1, существуют такие y, z, что $\operatorname{width}(P) = b^\top (y+z)$ и

$$\sum_{i=1}^{m} (y_i + z_i) \leqslant \frac{\varDelta(A)}{\varDelta_{\text{gcd}}(A)} (n+1).$$

Аналогично, мы можем показать, что $\operatorname{width}(P') = {b'}^\top (y' + z')$ и

$$\sum_{i=1}^{m} (y'_i + z'_i) \leqslant \frac{\varDelta(A)}{\varDelta_{\text{gcd}}(A)} (n+1).$$

Предположим для ясности, что $\operatorname{width}(P) \geqslant \operatorname{width}(P')$. Тогда верна следующая цепочка неравенств

$$\begin{aligned} |\operatorname{width}(P) - \operatorname{width}(P')| &= b^\top (y+z) - {b'}^\top (y'+z') \leqslant \\ &\leqslant b^\top (y'+z') - {b'}^\top (y'+z') = (b-b')^\top (y'+z') \leqslant \\ &\leqslant ||b-b'||_\infty \, || \binom{y'}{z'} ||_1 \leqslant \frac{\varDelta(A)}{\varDelta_{\text{gcd}}(A)} (n+1) ||b-b'||_\infty. \end{aligned}$$

■

Теперь, мы имеем все необходимое для доказательства основной теоремы текущего параграфа (теорема 1.2.1).

Доказательство. Рассмотрим вектор $b' \in \mathbb{Z}^m$ такой, что $b'_i = b_i - (b_i \mod \varDelta_{\text{lcm}}(A))$ и $P' = P(A, b')$. Если

$$\operatorname{width}(P) > (\varDelta_{\text{lcm}}(A) - 1) \frac{\varDelta(A)}{\varDelta_{\text{gcd}}(A)} (n+1),$$

то, по лемме 1.2.2, $\operatorname{width}(P') > 0$. Таким образом, $\dim(P') = n$ и все вершины P' целые. Теперь, теорема следует из того, что $P' \subseteq P$.

Задача поиска вершины полиэдра полиномиально разрешима (см., например, [66]). Мы можем использовать этот факт для поиска некоторой вершины полиэдра P'. ■

Замечание 1.2.1 *Заметим, что в формулировке основной теоремы* 1.2.1 *предполагается, что полиэдр P является политопом, то есть P ограничен. На самом деле теорема легко распространяется и на общий случай. Мы вынесли данное рассуждение сюда, чтобы не загромождать доказательство теоремы* 1.2.1.

В действительности, если P — неограниченный полиэдр и величина $\mathrm{width}(P)$ *определена, то в доказательстве ничего не меняется. В противном случае, нетрудно показать, что множество $P \cap \mathbb{Z}^n$ имеет бесконечное множество целых точек, так как P в этом случае содержит в себе некоторый телесный многогранный конус. Данный факт был замечен в самых ранних работах, касающихся данной тематики.*

1.2.3 Эффективный аналог теоремы А. Хинчина для симплексов

В данном параграфе мы повторим некоторые аргументы Р. Гомори (см. [40, 48]), немного модифицируя их для наших целей.

Пусть $A \in \mathbb{Z}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{Z}^{n \times s}$, $b \in \mathbb{Z}^n$ и $|\det(A)| = \Delta > 0$. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} Ax + By = b, \\ x \in \mathbb{Z}^n,\, y \in \mathbb{Z}^s_+. \end{cases} \tag{1.1}$$

Пусть S — нормальная форма Смита матрицы A (см. теорему 1.1.5), тогда $A = P^{-1} S Q^{-1}$, где P^{-1}, Q^{-1} — квадратные унимодулярные матрицы. Система (1.1) переходит в систему

$$\begin{cases} SQ^{-1}x + PBy = Pb, \\ x \in \mathbb{Z}^n,\, y \in \mathbb{Z}^s_+. \end{cases}$$

После унимодулярного отображения $Q^{-1}x \to x$ и удаления переменных x, система переходит в систему

$$\begin{cases} PBy \equiv Pb \pmod{S}, \\ y \in \mathbb{Z}^s_+. \end{cases} \tag{1.2}$$

Биекция между переменными x и y задается формулой $x = A^{-1}(b - By)$.

Пусть $M(A, B, b)$ — множество решений системы (1.2).

Следующее определение принадлежит Р. Гомори (см. [40, 48]).

Пусть $y \in M(A, B, b)$. То есть, $PBy \equiv Pb \,(\mathrm{mod}\, S)$. Точка y называется *неприводимой* точкой множества $M(A, B, b)$, если для любых $u \neq v$, таких что $u \leqslant y$ и $v \leqslant y$, верно $PBu \not\equiv PBv \,(\mathrm{mod}\, S)$.

Теорема 1.2.2 (Р. Гомори) *Столбцы матрицы PB порождают аддитивную группу, групповой операцией служит сложение по модулю S. Порядок данной группы не превосходит $\varDelta$. Если $M(A, B, b) \neq \emptyset$, то для y — неприводимой точки множества $M(A, B, b)$ верно* $\sum\limits_{i=1}^{s}(1 + y_i) \leqslant \varDelta$.

Доказательство. Легко видеть, что столбцы матрицы PB действительно порождают аддитивную группу. Пусть g — элемент данной группы, тогда $g = PBt \mod S$ для некоторого $t \in \mathbb{Z}_{+}^{s}$. Таким образом, $0 \leqslant g_k \leqslant S_{k\,k}$ для $1 \leqslant k \leqslant n$. Следовательно, общее количество групповых элементов не превосходит $\prod\limits_{k=1}^{n} S_{k\,k} = \varDelta$.

Пусть y — неприводимая точка множества $M(A, B, y)$ и $t \leqslant y$. Из определения неприводимости y следует, что все групповые элементы $g = PBt \mod S$ являются различными для разных t. Так как общее число различных комбинаций для t равно $\prod\limits_{k=1}^{s}(1 + y_k)$ и количество различных групповых элементов не превосходит $\varDelta$, то $\prod\limits_{k=1}^{s}(1 + y_k) \leqslant \varDelta$. ∎

Теорема 1.2.3 (Р. Гомори) *Пусть $y \in \mathrm{vert}(\mathrm{conv.\,hull}(M(A, B, b)))$, тогда y — неприводимая точка множества $M(A, B, b)$.*

Следствие 1.2.3 (Р. Гомори) *Пусть $y \in \mathrm{vert}(\mathrm{conv.\,hull}(M(A, B, b)))$, тогда* $\prod\limits_{k=1}^{s}(1 + y_k) \leqslant \varDelta$.

Следующая лемма принадлежит автору диссертации.

Лемма 1.2.3 *Существует полиномиальный алгоритм для поиска точки $y \in M(A, I_n, b)$ со свойством* $\sum\limits_{k=1}^{s} y_k \leqslant \varDelta - 1$.

Доказательство. Система для $M(A, I_n, b)$ имеет достаточно простую структуру:

$$\begin{cases} Py \equiv Pb \,(\mathrm{mod}\, S), \\ y \in \mathbb{Z}^n_+. \end{cases}$$

Откуда, $y = b + P^{-1}St$ для различных $t \in \mathbb{Z}^n$. Пусть $P^{-1}S = HQ$, где H — нормальная Эрмитова форма матрицы $P^{-1}S$ (см. теорему 1.1.3), а Q — унимодулярная матрица. Тогда $y = b + Ht$ для различных $t \in \mathbb{Z}^n$. Нетрудно видеть, что мы можем выбрать $y_k \leqslant H_{k\,k} - 1$.

Таким образом, мы умеем строить вектор $y \in M(A, I, b)$ со свойством $\prod\limits_{k=1}^{n} y_k \leqslant \prod\limits_{k=1}^{n} (H_{k\,k} - 1)$. Мы знаем, что $\prod\limits_{k=1}^{n} H_{k\,k} = \varDelta$ и что максимум суммы $\sum\limits_{k=1}^{n} H_{k\,k}$, который равен $\varDelta + n - 1$, достигается, когда $H_{k\,k} = 1$ для $1 \leqslant k \leqslant n - 1$ и $H_{n\,n} = \varDelta$. Следовательно, максимальное значение суммы $\sum\limits_{k=1}^{n} (H_{k\,k} - 1)$ равно $\varDelta - 1$.

Для завершения доказательства заметим, что задачи вычисления нормальных форм Эрмита и Смита являются полиномиально разрешимыми (см. замечание 1.1.2). ■

Теперь мы можем доказать основную теорему данного параграфа.

Теорема 1.2.4 *Пусть* $A \in \mathbb{Z}^{(n+1)\times n}$, $b \in \mathbb{Z}^n$ *и* $P = P(A, b)$ — *симплекс. Если* $\mathrm{width}(P) \geqslant \delta(A) - 1$, *то* $P \cap \mathbb{Z}^n \neq \emptyset$. *Существует полиномиальный алгоритм, вычисляющий некоторую точку множества* $P \cap \mathbb{Z}^n$.

Доказательство. Предположим, что $\delta(A) > 1$ (случай $\delta(A) = 1$ тривиален). Пусть система $\hat{A}x \leqslant \hat{b}$ является подсистемой системы $Ax \leqslant b$, где $\hat{A} \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ и $\hat{b} \in \mathbb{Z}^n$ такие, что $|\det(\hat{A})| = \delta(A)$. Пусть $C = \{x \in \mathbb{R}^n : \hat{A}x \leqslant \hat{b}\}$, тогда $P \subset C$. Пусть $v \in \mathbb{Q}^n$ — вершина P такая, что $\hat{A}v = \hat{b}$, откуда $v = \hat{A}^{-1}b$.

Пусть $B = -(\delta(A) - 1)\hat{A}^{-1}$, тогда из замечания 1.1.8 следует, что $C = v + \mathrm{cone.\,hull}(B)$. Более того, столбцы матрицы B, отложенные от вершины v, представляют собой ребра сдвинутого многогранного конуса C. Пусть $S = v + \mathrm{conv.\,hull}((\mathbf{0}\, B))$, откуда $S \subset C$.

Из теоремы 1.1.11 следует, что $n+1$ строка системы $Ax \leqslant b$ соответствуют $n+1$ фасетам симплекса P следующим образом: если F — фасета P, то $F = P \cap \{x : A_{k\,*}x = b_k\}$, где $\{k\} = J(F)$.

Пусть $F_1, F_2, \ldots, F_n$ — фасеты, соответствующие строчкам системы $\hat{A}x \leqslant \hat{b}$, и пусть F_{n+1} — оставшаяся фасета, соответствующая той строчке системы $Ax \leqslant b$, которая не вошла в систему $\hat{A}x \leqslant \hat{b}$.

Сначала мы докажем, что $S \cap \mathbb{Z}^n \neq \emptyset$. Множество $C \cap \mathbb{Z}^n$ порождено следующими эквивалентными системами:

$$\begin{cases} \hat{A}x \leqslant \hat{b}, \\ x \in \mathbb{Z}^n, \end{cases} \qquad \begin{cases} \hat{A}x + y = \hat{b}, \\ x \in \mathbb{Z}^n,\ y \in \mathbb{Z}^n_+. \end{cases} \tag{1.3}$$

По лемме 1.2.3, существует полиномиальный алгоритм для поиска решения $y^* \in \mathbb{Z}^n_+$ данной системы с дополнительным свойством $\sum\limits_{k=1}^{n} y^*_k \leqslant \delta(A) - 1$. Также, $\exists x^* \in \mathbb{Z}^n$ такая, что $\hat{A}x^* + y^* = \hat{b}$ и $x^* = \hat{A}^{-1}(\hat{b} - y^*)$. Наконец, $x^* = v + B\dfrac{1}{\delta(A)-1}y^*$, что эквивалентно тому, что $x^* \in S$.

Для завершения доказательства нам нужно показать, что $S \subseteq P$. Предположим, что $S \nsubseteq P$. Пусть $g_1, g_2, \ldots, g_n$ — вершины симплекса S, смежные с вершиной v. Если $S \nsubseteq P$, то фасета F_{n+1} симплекса P пересекает некоторое ребро $[v, g_k] \subseteq S$ так, что $[v, g_k] \cap F_{n+1} = \{u\}$, где $u \in \mathrm{vert}(P)$ и $u \neq g_k$. Пусть F_j, где $1 \leqslant j \leqslant n$, является фасетой P, противоположной вершине u, и пусть строка $A_{j\,*}x = b_j$ — строка изначальной системы $Ax \leqslant b$, соответствующая фасете F_j. Тогда,

$$|\max_{x \in P} A_{j\,*}x - \min_{x \in P} A_{j\,*}x| = |b_j - A_{j\,*}u| < |b_j - A_{j\,*}g_k| = \delta(A) - 1.$$

Последнее неравенство противоречит предположению теоремы о том, что $\mathrm{width}(P) \geqslant \delta(A) - 1$. ■

Следствие 1.2.4 *Пусть $A \in \mathbb{Z}^{(n+1)\times n}$, $b \in \mathbb{Z}^n$ и $P = P(A, b)$ — симплекс. Пусть вершина v симплекса P — оптимальное решение ЛП-задачи $\max\limits_{x \in P} c^\top x$ и $\Delta = |\det(A_{J(v)\,*})|$. Если $\mathrm{width}(P) \geqslant \Delta - 1$, то для решения ЦЛП-задачи*

$\max\limits_{x \in P \cap \mathbb{Z}^n} c^\top x$ *существует алгоритм со сложностью* $O(n\varDelta)$.

Доказательство. Мы уже показали в предыдущей теореме, что $S \subseteq P$, где $S = v + \operatorname{conv.hull}((\mathbf{0}\, B))$ и $B = -(\varDelta - 1)A^{-1}_{J(v)\,*}$. Очевидно, $\max\limits_{x \in P \cap \mathbb{Z}^n} c^\top x = \max\limits_{x \in S \cap \mathbb{Z}^n} c^\top x$. Также из теоремы 1.2.3 следует, что все вершины выпуклой оболочки решений системы (1.3) лежат внутри S. Но для систем вида (1.1) или (1.3) существуют замечательные алгоритмы, предложенные Р. Гомори и Т. Ху [40, 48], арифметическая сложность данных алгоритмов не превосходит $O(n\varDelta)$. ■

Следствие 1.2.5 *Пусть* $A \in \mathbb{Z}^{(n+1)\times n}$, $b \in \mathbb{Z}^n$ *и* $P = P(A, b)$ *— симплекс. Если* $\operatorname{width}(P) \geqslant \varDelta(A) - 1$, *то для решения задачи* $\max\limits_{x \in P \cap \mathbb{Z}^n} c^\top x$ *существует алгоритм со сложностью* $O(n\varDelta(A))$.

Глава 2

Задачи ЦЛП и вычисления ширины полиэдра в некоторых классах полиэдров

Вторая глава состоит из двух частей. В первой части приводится новый алгоритм разбиения простого многогранного конуса на унимодулярные конусы. А также, там рассматриваются некоторые классы полиэдров с ограниченными минорами и доказывается разрешимость задачи ЦЛП в этих классах за полиномиальное или субэкспоненциальное время.

Вторая часть посвящена задаче вычисления ширины симплекса. Мы покажем, используя результаты первой части, что задача вычисления ширины симплекса полиномиально разрешима в классе симплексов с ограниченным спектров миноров их матриц ограничений.

Результаты данной главы опубликованы в работе [43].

2.1 ЦЛП для некоторых классов полиэдров с ограниченными минорами

2.1.1 Унимодулярная декомпозиция многогранного конуса

Основным инструментом данной главы является алгоритм разбиения простого многогранного конуса на так называемые унимодулярные конусы.

Доказательство следующей теоремы может быть найдено в монографии

В. Н. Шевченко [14], и очень похожий факт может быть найден в работах А. Барвинка [20, 21].

Теорема 2.1.1 *Пусть* $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ *и* $b = Ay$ *для некоторого* $y \in \mathbb{R}^n$. *Пусть* $J_+ = \{j : x_j > 0\}$ *и* $J_- = \{j : x_j < 0\}$. *Тогда*

$$\operatorname{cone.hull}(A) = \left(\bigcup_{j\in J_-} \operatorname{cone.hull}(A[j,-b])\right) \cap \left(\bigcup_{j\in J_+} \operatorname{cone.hull}(A[j,b])\right),$$

где $A[j,b]$ — *матрица, полученная из матрицы* A *заменой* j*-го столбца на столбец* b.

Множество многогранных конусов $\{C_1, C_2, \ldots, C_s\}$ называется *декомпозицией* многогранного конуса C, если $\bigcup_{i=1}^{s} C_i = C$. Декомпозиция называется *строгой*, если $\dim(C_i \cap C_j) < \dim(C)$ для всех $i \neq j$.

Следствие 2.1.1 *Пусть* $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ *и* $b = Ay$ *для некоторого* $y \in \mathbb{R}^n_+$. *Тогда*

$$\operatorname{cone.hull}(A) = \bigcup_{j\in J_+} \operatorname{cone.hull}(A[j,b])$$

есть строгая декомпозиция конуса $\operatorname{cone.hull}(A)$.

Декомпозиция

$$\operatorname{cone.hull}(A) = \bigcup_{k=1}^{s} \operatorname{cone.hull}(B_k)$$

называется *унимодулярной декомпозицией*, если все матрицы B_k являются унимодулярными. Сами конусы $\operatorname{cone.hull}(B_k)$ называются *унимодулярными* многогранными конусами.

Лемма 2.1.1 *Для любого* k *верно равенство* $\det(A[k,b]) = y_k \det(A)$.

Доказательство. Имеет место цепочка равенств

$$\det(A[k,b]) = \det(A[k,Ay]) = \det(A[k, y_k A_{*k}]) = y_k \det(A).$$

■

Пусть $A \in \mathbb{Z}^{n \times n}$, $|\det(A)| = \Delta > 0$. Пусть $A = PSQ$, где S — нормальная форма Смита матрицы A (см. теорему 1.1.5) и P, Q — унимодулярные матрицы. Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} Ax \equiv \mathbf{0} \,(\bmod\, S_{n\,n}), \\ \mathbf{0} \leqslant x \leqslant (S_{n\,n} - 1)\mathbf{1}, \\ x \in \mathbb{Z}^n. \end{cases} \tag{2.1}$$

Все решения данной системы могут быть найдены по формуле:

$$x = Q^{-1} S^{-1} S_{n\,n} t \mod S_{n\,n}, \text{ где } t \in \mathbb{Z}^n. \tag{2.2}$$

Мы можем использовать решения системы (2.1) для построения строгой унимодулярной декомпозиции конуса $\operatorname{cone.hull}(A)$. Для этого мы должны найти какое-либо ненулевое решение x системы (2.1) и положить $b = A\dfrac{x}{S_{n\,n}}$. Используя следствие 2.1.1, мы можем получить строгую декомпозицию

$$\operatorname{cone.hull}(A) = \bigcup_{j \in J_+} \operatorname{cone.hull}(A[j, b]).$$

По лемме 2.1.1, получаем, что $|\det(A[j, b])| = \dfrac{x_j}{S_{n\,n}} \Delta < \Delta$. Таким образом, мы можем использовать рекурсию, основанную на уменьшении определителей возникающих матриц. Общее количество полученных унимодулярных конусов не будет превосходить величины n^{Δ}.

Очень эффективный алгоритм для унимодулярной декомпозиции, названный *знаковая декомпозиция*, приведен в работах А. Барвинка [20, 21], но для наших целей нужна декомпозиция, использующая только положительные коэффициенты.

Мы будем следовать алгоритму, предложенному А.Ю. Чирковым. Данный алгоритм строит нестрогую унимодулярную декомпозицию конуса $\operatorname{cone.hull}(A)$ на не более чем $n^{2\log_2(\Delta)}$ унимодулярных конусов. Алгоритм упомянут в монографии [14] и был опубликован в [43].

Теорема 2.1.2 *Пусть* $A, B, C \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $|\det(A)| = \Delta > 0$ *и* $B = AC$, *где* $0 \leqslant C_{i\,j} \leqslant C_{i\,i}$ *для всех* $i, j \in \{1, \dots, n\}$. *Пусть* $I = \{i : C_{i\,i} > 0\}$. *Если* $I \neq \emptyset$, *то*

$$\operatorname{cone.hull}(A) = \bigcup_{i \in I} \operatorname{cone.hull}(A[i, B_{*\,i}]).$$

Доказательство. По следствию 2.1.1, верно включение

$$\operatorname{cone.hull}(A[j, B_{*\,j}]) \subseteq \operatorname{cone.hull}(A).$$

Предположим, что $x \in \operatorname{cone.hull}(A)$. Тогда $x = At$ для некоторого $t \in \mathbb{Z}^n_+$. Пусть $t_k / C_{k\,k} = \max\limits_{C_{j\,j} \neq 0} t_j / C_{j\,j}$. Тогда

$$x = t_k / C_{k\,k} B_{*\,k} + \sum_{j \neq k} (t_j - t_k C_{j\,k} / C_{k\,k}) A_{*\,j}.$$

Из того, что

$$(t_j - t_k C_{j\,k} / C_{k\,k}) \geqslant (t_j - t_k C_{j\,j} / C_{k\,k}) \geqslant 0,$$

следует $x \in \operatorname{cone.hull}(A[k, B_{*\,k}])$. ■

Теорема 2.1.3 *Пусть* $A \in \mathbb{Z}^{n \times n}$, $|\det(A)| = \Delta > 0$. *Существует алгоритм, строящий целочисленные, унимодулярные матрицы* $B^{(j)}$, *где* $j \in \{1, \dots, s\}$, *такие, что*

$$\operatorname{cone.hull}(A) = \bigcup_{j=1}^{s} \operatorname{cone.hull}(B^{(j)}).$$

Для количества унимодулярных конусов в декомпозиции справедлива оценка $s \leqslant n^{2 \log_2(\Delta)}$. *Алгоритм является полиномиальным при ограниченном* Δ.

Доказательство. Сначала предположим, что Δ является четным. Пусть q — решение системы (2.1) такое, что как минимум одна компонента q нечетная. Например, используя формулу (2.2), мы можем положить $q = (Q^{-1})_{*\,n}$. Столбец $(Q^{-1})_{*\,n}$ должен содержать нечетную компоненту, потому что он является столбцом унимодулярной матрицы Q^{-1}.

Рассмотрим вектор $q' = \dfrac{S_{n\,n}}{2} q \mod S_{n\,n}$. Если компонента q_i четная, то $q'_i = 0$. Если же компонента q_i нечетная, то $q'_i = S_{n\,n}/2$. Следовательно, q' — ненулевое решение системы (2.1) со свойством $\mathbf{0} \leqslant q' \leqslant (S_{n\,n}/2)\mathbf{1}$. Таким образом, мы можем использовать следствие 2.1.1, положив $b = A\dfrac{q'}{S_{n\,n}}$ для получения декомпозиции

$$\operatorname{cone.hull}(A) = \bigcup_{j \in J_+} \operatorname{cone.hull}(A[j, b]).$$

По лемме 2.1.1, если $q'_j = 0$, то $|\det(A[j, b])| = 0$ и если $q' = S_{n\,n}/2$, то $|\det(A[j, b])| = \varDelta/2$.

Предположим теперь, что $\varDelta$ не является четным. Пусть x — некоторое ненулевое решение системы (2.1). Введем в рассмотрение вектора $y^{(k)} \in \mathbb{Z}^n_+$ для $k \in \{1, \ldots, n\}$. Компоненты векторов $y^{(k)}$ определяются следующим образом: $y^{(k)}_i = \lambda_k x_i \mod S_{n\,n}$, где λ_k — решение сравнения $\lambda_k x_k \equiv -\gcd(S_{n\,n}, x_k) \pmod{S_{n\,n}}$. Рассмотрим матрицу $C \in \mathbb{Q}^{n \times n}$ такую, что $C_{*\,k} = y^{(k)}/\varDelta$. Из определения $y^{(k)}_i$, следует $\gcd(S_{n\,n}, x_i) \mid y^{(k)}_i$. Максимальное число $y^{(k)}_i$ такого типа равно $y^{(i)}_i = S_{n\,n} - \gcd(S_{n\,n}, x_i)$. Так как $C_{i\,k} = y^{(k)}_i/\varDelta$, то $0 \leqslant C_{i\,k} \leqslant C_{i\,i}$ для всех $i, k \in \{1, \ldots, n\}$. Более того,

$$|\det(A[k, B_{*\,k}])| = y^{(k)}_k = S_{n\,n} - \gcd(S_{n\,n}, x_k),$$

что является четным числом. Таким образом, мы можем использовать теорему 2.1.2, используя матрицу $B = AC$, для получения декомпозиции

$$\operatorname{cone.hull}(A) = \bigcup_{i \in I} \operatorname{cone.hull}(A[i, B_{*\,i}]),$$

где $I = \{i : C_{i\,i} > 0\}$. После данного шага определители построенных матриц будут четными, и мы сможем провести шаг декомпозиции для четного случая.

Нетрудно видеть, что общее число рекурсивных вызовов не превосходит $2\log_2(\varDelta)$. Следовательно, общее число унимодулярных конусов в декомпозиции не превосходит $n^{2\log_2(\varDelta)}$. Более того, все промежуточные процедуры алгоритма имеют полиномиальные оценки сложностей. ■

Теорема 2.1.4 *Пусть* $\operatorname{cone.hull}(A) = \bigcup\limits_{i=1}^{s} cone(B^{(j)})$ *— унимодулярная декомпозиция* $\operatorname{cone.hull}(A)$, *построенная алгоритмом после* $k \geqslant 1$ *шагов.*

Пусть b — некоторый столбец матрицы $B^{(j)}$ для некоторого j и $b = At$ для $t \in \mathbb{Q}^n_+$. Тогда $||t||_\infty < 2^{k-1}$.

Доказательство. Доказательство будем проводить индукцией по k. Начнем со значения $k = 1$ и рассмотрим вектор t после первого шага алгоритма. Если b — столбец начальной матрицы A, то, очевидно, $||t||_\infty = 1$. Если b — столбец, полученный алгоритмом на первом шаге, то $||t||_\infty = 1/2$ для четного значения Δ и $||t||_\infty < 1$ для нечетного значения Δ.

Рассмотрим общий случай. Пусть

$$\operatorname{cone.hull}(A) = \bigcup_{j=1}^{m} \operatorname{cone.hull}(A[j, a^{(j)}])$$

есть декомпозиция после первого шага алгоритма, где $a^{(j)} \in \mathbb{Z}^n$ и $1 \leqslant m \leqslant n$. Без потери общности мы можем предположить, что $b \in \operatorname{cone.hull}(A[1, a^{(1)}])$. Следовательно, столбец b был получен применением алгоритма к конусу $\operatorname{cone.hull}(A[1, a^{(1)}])$ за не более чем $k-1$ шагов. Следовательно, существует $y \in \mathbb{Q}^n_+$ такое, что $b = y_1 a^{(1)} + \sum\limits_{j=2}^{n} y_j A_{*\,j}$. Мы знаем, что $a^{(1)} = Az$ для некоторого $z \in \mathbb{Q}^n_+$ и $|z|_\infty < 1$. Таким образом,

$$b = At = z_1 y_1 A_{*\,1} + \sum_{j=2}^{n} (z_j y_1 + y_j) A_{*\,j}.$$

По предположению индукции имеем $||y||_\infty < 2^{k-2}$. Наконец,

$$t_j = \begin{cases} z_1 y_1 < y_1 < 2^{k-2}, \text{ для } j = 1, \\ z_j y_1 + y_j < y_1 + y_j < 2^{k-1}, \text{ для любого } j \in \{2, \dots, n\}. \end{cases}$$

■

Следствие 2.1.2 *Пусть $\{B^{(j)} :\ j \in \{1, 2, \dots, s\}\}$ — унимодулярная декомпозиция из теоремы 2.1.3. Пусть b — столбец некоторой матрицы $B^{(j)}$ и $b = At$ для $t \in \mathbb{Q}^n_+$. Тогда $||t||_\infty \leqslant \Delta^2$.*

Доказательство. Доказательство следует из предыдущей теоремы и факта, что число рекурсивных шагов алгоритма не превосходит $2\log_2(\Delta)$. ■

Теорема 2.1.5 *Битовая сложность алгоритма теоремы* 2.1.3 *равна* $O(n^{\omega+2\,\log_2(\Delta)} M(n\,\log(n\alpha\Delta^2)))$*, где* ω *— показатель экспоненты для алгоритмов быстрого умножения матриц,* $\Delta = |\det(A)|$*,* $\alpha = \max\{|A_{i\,j}|\}$ *и* $M(t)$ *— сложность перемножения двух* t*-битовых целых чисел.*

Доказательство. Наиболее сложной частью k-ого шага алгоритма является вычисление нормальных форм Смита. В работах А. Сторжохана [69, 73] показано, что трудоемкость вычисления нормальной формы Смита для $n \times n$ матрицы A равна $O(n^\omega M(n \log \alpha))$. Пусть

$$\operatorname{cone.hull}(A) = \bigcup_{i=1}^{s} \operatorname{cone.hull}(B^{(i)})$$

есть декомпозиция, которая была получена после k шагов алгоритма. Мы знаем, что $s \leqslant n^k$ и $B^{(k)} = AT^{(k)}$ для матрицы $T^{(k)}$ такой, что $0 \leqslant T^{(k)}_{i\,j} \leqslant 2^{k-1}$. Следовательно, $||B^{(k)}||_\infty \leqslant n\alpha 2^{k-1}$. Откуда следует, что общая трудоемкость k-го шага равна $O(n^{k-1} n^\omega M(n\,\log(n\alpha 2^{k-1})))$. Наконец, общая трудоемкость алгоритма равна

$$\sum_{k=1}^{s} O(n^{k-1} n^\omega M(n\,\log(n\alpha 2^{k-1}))) = O(n^{\omega+2\,\log_2(\Delta)} M(n\,\log(n\alpha\Delta^2))).$$

■

2.1.2 Специальный класс полиэдров

Далее мы рассмотрим специальный класс полиэдров с ограниченным спектром миноров, для которого задача ЦЛП полиномиально разрешима.

Рассмотрим следующие утверждения, которые мотивируют рассмотрение данного класса.

Лемма 2.1.2 *Пусть* $p \in \mathbb{Z}^n$*,* $B \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ *и* $\det(B) \neq 0$*. Пусть* $A \in \mathbb{Z}^{m\times n}$*,* $b \in \mathbb{Z}^n$ *и для каждого* $i \in \{1, \ldots, m\}$ *верно*

$$(A_{i\,*})^\top \in \operatorname{cone.hull}((B^{-1})^\top).$$

Тогда, утверждение

$$P(A, b) \cap (p + \operatorname{cone.hull}(B)) \cap \mathbb{Z}^n \neq \emptyset$$

верно тогда и только тогда, когда $p \in P(A, b)$.

Доказательство. Если $p \notin P(A, b)$, то существует такое $i \in \{1, \dots, m\}$, что $A_{i\,*}p > b_i$. Для каждого $x \in (p + \operatorname{cone.hull}(B)) \cap \mathbb{Z}^n$ верно равенство $A_{i\,*}x = A_{i\,*}p + A_{i\,*}c$, где $c \in \operatorname{cone.hull}(B)$. Из того, что $(A_{i\,*})^\top \in \operatorname{cone.hull}((B^{-1})^\top)$, следует $A_{i\,*} = t^\top B^{-1}$ для некоторого $t \in \mathbb{Q}^n_+$. Так как $A_{i\,*}p > b_i$ и $B^{-1}c > \mathbf{0}$, то верно $A_{i\,*}x > b_i$. ■

Лемма 2.1.3 *Пусть* $C \in \mathbb{Z}^{n \times n}$, $p \in \mathbb{Q}^n$, $|\det(C)| = \Delta > 0$. *Пусть* $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{Z}^n$, $c \in \mathbb{Z}^n$ *и для каждого* $i \in \{1, \dots, m\}$ *верно*

$$(A_{i\,*})^\top \in \operatorname{cone.hull}((C^{-1})^\top)$$

и $c \in \operatorname{cone.hull}((C^{-1})^\top)$. *Тогда, при ограниченном* Δ, *для решения задачи*

$$\max\{c^\top x : x \in P(A, b) \cap (p + \operatorname{cone.hull}(C)) \cap \mathbb{Z}^n\}$$

существует полиномиальный алгоритм. Верхняя оценка трудоемкости данного алгоритма совпадает с верхней оценкой трудоемкости алгоритма из теоремы 2.1.5.

Доказательство. Пусть $\bigcup\limits_{i=1}^{s} \operatorname{cone.hull}(B^{(i)})$ — унимодулярная декомпозиция конуса $\operatorname{cone.hull}(C)$ из теоремы 2.1.3, где $B^{(i)} \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ — унимодулярные матрицы и $s \leqslant n^{2\log_2(\Delta)}$. Следовательно (см. замечание 1.1.8),

$$\operatorname{cone.hull}(B^{(i)}) = P(-(B^{(i)})^{-1}, \mathbf{0})$$

и

$$p + \operatorname{cone.hull}(C) = \bigcup_{i=1}^{s} P(-(B^{(i)})^{-1}, -(B^{(i)})^{-1} p).$$

Более того,

$$(p + \operatorname{cone.hull}(C)) \cap \mathbb{Z}^n = \bigcup_{i=1}^{s} P(-(B^{(i)})^{-1}, -\sigma^{(i)}),$$

где $\sigma^{(i)} = \lfloor -(B^{(i)})^{-1} p \rfloor$. Пусть $x^{(i)} = B^{(i)}\sigma^{(i)} \in \mathbb{Z}^n$. Тогда, верно

$$(p + \operatorname{cone.hull}(C)) \cap \mathbb{Z}^n = \bigcup_{i=1}^{s} (x^{(i)} + \operatorname{cone.hull}(B^{(i)})).$$

Наконец, мы должны определить непустоту множеств

$$M^{(i)} = P(A, b) \cap (x^{(i)} + \operatorname{cone.hull}(B^{(i)})) \cap \mathbb{Z}^n$$

для каждого $i \in \{1, \ldots, s\}$. По лемме 2.1.2, это может быть сделано за полиномиальное время проверкой принадлежности $x^{(i)}$ полиэдру $P(A, b)$. Если $M^{(i)}$ не пусто, то $c^\top x^{(i)} = \max\limits_{x \in M^{(i)}} c^\top x$, так как $c \in \operatorname{cone.hull}((C^{-1})^\top)$. Если каждое из данных множеств пусто, то $P(A, b) \cap (p + \operatorname{cone.hull}(C)) \cap \mathbb{Z}^n$ тоже пусто.

Таким образом, наш алгоритм содержит процедуру унимодулярной декомпозиции и s проверок на непустоту для множеств $M^{(i)}$. Нетрудно видеть, что трудоемкость данного алгоритма совпадает с трудоемкостью алгоритма для построения унимодулярной декомпозиции (см. теорему 2.1.3). ■

Следствие 2.1.3 *Пусть $C \in \mathbb{Z}^{n \times n}$, $p \in \mathbb{Q}^n$, $|\det(C)| = \Delta > 0$. Пусть $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{Z}^n$ и для каждого $i \in \{1, \ldots, m\}$ верно $(A_{i\,*})^\top \in \operatorname{cone.hull}((C^{-1})^\top)$. Тогда, при ограниченном Δ, для задачи проверки множества*

$$P(A, b) \cap (p + \operatorname{cone.hull}(C)) \cap \mathbb{Z}^n$$

на непустоту существует полиномиальный алгоритм.

Определим специальный класс полиэдров, задаваемых как

$$P(A, b) \cap (p + \operatorname{cone.hull}(C)),$$

при дополнительном условии, что для каждого $i \in \{1, \ldots, m\}$ верно $(A_{i\,*})^\top \in \operatorname{cone.hull}((C^{-1})^\top)$. Фактически, такого рода полиэдр представляет собой простой многогранный конус, пересеченный совокупностью полупространств $P(A, b)$, при условии, что все вектора противоположные нормалям полупространств, задающих $P(A, b)$, содержатся в конусе нормалей вершины конуса $\operatorname{cone.hull}(C)$.

На рисунке 1 изображен пример многогранника из данного класса. Противоположные вектора нормалей полупространств, соответствующих граням $[B, D]$, $[D, E]$ и $[E, C]$, содержатся в конусе нормалей вершины A

(данные вектора отмечены пунктирными стрелочками, а сами нормали полупространств непрерывными). Нетрудно видеть, что все симплексы и параллелограммы принадлежат рассматриваемому классу.

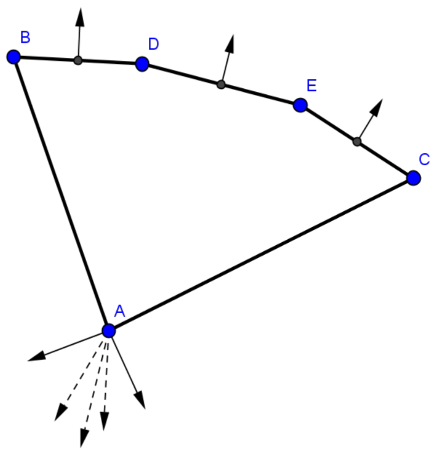

Рис. 1: Представитель класса

Как видно из лемм, приведенных выше, обе задачи ЦЛП решаются за полиномиальное время на данном классе при дополнительном условии k-ограниченности матрицы C.

2.1.3 Постановка задачи ЦЛП через выпуклую оболочку точек

Применим результаты предыдущих параграфов для решения задачи ЦЛП на «усеченных» симплексах, которую определим далее.

Пусть $P = P(A, b)$ — симплекс, где $A \in \mathbb{Z}^{(n+1)\times n}$ и $b \in \mathbb{Z}^{n+1}$. В работах Р. Гомори [40] (см. также [48]) задача определения непустоты множества $P \cap \mathbb{Z}^n$ полиномиально сводится к задаче минимизации на группе, которая, в свою очередь, может быть решена за полиномиальное время, если величина $\Delta(A)$ ограничена. Используя подход динамического программирования, предложенный Х. Пападимитриу [61], задача $\max\limits_{x \in P\cap\mathbb{Z}^n} c^\top x$ также может быть решена за полиномиальное время, если величины $\Delta_1(A\,b)$ и $\Delta(A)$ ограничены. Для этого нам нужно свести исходную систему $Ax \leqslant b$ с $n+1$ неравенством к системе $\begin{cases} By + Cz \leqslant b', \\ y_i \geqslant 0, \end{cases}$ где система $By + Cz \leqslant b'$ имеет только $O(\log_2 \Delta(A))$ неравенств. Данное сведение может быть сделано с помощью нормальной формы Эрмита (см. теорему 1.1.3).

Рассмотрим симплексы, порожденные выпуклыми оболочками целых точек, при дополнительном условии k-ограниченности матриц, составляющих остов симплекса. Заметим, что задача определения наличия целых точек внутри симплекса, исключая его вершины, может быть решена за полиномиальное время (при ограниченном $\Delta(A)$) алгоритмом подсчета количества целых точек, принадлежащим А. Барвинку [20, 21].

Теорема 2.1.6 *Пусть $A \in \mathbb{Z}^{n \times (n+1)}$, $c \in \mathbb{Z}^n$ и $S = \operatorname{conv.hull}(A)$ — симплекс размерности n. Если величина $\Delta(A)$ ограничена, то для задачи*

$$\max\{c^\top x : x \in (S \cap \mathbb{Z}^n) \setminus \operatorname{vert}(S)\}$$

существует субэкспоненциальный от n алгоритм.

Дополнительно, если величина $|\det(\bar{A})|$ ограничена, где $\bar{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1}^\top \\ A \end{pmatrix}$, то для задачи

$$\max\{c^\top x : x \in (S \cap \mathbb{Z}^n) \setminus \operatorname{vert}(S)\}$$

существует полиномиальный алгоритм.

Доказательство. Предположим, что оптимум ЛП-задачи $\max\limits_{x \in S} c^\top x$ достигается на вершине $A_{*\,1}$.

Рассмотрим матрицу

$$B = (A_{*\,2} - A_{*\,1}, A_{*\,3} - A_{*\,1}, \ldots, A_{*\,n+1} - A_{*\,1}).$$

По определению, столбцы матрицы B являются ребрами симплекса, инцидентными вершине $A_{*\,1}$. Существует такое полупространство $H = \{x \in \mathbb{R}^n : a^\top x \leqslant a_0\}$, что

$$P = (A_{*\,1} + \operatorname{cone.hull}(B)) \cap H.$$

Неравенство $a^\top x \leqslant a_0$ может быть найдено за полиномиальное время как неравенство, соответствующее фасете, противоположной вершине A_{*1}. Так как S — симплекс, то $a \in \operatorname{cone.hull}((B^{-1})^\top)$ и $c \in \operatorname{cone.hull}((B^{-1})^\top)$. Наконец, $|\det(B)| \leqslant (n+1)\Delta(A)$ и мы можем применить алгоритм леммы 2.1.3. Сложность алгоритма равна $\tilde{O}(n^{\omega+2\log_2 n+2\log_2 \Delta(A)})$, данная оценка является субэкспоненциальной.

Рассмотрим случай, когда величина $|\det(\bar{A})|$ ограничена. Нетрудно видеть, что $|\det(B)| = |\det(\bar{A})|$. По причинам, описанным выше, сложность алгоритма становится равной $\tilde{O}(n^{\omega+2\log_2 \alpha})$, то есть полиномиальной от n. ■

Замечание 2.1.1 *Рассматривать задачу* $\max\limits_{x \in S \cap \mathbb{Z}^n} c^\top x$ *не имеет смысла, так как максимум достигается на одном из столбцов матрицы A. Поэтому задача была усложнена тем, что из допустимой области задачи были удалены вершины симплекса S. Как было замечено во введении, данная задача является NP-трудной.*

Теперь мы можем сформулировать общий результат, аналогичный результату Х. Пападимитриу [61] для классической постановки задачи ЦЛП, легко следующий из теоремы 2.1.6 при использовании триангуляции политопа $\operatorname{conv.hull}(A)$.

Теорема 2.1.7 *Пусть $A \in \mathbb{Z}^{n\times m}$, $c \in \mathbb{Z}^n$ и $S = \operatorname{conv.hull}(A)$. Если величины $\Delta(A)$ и $k = m - \operatorname{rank}(A)$ ограничены, то для задачи*

$$\max\{c^\top x : x \in (S \cap \mathbb{Z}^n) \setminus \operatorname{vert}(S)\}$$

существует субэкспоненциальный от n алгоритм.

Дополнительно, если величины $\Delta(\bar{A})$ и k ограничены, где $\bar{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1}^\top \\ A \end{pmatrix}$, то для задачи

$$\max\{c^\top x : x \in (S \cap \mathbb{Z}^n) \setminus \operatorname{vert}(S)\}$$

существует полиномиальный алгоритм.

2.2 Эффективное вычисление ширины симплексов с ограниченными минорами

Как известно из работы А. Сёбу [68], задача вычисления ширины полиэдра $P(A, b)$ является NP-трудной уже для симплексов. В данной части мы покажем, используя результаты предыдущей части, что при условии k-ограниченности матрицы A и некоторых других условиях на миноры расширенной матрицы $(A\,b)$, задача вычисления ширины симплекса может быть решена за полиномиальное время.

Теорема 2.2.1 *Пусть $A \in \mathbb{Z}^{(n+1)\times n}$, $b \in \mathbb{Z}^{n+1}$ и $P = P(A, b)$ — симплекс размерности n. Если величина $\max\{\Delta_n(A\,b), \Delta_{n-1}(A)\}$ ограничена, то для задачи вычисления ширины P существует полиномиальный алгоритм. Битовая сложность алгоритма равна*

$$O(T(n, \Delta_{n-1}(A))n^3 \Delta(A\,b)\Delta(A)) = \tilde{O}(n^{3+\omega+2\log_2 \Delta_{n-1}(A)}),$$

где ω — показатель экспоненты для алгоритмов быстрого умножения матриц и $T(n, r)$ обозначает трудоемкость алгоритма леммы 2.1.3 для целочисленных $(n-1)\times(n-1)$ матриц, абсолютное значение определителей которых не превосходит r.

Доказательство. Так как P — симплекс, то $\mathbb{R}^n = \bigcup\limits_{v \in \mathrm{vert}(P)} \mathrm{Norm}(v)$. Следовательно,

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{v,u \in \mathrm{vert}(P)} \mathrm{Norm}(v) \cap (-\mathrm{Norm}(u)).$$

Пусть

$$M(v, u) = \mathrm{Norm}(v) \cap (-\mathrm{Norm}(u)) \cap (\mathbb{Z}^n \setminus \{\mathbf{0}\}).$$

Используя предыдущее выражение, мы получаем цепочку равенств

$$\mathrm{width}(P) = \min_{v,u \in \mathrm{vert}(P)} \min_{c \in M(v,u)} (\max_{x \in P} c^\top x - \min_{x \in P} c^\top x) =$$

$$= \min_{v,u \in \mathrm{vert}(P)} \min_{c \in M(v,u)} c^\top (v - u).$$

Следовательно, задача вычисления ширины P эквивалентна совокупности $O(n^2)$ задач, порожденных всеми парами вершин P.

Рассмотрим задачу $\min\limits_{c \in M(v,u)} (c^\top (v-u))$ для пары v, u различных вершин P.

Так как вершины v, u инцидентны ребру $v-u$, то вершины v, u имеют $n-1$ общих фасет. Пусть матрица $B^\top$ порождена строками матрицы A, что соответствуют этим $n-1$ общим фасетам. Следовательно, мы можем написать $\operatorname{Norm}(u) = \operatorname{cone.hull}(B\, a_u)$ и $\operatorname{Norm}(u) = \operatorname{cone.hull}(B\, a_v)$, где $a_u^\top, a_v^\top$ — строки матрицы A. Дополнительно, верны включения $-a_u \in \operatorname{Norm}(v)$, $-a_v \in \operatorname{Norm}(u)$ и $a_v, -a_u \in M(v,u)$.

Рассмотрим гиперплоскость

$$H(k) = \{x \in \mathbb{R}^n : (v-u)x = k\}.$$

Так как $\forall c \in M(v,u)$ верно $c^\top (v-u) \geqslant 0$, то имеет место равенство $M(v,u) = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{Z}_+} (M(v,u) \cap H(k))$. Следовательно,

$$\min_{c \in M(u,v)} c^\top (u-v) = \min\{k \in \{1, 2, \ldots, s\} : M(v,u) \cap H(k) \neq \emptyset\},$$

где

$$s = \min\{a_v^\top (v-u), -a_u^\top (v-u)\}.$$

Следующая лемма поможет нам проверять пустоту множеств вида $M(v,u) \cap H(k)$.

Лемма 2.2.1 *Пусть $k \in \mathbb{R}_+$, тогда*

$$\begin{aligned}\operatorname{Norm}(v) \cap (-\operatorname{Norm}(u)) \cap H(k) &= \\ &= (p_v(k) + \operatorname{cone.hull}(B)) \cap (p_u(k) - \operatorname{cone.hull}(B)),\end{aligned}$$

где $p_v(k)$ — точка пересечения луча $L_v = \{a_v t : t \in \mathbb{R}_+\}$ с гиперплоскостью $H(k)$ и $p_u(k)$ — точка пересечения луча $L_u = \{-a_u t : t \in \mathbb{R}_+\}$ с гиперплоскостью $H(k)$.

Доказательство. Пусть

$$x \in \operatorname{Norm}(v) \cap (-\operatorname{Norm}(u)) \cap H(k)$$

, тогда

$$x = B\alpha + a_v t_v = -B\beta - a_u t_u$$

для некоторых $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}_+^{n-1}$ и $t_v, t_u \in \mathbb{Q}_+$. Дополнительно, верно равенство $x^\top(v-u) = k$. Так как $B^\top v = B^\top u$, то верны равенства $t_v = k/a_v^\top(v-u)$ и $t_u = -k/a_u^\top(v-u)$. Рассмотрим точки $p_v(k)$ и $p_u(k)$. Нетрудно видеть, что $p_v(k) = a_v t_v$ и $p_u(k) = -a_u t_u$. Так как $x = B\alpha + a_v t_v = -B\beta - a_u t_u$, то

$$x \in (p_v(k) + \operatorname{cone.hull}(B)) \cap (p_u(k) - \operatorname{cone.hull}(B)).$$

Пусть наоборот

$$x \in (p_v(k) + \operatorname{cone.hull}(B)) \cap (p_u(k) - \operatorname{cone.hull}(B)).$$

Так как $B^\top(v-u) = \mathbf{0}^\top$, то верны равенства $x^\top(v-u) = p_v(k)^\top(v-u) = k$, следовательно, $x \in H(k)$. Наконец, $x \in \operatorname{Norm}(v)$ и $x \in -\operatorname{Norm}(u)$, из-за того, что точки $p_v(k)$, $p_u(k)$ лежат на лучах L_v, L_u. Данные лучи являются элементами остова конусов $\operatorname{Norm}(v)$ и $-\operatorname{Norm}(u)$. Доказательство леммы закончено. ■

Лемма 2.2.2 *Пусть $k \in \mathbb{N}$. Непустота множества $M(v,u) \cap H(k)$ может быть проверена за полиномиальное время при условии, что величина $\varDelta_{\text{gcd}}(B)$ ограничена.*

Доказательство. Пусть d — наибольший общий делитель компонент $v-u$. Таким образом, мы можем найти такую унимодулярную матрицу $Q \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ (см. теорему 1.1.3), что $(v-u)^\top Q = (d, 0, \dots, 0)$ и, следовательно, $Q_{1*} = (v-u)^\top/d$. После унимодулярного отображения $x \to Qx$ конус

$$(p_v(k) + \operatorname{cone.hull}(B)) \cap (p_u(k) - \operatorname{cone.hull}(B))$$

перейдет в конус

$$(Q^{-1}p_v(k) + \operatorname{cone.hull}(Q^{-1}B)) \cap (Q^{-1}p_u(k) - \operatorname{cone.hull}(Q^{-1}B)).$$

Так как

$$(v-u)^\top p_v(k)/d = (v-u)^\top p_u(k)/d = k/d$$

и $(v-u)^\top B = \mathbf{0}^\top$, то верны равенства $Q^{-1}B = \begin{pmatrix}\mathbf{0}^\top\\ B'\end{pmatrix}$, $Q^{-1}p_v(k) = \begin{pmatrix}k/d\\ p'_v\end{pmatrix}$ и $Q^{-1}p_u(k) = \begin{pmatrix}k/d\\ p'_u\end{pmatrix}$ для некоторых $B' \in \mathbb{Z}^{(n-1)\times(n-1)}$, $p'_v, p'_u \in \mathbb{Z}^{n-1}$. Следовательно, множество $M(v,u) \cap H(k)$ не пусто тогда и только тогда, когда множество

$$(p'_v + \operatorname{cone.hull}(B')) \cap (p'_u - \operatorname{cone.hull}(B'))$$

содержит хотя бы одну целую точку и $d \mid k$. Пусть система $Rx \leqslant r$ является двойственным представлением конуса $p'_u - \operatorname{cone.hull}(B')$. Другими словами, $P(R,r) = p'_u - \operatorname{cone.hull}(B')$. Мы можем положить (см. замечание 1.1.8) $R = (B')^{-1}$ и $r = Rp'_u$, после чего сделать данные матрицы целочисленными домножением на некоторое целое число полиномиального размера. Наконец, нам нужно научиться решать задачу определения непустоты множества

$$(p'_v + \operatorname{cone.hull}(B')) \cap P(R,r) \cap \mathbb{Z}^{n-1}.$$

Нетрудно видеть, что данный политоп удовлетворяет условиям следствия 2.1.3, более того,

$$\varDelta(B') = \varDelta_{\gcd}(n-1, Q^{-1}B) = \varDelta_{\gcd}(n-1, B).$$

Таким образом, задача определения непустоты множества

$$(p'_v + \operatorname{cone.hull}(B')) \cap P(R,r) \cap \mathbb{Z}^{n-1}$$

и исходная задача могут быть решены за полиномиальное время при условии ограниченности величины $\varDelta_{\gcd}(n-1, B)$. Доказательство леммы закончено. ■

Оценим трудоемкость алгоритма. Для каждой пары вершин v, u симплекса алгоритм решает задачу $\min\limits_{c \in M(v,u)} c^\top(v-u)$. Каждая такая задача может быть решена с использованием равенства

$$\min_{c \in M(v,u)} c^\top(v-u) = \min\{k \in \{1,2,\dots,s\} : M(v,u) \cap H(k) \neq \emptyset\},$$

где

$$s = \min\{a_v^\top(v-u), -a_u^\top(v-u)\}.$$

Каждая задача определения непустоты множества $M(v,u) \cap H(k)$ может быть решена с использованием леммы 2.2.2. Следовательно, общая трудоемкость алгоритма есть $O(T(n,r)n^2 s)$, где

$$r = \max\{\varDelta_{\text{gcd}}(n-1, B) : B \text{ — } (n-1) \times n \text{ подматрица матрицы } A\}.$$

Оценим величину $s = \min\{a_v^\top(v-u), -a_u^\top(v-u)\}$. По правилу Крамера, для каждой вершины x симплекса верно неравенство $||x||_\infty \leqslant \varDelta(A\,b)/\delta(A)$. Дополнительно, верны неравенства $||a_v||_\infty \leqslant \varDelta_1(A)$ и $||-a_u||_\infty \leqslant \varDelta_1(A)$. Следовательно, $s \leqslant 2n\varDelta(A\,b)\varDelta_1(A)$. Окончательно, трудоемкость равна $O(T(n,r)n^3\varDelta(A\,b)\varDelta_1(A))$.

Далее мы можем избавиться от множителя $\varDelta_1(A)$. Для этого мы можем предположить, что матрица A уже приведена к нормальной форме Эрмита (см. теорему 1.1.3). Иными словами, мы можем предположить, что

$$A = \begin{pmatrix} A_{1\,1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ A_{2\,1} & A_{2\,2} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n\,1} & A_{n\,2} & \dots & A_{n\,n-1} & A_{n\,n} \\ A_{n+1\,1} & A_{n+1\,2} & \dots & A_{n+1\,n-1} & A_{n+1\,n} \end{pmatrix},$$

где $0 \leqslant A_{i\,j} < A_{i\,i} < \varDelta(A)$ для $1 \leqslant i,j \leqslant n$. Заметим, что данные неравенства неверны для последней строчки матрицы A. Следовательно, одно из неравенств $||a_v||_\infty \leqslant \varDelta(A)$ или $||-a_u||_\infty \leqslant \varDelta(A)$ является верным. Следовательно, верно неравенство $s \leqslant 2n\varDelta(A\,b)\varDelta(A)$. Мы также заметим, что величина

$$r = \max\{\varDelta_{\text{gcd}}(n-1, B) : B \text{ — } (n-1) \times n \text{ подматрица } A\}$$

является инвариантом относительно унимодулярных преобразований, переводящих изначальную систему к нормальной форме Эрмита. Так как $r \leqslant \varDelta_{n-1}(A)$, то финальная оценка сложности имеет вид

$$O(T(n, \varDelta_{n-1}(A))n^3\varDelta(A\,b)\varDelta(A)).$$

∎

Дополнительно, если для симплекса $P = P(A, b)$ верно $P \cap \mathbb{Z}^n = \emptyset$, то мы можем использовать теорему 1.2.4 для ограничения его ширины. В данном случае трудоемкость алгоритма может быть уменьшена.

Теорема 2.2.2 *Пусть $A \in \mathbb{Z}^{(n+1)\times n}$, $b \in \mathbb{Z}^{n+1}$, $P = P(A, b)$ — симплекс размерности n и $P \cap \mathbb{Z}^n = \emptyset$. Тогда, если величина $\max\{\delta_n(A), \Delta_{n-1}(A)\}$ ограничена, то для задачи вычисления ширины P существует полиномиальный алгоритм. Трудоемкость алгоритма равна $O(T(n, \Delta_{n-1}(A))n^2\delta(A))$ или $\tilde{O}(n^{3+\omega+2\log_2 \Delta_{n-1}(A)})$.*

Доказательство. Из доказательства предыдущей теоремы следует, что

$$\min_{c \in M(v,u)} c^\top(v - u) = \min\{k \in \{1, 2, \dots, s\} : M(v, u) \cap H(k) \neq \emptyset\},$$

где $s = \min\{a_v^\top(v - u), -a_u^\top(v - u)\}$. Но нет необходимости в переборе всех значений $k \in \{1, 2, \dots, s\}$, потому что ширина P ограничена. Так как $P \cap \mathbb{Z}^n = \emptyset$, то мы можем использовать теорему 1.2.4 и ограничить ширину P величиной $\delta_n(A) = \delta(A)$. Следовательно,

$$\min_{c \in M(v,u)} c^\top(v - u) = \min\{k \in \{1, 2, \dots, \delta_n(A)\} : M(v, u) \cap H(k) \neq \emptyset\}.$$

И нам нужно решить только $\delta(A)$ подзадач. Остальная часть доказательства не отличается от доказательства предыдущей теоремы. ■

Замечание 2.2.1 *Результаты данной части, как нетрудно видеть, могут быть применены не только к симплексам, но и к любым простым политопам с полиномиальным числом вершин, у которых любые две вершины соединены ребром. Для таких политопов также существует полиномиальный алгоритм вычисления ширины.*

Глава 3

Доказательства гипотез ограниченных миноров для $\{0,1\}$-полиэдров трех задач на графах

В данной главе мы рассматриваем естественные линейные $\{0,1\}$-постановки задач о независимом множестве, о вершинном и о реберном доминирующих множествах и доказываем их полиномиальную разрешимость для классов графов, имеющих ограниченные по абсолютному значению миноры матриц ограничений в этих постановках.

Первая часть посвящена необходимым сведениям из теории графов. Во второй части рассматривается задача о независимом множестве. Третья и четвертая части посвящены задачам о вершинном и реберном доминирующих множествах соответственно.

Результаты этой главы опубликованы в работе [7].

3.1 Дополнительная терминология и дополнительные обозначения

3.1.1 Некоторые определения и обозначения теории графов

Граф H называется *подграфом* графа G, если H получается из G удалением вершин и ребер (удаление вершины предполагает удаление всех инцидентных ей ребер). Граф H называется *порожденным подграфом* графа G, если H может быть получен из G удалением вершин.

Класс графов называется *наследственным*, если он замкнут относительно удаления вершин. Хорошо известно, что любой наследственный класс $\mathcal{X}$ может быть задан множеством $\mathcal{Y}$ своих *запрещенных порожденных подграфов*, т. е. графов, минимальных относительно удаления вершин, которые не принадлежат $\mathcal{X}$. При этом принята запись $\mathcal{X} = \mathrm{Free}(\mathcal{Y})$. *Сильно наследственный* класс графов — наследственный класс, замкнутый еще и относительно удаления ребер. Любой сильно наследственный класс графов $\mathcal{X}$ может быть задан множеством $\mathcal{Y}$ своих запрещенных подграфов. При этом принята запись $\mathcal{X} = \mathrm{Free}_s(\mathcal{Y})$.

Граф называется *двудольным*, если множество его вершин можно разбить на не более чем два подмножества так, что любые две смежные вершины принадлежат разным подмножествам.

Граф смежности ребер графа G называется *реберным к* G.

Мы будем использовать следующие обозначения для стандартных матриц смежности и инцидентности графов:

1. $I(G)$ — матрица инцидентности графа G,
2. $A_v(G)$ — матрица смежности вершин графа G,
3. $A_e(G)$ — матрица смежности ребер графа G.

Мы также будем использовать следующие обозначения для графов:

1. $K_{p,q}$ — полный двудольный граф с p вершинами в первой доле и q вершинами во второй доле,
2. $K'_{1,p}$ — граф, полученный из графа $K_{1,p}$ подразбиением каждого его ребра,
3. K_n — полный граф с n вершинами,
4. O_n — пустой граф с n вершинами,
5. A_n — граф с множеством вершин $\{v_1, \ldots, v_n, u_1, \ldots, u_n\}$ и множеством ребер $\{v_iv_j|\ i \neq j\} \cup \{v_1u_1, v_2u_2, \ldots, v_nu_n\}$,

6. B_n — граф с множеством вершин $\{v_1, \ldots, v_n, u_1, \ldots, u_n\}$ и множеством ребер $\{v_iv_j|\ i \neq j\} \cup \{u_iu_j|\ i \neq j\} \cup \{v_1u_1, v_2u_2, \ldots, v_nu_n\}$,
7. Pal_n — граф с множеством вершин $\{v_1, \ldots, v_{2n+1}, u_1, \ldots, u_n\}$ и множеством ребер $\{v_iv_{i+1}|\ 1 \leqslant i \leqslant 2n\} \cup \{v_{2i}u_i|\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$,
8. kG — дизъюнктное объединение k копий графа G,
9. для графа G и подмножества $V' \subseteq V(G)$ через $G[V']$ мы будем обозначать подграф графа G, порожденный подмножеством V', а через $G \setminus V'$ результат удаления из G всех вершин подмножества V',
10. $N(x)$ — окрестность вершины x, $N[x] = N(x) \cup \{x\}$.

3.1.2 Некоторые классические задачи теории графов и их постановки

Независимое множество в графе — любое подмножество его попарно несмежных вершин. Размер независимого множества с наибольшим количеством вершин графа G называется *числом независимости* G и обозначается через $\alpha(G)$. *Задача о независимом множестве* (кратко, ЗНМ) для заданных графа G и числа k состоит в том, чтобы проверить, выполняется ли неравенство $\alpha(G) \geqslant k$ или нет. Это классическая NP-полная задача на графах.

Для заданного графа G с n вершинами и m ребрами ЗНМ может быть сформулирована в виде следующей линейной программы:

$$\max\ j_n^\top x$$
$$I^\top(G)x \leqslant j_m,$$
$$x \in \{0,1\}^n.$$

Действительно, переменная x_v — индикатор того, что соответствующая вершина v принадлежит оптимальному решению ЗНМ. Неравенство $x_v + x_u \leqslant 1$ гарантирует, что смежные вершины u и v одновременно не принадлежат никакому допустимому решению программы, т. е. что любое допустимое решение является независимым множеством.

Пусть $\mathcal{ISP}(c)$ — множество всех графов G таких, что абсолютные значения всех миноров матрицы $\begin{pmatrix} j_n^\top \\ I^\top(G) \end{pmatrix}$ не превосходят c. Далее мы покажем, что для любого фиксированного c задача о независимом множестве может быть решена для графов из $\mathcal{ISP}(c)$ за полиномиальное время. Этот результат был впервые получен в работе [1], но приведенное в диссертации доказательство более простое и компактное.

Вершинным доминирующим множеством графа G называется подмножество $D \subseteq V(G)$ такое, что любой элемент множества $V(G) \setminus D$ имеет соседа в D. Размер доминирующего множества с наименьшим числом вершин графа G называется *вершинным числом доминирования* графа G и обозначается через $\gamma(G)$. *Задача о вершинном доминирующем множестве* (кратко, ЗВДМ) состоит для заданных графа G и числа k в том, чтобы проверить, выполняется ли неравенство $\gamma(G) \leqslant k$ или нет. *Задача о реберном доминирующем множестве* (кратко, ЗРДМ) определяется аналогичным образом. ЗВДМ и ЗРДМ являются классическими NP-полными задачами на графах.

Для заданного графа G с n вершинами и m ребрами ЗВДМ и ЗРДМ могут быть сформулированы в виде следующих линейных программ:

$$\begin{aligned} &\min j_n^\top y \\ &(A_v(G) + I_n)y \geqslant j_n, \\ &y \in \{0,1\}^n. \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} &\min j_m^\top y \\ &(A_e(G) + I_m)y \geqslant j_m, \\ &y \in \{0,1\}^m. \end{aligned}$$

Убедимся в том, что первая программа действительно задает ЗВДМ для графа G. Переменная y_v является индикатором того, что соответствующая вершина v принадлежит некоторому оптимальному решению ЗВДМ для графа G. Неравенство $y_v + \sum\limits_{u \in N(v)} y_u \geqslant 1$, где $N(v)$ — окрестность вершины v, гарантирует, что множество $\{v\} \cup N(v)$ содержит элемент любого допустимого решения, т. е. что любое допустимое решение является доминирующим множеством.

Пусть $\mathcal{V}DSP(c)$ и $\mathcal{E}DSP(c)$ — множества всех графов G таких, что абсолютные значения всех миноров матриц $A_v(G) + I_n$ и $A_e(G) + I_m$ не превосходят c соответственно. В этой работе мы показываем, что для любого фиксированного c ЗВДМ может быть решена для графов из $\mathcal{V}DSP(c)$ за полиномиальное время. Также мы показываем, что для любого фиксированного c ЗРДМ может быть решена для графов из $\mathcal{E}DSP(c)$ за полиномиальное время.

Для любого c классы $\mathcal{I}SP(c)$ и $\mathcal{E}DSP(c)$ являются сильно наследственными. Для любого c класс $\mathcal{V}DSP(c)$ является наследственным.

3.2 Задача о независимом множестве

3.2.1 Некоторое включение

Лемма 3.2.1 *Для любого* $c \geqslant 2$ *справедливо включение* $\mathcal{I}SP(c) \subseteq \mathrm{Free}_s(\{Pal_c\})$.

Доказательство. Пусть $M(k, a)$ — матрица, полученная из матрицы $\begin{pmatrix} j_{3k+1}^\top \\ I^\top(Pal_k) \end{pmatrix}$ изменением 1 на a в элементе, соответствующем вершине u_1 в первой строке. Рассмотрим подматрицу матрицы $M(k, a)$, порожденную столбцами, соответствующими вершинам v_1, v_2, v_3, u_1, а также первой строкой и строками, соответствующими ребрам v_1v_2, v_2v_3, v_2u_1. Эта матрица M' имеет вид $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, где первый ее столбец соответствует вершине u_1, $(i+1)$-й столбец соответствует вершине v_i для любого $1 \leqslant i \leqslant 3$, вторая, третья и четвертая строки соответствуют ребрам u_1v_2, v_1v_2, v_2v_3 соответственно. Следующая диаграмма показывает последовательность элементарных операций со строками и столбцами матрицы M':

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & -a & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -a & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & -a & 1+a \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1+a \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, матрица $M(k,a)$ элементарными преобразованиями приводится к матрице

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & o_{3k-2}^\top \\ 0 & 1 & 0 & o_{3k-2}^\top \\ 0 & 0 & 1 & o_{3k-2}^\top \\ o_{3k-2} & o_{3k-2} & o_{3k-2} & M(k-1,a+1) \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$|\det(M(k,a))| = |\det(M(k-1,a+1))|,$$

т. е.

$$|\det(M(k,a))| = |\det(M(1,a+k-1))|.$$

Очевидно, что $\det(M(1,a)) = -1-a$. Следовательно, $|\det(M(k,a))| = |a+k|$. Так как $M(k,1) = \begin{pmatrix} j_{3k+1}^\top \\ I^\top(Pal_k) \end{pmatrix}$, то $\left|\det \begin{pmatrix} j_{3k+1}^\top \\ I^\top(Pal_k) \end{pmatrix}\right| = k+1.$

Матрица $\begin{pmatrix} j_{3k+1}^\top \\ I^\top(Pal_k) \end{pmatrix}$ является расширенной матрицей ограничений ЗНМ для графа Pal_k. Следовательно, $\mathcal{ISP}(c)$ не содержит графа Pal_c. Напомним, что класс $\mathcal{ISP}(c)$ является сильно наследственным. Следовательно, включение $\mathcal{ISP}(c) \subseteq \mathrm{Free}_s(\{Pal_c\})$ имеет место. ∎

3.2.2 Теорема Б. Рида

Покрытие нечетных циклов графа G — подмножество $X \subseteq V(G)$ такое, что граф $G \setminus X$ является двудольным.

Элементарной стеной высоты h называется граф, состоящий из h уровней, каждый из которых состоит из h «кирпичей», где под «кирпичом» понимается простой цикл длины шесть, если уровень не является верхним и нижним, иначе это простой цикл длины пять. Элементарная стена высоты 5 изображена на следующем рисунке.

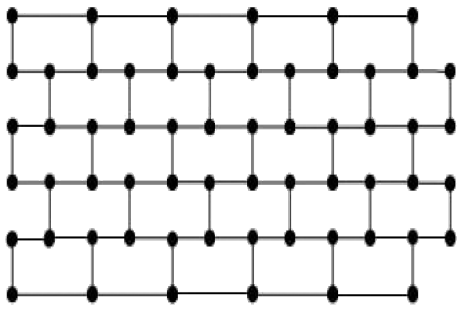

Рис. 2: Элементарная стена высоты 5

Стена Эшера высоты h может быть получена из элементарной стены высоты h следующим образом. Пусть $(v_1, \ldots, v_{h+1})$ и $(u_1, \ldots, u_{h+1})$ — верхний и нижний пути элементарной стены высоты h соответственно. Мы заменяем каждое ребро (v_i, v_{i+1}) на простой путь (v_i, w'_i, v_{i+1}) и каждое ребро (u_i, u_{i+1}) на простой путь (u_i, w''_i, u_{i+1}). Далее, для каждого i мы добавляем ребро (w'_i, w''_{h+1-i}) и подразбиваем его. Стена Эшера высоты 4 изображена на следующем рисунке.

Б. Рид доказал следующий результат в работе [64].

Теорема 3.2.1 *Для любых k и h существует такое число $t(k, h)$, что если G — граф, не содержащий k непересекающихся по вершинам нечетных циклов и не содержащий стены Эшера высоты h в качестве подграфа, то G содержит покрытие нечетных циклов, имеющее не более $t(k, h)$ элементов.*

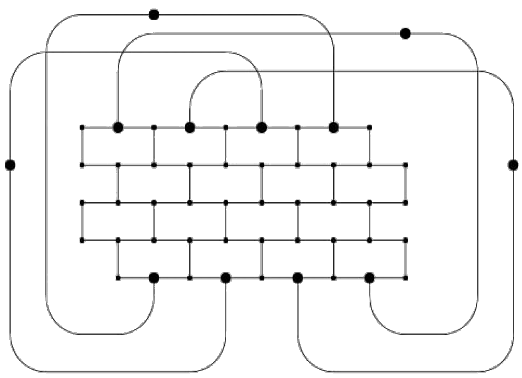

Рис. 3: Стена Эшера высоты 4

3.2.3 Основной результат этого раздела

Теорема 3.2.2 *Для любого фиксированного c* ЗНМ *для графов из $\mathcal{ISP}(c)$ может быть решена за полиномиальное время.*

Доказательство. Пусть G — произвольный граф из $\mathcal{ISP}(c)$ и $c^* = \lceil \log_2(c) \rceil + 1$. Если G содержит c^* непересекающихся по вершинам нечетных циклов, то матрица $I(G)$ содержит подматрицу, имеющую c^* блоков, определитель каждого из которых равен 2 по абсолютной величине. Следовательно, данная матрица содержит минор, абсолютное значение которого равно 2^{c^*}, что больше, чем c. Поэтому G не содержит c^* непересекающихся по вершинам нечетных циклов.

Очевидно, граф Pal_c является порожденным подграфом стены Эшера высоты c. По лемме 3.2.1 и теореме 3.2.1 граф G имеет покрытие нечетных циклов X мощности не более $t(c^*, c)$. Это покрытие может быть найдено за полиномиальное время, поскольку можно за полиномиальное время проверить, является ли заданный граф двудольным или нет. Ясно, что

$$\alpha(G) = \max_{X' \subseteq X,\, X' \text{ — независимое множество}} (|X'| + \alpha(G \setminus (X \cup \bigcup_{v \in X'} N(v))))$$

и что для любого подмножества X' множества X подграф $G \setminus (X \cup \bigcup_{v \in X'} N(v))$ является двудольным. ЗНМ может быть решена для двудольных графов за полиномиальное время [72]. Следовательно, для любого фиксированного c ЗНМ для графов из $\mathcal{ISP}(c)$ полиномиально сводится к ЗНМ для двудольных графов. Поэтому для любого фиксированного c ЗНМ для графов из $\mathcal{ISP}(c)$ может быть решена за полиномиальное время. ■

3.3 Задача о вершинном доминирующем множестве

3.3.1 Вспомогательные результаты

Лемма 3.3.1 *Пусть c — некоторое натуральное число и $c^* = \lceil \log_2(c) \rceil + 1$. Тогда справедливо включение*

$$\mathcal{V}DSP(c) \subseteq \mathrm{Free}(\{K_{1,c+2}, A_{c+2}, B_{c+1}, c^*K_{1,3}, c^*A_3\}).$$

Доказательство. Матрица ограничений $A_v(K_{1,c+2}) + I_{c+3}$ ЗВДМ для графа $K_{1,c+2}$ совпадает с матрицей $\begin{pmatrix} 1 & j_{c+2}^\top \\ j_{c+2} & I_{c+2} \end{pmatrix}$ с точностью до перестановок строк и столбцов. Ее определитель равен $-c-1$, т.к. она может быть приведена к матрице $\begin{pmatrix} -c-1 & o_{c+2}^\top \\ o_{c+2} & I_{c+1} \end{pmatrix}$ элементарными преобразованиями строк и столбцов. Матрица ограничений ЗВДМ для графа $c^*K_{1,3}$ является блочной матрицей, имеющей c^* блоков, каждый из которых имеет определитель, равный -2. Следовательно, определитель всей матрицы равен $(-2)^{c^*}$, что по абсолютному значению больше, чем c. Следовательно, $K_{1,c+2} \notin \mathcal{V}DSP(c)$ и $c^*K_{1,3} \notin \mathcal{V}DSP(c)$. Т.к. $\mathcal{V}DSP(c)$ является наследственным, то имеет место включение $\mathcal{V}DSP(c) \subseteq \mathrm{Free}(\{K_{1,c+2}, c^*K_{1,3}\})$.

Нетрудно видеть, что с точностью до перестановок строк и столбцов ЗВДМ для графов A_{c+2} и B_{c+1} имеет матрицы ограничений $\begin{pmatrix} J_{c+2} & I_{c+2} \\ I_{c+2} & I_{c+2} \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} J_{c+1} & I_{c+1} \\ I_{c+1} & J_{c+1} \end{pmatrix}$ соответственно. Первая матрица может быть приведена к матрице $\begin{pmatrix} J_{c+2} - I_{c+2} & O_{c+2} \\ O_{c+2} & I_{c+2} \end{pmatrix}$ элементарными преобразованиями строк и столбцов. Матрица $J_{c+2} - I_{c+2}$ является циркулянтом, чей определитель равен $\prod\limits_{j=0}^{c+1} p(w_j)$, где $p(x) = x + x^2 + \ldots + x^{c+1}$ и $w_j = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} \cdot \frac{j}{c+2}}$ [41]. Ясно, что $p(w_0) = c+1$

и

$$p(x) = x + x^2 + \ldots + x^{c+1} = \frac{x^{c+2}-1}{x-1} - 1$$

для любого вещественного числа $x \neq 1$. Следовательно, $p(w_j) = -1$ для любого $j \in \overline{1, c+1}$. Поэтому $|\det(J_{c+2} - I_{c+2})| = c+1$. Таким образом, графы A_{c+2} и c^*A_3 не принадлежат классу $\mathcal{V}DSP(c)$, т. е. $\mathcal{V}DSP(c) \subseteq \mathrm{Free}(\{A_{c+2}, c^*A_3\})$. Подматрица матрицы $\begin{pmatrix} J_{c+1} & I_{c+1} \\ I_{c+1} & J_{c+1} \end{pmatrix}$, порожденная первыми $c+2$ строками и последними $c+2$ столбцами, является матрицей $\begin{pmatrix} j_{c+1} & I_{c+1} \\ 0 & j_{c+1}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}$. Абсолютное значение ее определителя равно $c+1$. Поэтому $\mathcal{V}DSP(c) \subseteq \mathrm{Free}(\{B_{c+1}\})$. ■

Через $R(a, b)$ мы обозначаем соответствующее *число Рамсея*, т. е. наименьшее число n такое, что любой граф с n вершинами содержит либо K_a, либо O_b в качестве порожденного подграфа.

Лемма 3.3.2 *Пусть $G \in \mathcal{V}DSP(c)$ и D — произвольное его минимальное доминирующее множество. Тогда $G[D] \in \mathrm{Free}(\{K_{R(c+1,c+2)}\})$.*

Доказательство. Предположим, что $G[D]$ содержит полный подграф с $k \geqslant R(c+1, c+2)$ вершинами. Пусть вершины $v_1, \ldots, v_k$ порождают этот полный подграф. Поскольку D — минимальное доминирующее множество графа G, то для любого $i \in \overline{1, k}$ существует вершина $u_i \in N(v_i) \setminus \bigcup\limits_{j=1, j\neq i}^{k} N(v_j)$. По теореме Рамсея порожденный подграф $G[\{u_1, \ldots, u_k\}]$ графа G содержит либо K_{c+1}, либо O_{c+2} в качестве порожденного подграфа. Следовательно, G содержит либо A_{c+2}, либо B_{c+1} в качестве порожденного подграфа. Мы получаем противоречие с предыдущей леммой. Следовательно, наше первоначальное предположение было неверным. ■

Лемма 3.3.3 *Пусть G — произвольный граф из класса $\mathcal{V}DSP(c)$, r — произвольная вершина G, $V_k(r)$ — множество всех вершин графа G, расположенных на расстоянии k от вершины r. Существует функция $f_c(\cdot) : \mathbb{N} \cup$*

$\{0\} \longrightarrow \mathbb{N}$ *такая, что для любого* k *выполнено неравенство* $\alpha(G[V_k(r)]) \leqslant f_c(k)$.

Доказательство. По лемме 3.3.1 можно положить $f_c(0) = 1$ и $f_c(1) = c+1$. Пусть $k \geqslant 2$. Предположим, что $f_c(0), f_c(1), \ldots, f_c(k-1)$ уже определены. Определим $f_c(k)$. Пусть S_k — независимое множество графа $G[V_k(r)]$ с наибольшим количеством вершин. Пусть D_{k-1} — подмножество множества $\bigcup\limits_{x \in S_k} N(x) \cap V_{k-1}(r)$, доминирующее S_k и имеющее минимальное количество вершин. По лемме 3.3.1 ни одна из вершин множества D_{k-1} не может быть смежна с $c+2$ вершинами множества S_k. Следовательно, $|D_{k-1}| \geqslant \frac{|S_k|}{c+1}$ по принципу Дирихле. Т.к. класс $\mathcal{V}DSP(c)$ является наследственным и $G \in \mathcal{V}DSP(c)$, то порожденный подграф $G[D_{k-1} \cup S_k]$ графа G принадлежит классу $\mathcal{V}DSP(c)$. По нашему предположению $G[D_{k-1}] \in \mathrm{Free}(\{O_{f_c(k-1)+1}\})$. По лемме 3.3.2 $G[D_{k-1}] \in \mathrm{Free}(\{K_{R(c+1,c+2)}\})$. Следовательно, по теореме Рамсея

$$|D_{k-1}| \leqslant R(R(c+1, c+2), f_c(k-1)+1).$$

Поэтому

$$|S_k| \leqslant (c+1)R(R(c+1, c+2), f_c(k-1)+1).$$

Тем самым, мы можем положить

$$f_c(k) = (c+1)R(R(c+1, c+2), f_c(k-1)+1)+1.$$

■

$(K_{1,3}, A_3)$-*упаковка* графа G — произвольное множество $\{G_1, G_2, \ldots, G_s\}$ графов такое, что:

1. для любого i граф G_i является порожденным подграфом графа G, изоморфным либо $K_{1,3}$, либо A_3,

2. для любых различных i и j множества вершин графов G_i и G_j не пересекаются и не существует двух смежных вершин $u \in G_i$ и $v \in G_j$.

$(K_{1,3}, A_3)$-упаковка называется *оптимальной*, если она содержит максимально возможное количество элементов. По лемме 3.3.1 любая $(K_{1,3}, A_3)$-упаковка любого графа из $\mathcal{V}DSP(c)$ имеет не более $\lceil \log_2(c) \rceil$ элементов, каждый из которых изоморфен $K_{1,3}$, и не более $\lceil \log_2(c) \rceil$ элементов, каждый из которых изоморфен A_3. Следовательно, некоторая оптимальная $(K_{1,3}, A_3)$-упаковка любого графа из $\mathcal{V}DSP(c)$ может быть найдена за полиномиальное время, т.к. она может быть найдена перечислением всех подмножеств его вершин, имеющих не более $(4+6)\lceil \log_2(c) \rceil$ элементов.

Пусть G — произвольный связный граф из $\mathcal{V}DSP(c)$ и $P = \{G_1, \ldots, G_s\}$ — некоторая оптимальная его $(K_{1,3}, A_3)$-упаковка. Пусть

$$N_d(P) = \{x \in V(G)|\ \exists i \in \overline{1,s}\ \exists y \in V(G_i)$$

такая, что расстояние между x и y не превосходит $d\}$. Пусть $\mathfrak{D}_G = \{D^*|\ D^*$ — подмножество множества $N_2(P)$, доминирующее $N_1(P)\}$. Для любого элемента $D^* \in \mathfrak{D}_G$ мы удалим каждую вершину G, доминируемую множеством D^* (D^* доминирует каждую вершину D^*). Полученный граф обозначим через $G(D^*)$.

Лемма 3.3.4 *Для любого элемента $D^* \in \mathfrak{D}_G$ граф $G(D^*)$ принадлежит классу* $\mathrm{Free}(\{K_{1,3}, A_3\})$. *Если D — доминирующее множество графа G с наименьшим количеством вершин, то выполнено неравенство*

$$\gamma(G) \geqslant \gamma(G(D \cap N_2(P))) + |D \cap N_2(P)|.$$

Доказательство. Ясно, что $V(G(D^*)) \cap N_1(P) = \emptyset$ по определению графа $G(D^*)$. Отсюда и оптимальности упаковки P следует, что граф $G(D^*)$ не может содержать ни $K_{1,3}$, ни A_3 в качестве порожденного подграфа. Другими словами, $G(D^*) \in \mathrm{Free}(\{K_{1,3}, A_3\})$.

Пусть $\tilde{D} = D \cap N_2(P)$ и $D' = D \setminus \tilde{D}$. Ясно, что $\tilde{D} \in \mathfrak{D}_G$. Покажем, что существует доминирующее множество графа $G(\tilde{D})$, имеющее не более $|D'|$ элементов. Это очевидно, если $D' \subseteq V(G(\tilde{D}))$. Предположим, что существует вершина $x \in D' \setminus V(G(\tilde{D}))$. Заметим, что $x \notin N_2(P)$. По построению графа $G(\tilde{D})$ существует вершина $y \in \tilde{D}$ такая, что $xy \in E(G)$. Ясно, что $y \in N_2(P) \setminus N_1(P)$. Т.к. D — доминирующее множество графа G с минимальным количеством вершин, то существует вершина $z \in N(x) \setminus \bigcup\limits_{v \in D, v \neq x} N[v]$. Следовательно, z не доминируется множеством $\tilde{D}$. Поэтому вершина z принадлежит графу $G(\tilde{D})$. Множество $N(x) \cap V(G(\tilde{D}))$ порождает полный граф. Действительно, если оно содержит две несмежные вершины v и u, то $N(y) \cap \{v, u\} = \emptyset$ и вершины x, y, v, u порождают подграф $K_{1,3}$. Это невозможно, т.к. упаковка P является оптимальной. Поэтому множество $(D' \setminus \{x\}) \cup \{z\}$ доминирует $V(G(\tilde{D}))$. Таким образом, существует доминирующее множество D'' графа $G(\tilde{D})$, содержащее не более $|D'|$ вершин. Множество $\tilde{D} \cup D''$ является доминирующим множеством графа G. Более того,

$$|\tilde{D} \cup D''| = |\tilde{D}| + |D''| \leqslant |\tilde{D}| + |D'| = |D| = \gamma(G).$$

Т.к. $\gamma(G(\tilde{D})) \leqslant |D''|$, то выполнено неравенство $\gamma(G) \geqslant \gamma(G(\tilde{D})) + |\tilde{D}|$. ■

3.3.2 Основной результат этого раздела

Теорема 3.3.1 *Для любого фиксированного c* ЗВДМ *для графов из $\mathcal{V}DSP(c)$ решается за полиномиальное время.*

Доказательство. Пусть G — произвольный граф из класса $\mathcal{V}DSP(c)$. Некоторая его оптимальная $(K_{1,3}, A_3)$-упаковка P может быть вычислена за полиномиальное время. Пусть D_{opt} — доминирующее множество графа G, имеющее минимальное количество вершин. По леммам 3.3.2 и 3.3.3 существует функция $g(\cdot): \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ такая, что мощность множества $D_{opt} \cap N_2(P)$ не превосходит значения функции $g(\cdot)$ в точке c. Пусть

$$\mathfrak{D}^*_G = \{D \in \mathfrak{D}_G | \ |D| \leqslant g(c)\}.$$

Следовательно, множество $\mathfrak{D}^*_G$ может быть вычислено за полиномиальное время. Пусть $D \in \mathfrak{D}^*_G$. Объединение множества D и любого доминирующего множества графа $G(D)$ с минимальным количеством вершин является доминирующим множеством графа G. Следовательно, выполнено неравенство

$\gamma(G) \leqslant |D| + \gamma(G(D))$. Отсюда и второй части леммы 3.3.4 выполнено соотношение

$$\gamma(G) = \min_{D \in \mathfrak{D}_G^*} (\gamma(G(D)) + |D|).$$

Т.к. $\mathfrak{D}_G^* \subseteq \mathfrak{D}_G$, то по первой части леммы 3.3.4 граф $G(D)$ принадлежит классу $\mathrm{Free}(\{K_{1,3}, A_3\})$ для любого $D \in \mathfrak{D}_G^*$. ЗВДМ может быть решена за полиномиальное время для графов из класса $\mathrm{Free}(\{K_{1,3}, A_3\})$ [25]. Поэтому для любого фиксированного c ЗВДМ для графов из класса $\mathcal{V}DSP(c)$ может быть решена за полиномиальное время. ■

3.4 Задача о реберном доминирующем множестве

3.4.1 Кликовая ширина графов и ее значение

Кликовая ширина — важный параметр теории графов. Это объясняется тем фактом, что многие задачи на графах могут быть решены за полиномиальное время в любом классе графов с ограниченной кликовой шириной (см., например, [33]). Более точно, для любого фиксированного числа C многие NP-полные задачи на графах становятся полиномиально разрешимыми во множестве всех графов, каждый из которых имеет кликовую ширину не более чем C. В частности, это верно для задач о независимом множестве и о вершинном доминирующем множестве [33].

Класс $\mathcal{S}$ — множество всех лесов, имеющих не более чем 3 листа в каждой из компонент связности. Следующий результат является достаточным условием ограниченности кликовой ширины в сильно наследственных классах графов. Он доказан в работе [23].

Лемма 3.4.1 *Если $\mathcal{X}$ — сильно наследственный класс графов и $\mathcal{S} \nsubseteq \mathcal{X}$, то существует константа $C(\mathcal{X})$ такая, что кликовая ширина любого графа из $\mathcal{X}$ не превосходит $C(\mathcal{X})$.*

Для любых c и p граф $pK'_{1,3}$ принадлежит классу $\mathcal{S}$ и $\mathcal{E}DSP(c)$ является сильно наследственным классом. Следовательно, по предыдущей и следующей леммам, кликовая ширина всех графов из $\mathcal{E}DSP(c)$ ограничена для любого c.

Лемма 3.4.2 *Пусть c — произвольное натуральное число и $c^* = \lceil \log_2(c) \rceil + 1$. Тогда справедливо включение $\mathcal{E}DSP(c) \subseteq \mathrm{Free}_s(\{c^* K'_{1,3}\})$.*

Доказательство. Матрица ограничений $A_e(K'_{1,3}) + I_6$ ЗРДМ для графа $K'_{1,3}$ совпадает (с точностью до перестановок строк и столбцов) с матрицей

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что $\det(M) = -2$. Следовательно, никакой граф из $\mathcal{E}DSP(c)$ не может содержать c^* непересекающихся по вершинам копий графа $K'_{1,3}$, иначе M содержит минор $(-2)^{c^*}$, причем $2^{c^*} > c$. Поэтому $\mathcal{E}DSP(c) \subseteq \mathrm{Free}_s(\{c^* K'_{1,3}\})$. ■

3.4.2 Основной результат этого раздела

Теорема 3.4.1 *Для любого фиксированного c* ЗРДМ *для графов из $\mathcal{E}DSP(c)$ может быть решена за полиномиальное время.*

Доказательство. Известно, что ЗРДМ полиномиально разрешима в любом классе графов с ограниченной кликовой шириной [55]. Отсюда, лемм 3.4.1 и 3.4.2 следует, что для любого фиксированного c ЗРДМ может быть решена для графов из $\mathcal{E}DSP(c)$ за полиномиальное время. ■

Заключение

В настоящей диссертации были рассмотрены различные постановки задач целочисленной оптимизации, такие как задача ЦЛП на полиэдре, заданном системой линейных неравенств, задача ЦЛП на полиэдре, заданном выпуклой оболочкой точек, линейные $\{0,1\}$-постановки задач о независимом множестве, о вершинном и о реберном доминирующих множествах. Все эти задачи рассматривались при дополнительном условии k-ограниченности матриц, входящих в ЦЛП-постановку задач. Был разработан полиномиальный алгоритм проверки существования внутренней целой точки в полиэдре достаточной ширины. Для задач ЦЛП на полиэдрах, заданных выпуклой оболочкой целых точек, приведены полиномиальные и субэкспоненциальные алгоритмы решения. Было доказано, что задачи о независимом множестве, о вершинном и о реберном доминирующих множествах полиномиально разрешимы при условии ограниченности спектра миноров матриц ограничений линейных $\{0,1\}$-постановок данных задач.

Возможные дальнейшие перспективы развития тематики диссертационного исследования состоят в обобщении ранее полученных результатов и рассмотрении новых задач, связанных с проблематикой ограниченного спектра миноров. Одна из таких задач состоит в следующем. Пусть $A \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ и $|\det(A)| = k > 0$, пусть $\Lambda(A)$ — решетка, базис которой составляют столбцы матрицы A. Рассмотрим задачу $\min\limits_{x \in \Lambda(A) \setminus \{\mathbf{0}\}} ||x||$, данная задача называется *задачей поиска минимального вектора решетки* (см., например, [27, 49, 66]). Оказывается, что задача поиска минимального вектора решетки при дополнительном условии ограниченности k может быть решена за полиномиальное время для норм $||x||_\infty$ и $||x||_p$ при любом $p \in \mathbb{N}$.

Полученные в данной диссертации результаты вместе с результатами современных работ других авторов [17, 24, 37, 56, 71], посвященных тематике матриц с ограниченными минорами, свидетельствуют как об актуальности данной области исследований, так и о ценности результатов настоящей диссертации.

Литература

[1] Алексеев В. Е., Захарова Д. В. Независимые множества в графах с ограниченными минорами расширенной матрицы инцидентности // Дискретный анализ и исследование операций. — 2010. — Т. 10, No 1. — С. 3–10.

[2] Бастраков С. И., Золотых Н. Ю. Использование идей алгоритма QUICKHULL в методе двойного описания // Вычислительные методы и программирование. — 2011. — Т. 23, No 2. — С. 232–237.

[3] Бастраков С. И., Золотых Н. Ю. Быстрый метод проверки правила Черникова в методе Фурье–Моцкина // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2015. — Т. 55, No 1. — С. 165–172.

[4] Веселов С. И., Чирков А. Ю. Оценки числа вершин целых полиэдров // Дискретный анализ и исследование операций. — 2007. — Т. 14, No 2. — С. 14–31.

[5] Веселов С. И., Чирков А. Ю. О вершинах неявно заданных целых полиэдров // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. — 2008. — No 1. — С. 118–123.

[6] Веселов С. И., Чирков А. Ю. О вершинах неявно заданных целых полиэдров (часть 2) // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. — 2008. — No 2. — С. 166–172.

[7] Грибанов Д. В., Малышев Д. С. Сложность некоторых задач на графах с ограниченными минорами их матриц ограничений // Журнал

Средневолжского математического общества.—2016.—Т. 18, No 4.—С. 11–23.

[8] Емеличев В. А., Ковалев М. М., Кравцов М. К. Многогранники, графы, оптимизация // Из-во: Наука — 1981. — 344 С.

[9] Золотых Н. Ю. Новая модификация метода двойного описания для построения остова многогранного конуса // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2012. — Т. 52, N 1. — С. 153–163.

[10] Моцкин Т. С., Райфа Х., Томпсон Д. Л., Тролл Р. М. Метод двойного описания. // Матричные игры. Сб. статей. Из-во.: Физматгиз. — 1961. — С. 81–109.

[11] Хинчин А. Я. Количественная концепция аппроксимационной теории Кронекера // Известия академии наук СССР, Серия математическая. — 1948. — No 12. — С. 113–122.

[12] Черников С. Н. Линейные неравенства // Из-во: Наука. — 1968. — 488 С.

[13] Черникова Н. В. Алгоритм для нахождения общей формулы неотрицательных решений системы линейных уравнений // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1964. —Т. 4, No 4. — С. 733–738.

[14] Шевченко В. Н. Качественные вопросы целочисленного программирования // Из-во: Физматлит. — 1995. — 192 С.

[15] Шевченко В. Н., Золотых Н. Ю. Линейное и целочисленное линейное программирование // Из-во: ННГУ. — 2004. — 154 С.

[16] Arnborg S., Proskurowski A. Linear time algorithms for NP-hard problems restricted to partial k-trees// Discrete Applied Mathematics. — 1989. — V. 23, No 1. — P. 11–24.

[17] Artmann S., Eisenbrand F., Glanzer C., Oertel T., Vempala S., Weismantel R. A note on non-degenerate integer programs with small sub-determinants // Operations Research Letters. — 2016. — V. 44, No 5. — P. 635–639.

[18] Banaszczyk W. Inequalities for convex bodies and polar reciprocal lattices in R^n II: Application of K-convexity // Discrete & Computational Geometry. — 1996. — V. 16, No 3. — P. 305–311.

[19] Banaszczyk W., Litvak A. E., Pajor A., Szarek S. J. The flatness theorem for non-symmetric convex bodies via the local theory of Banach spaces // Mathematics of operations research. — 1999 . — V. 24, No 3. — P. 728–750.

[20] Barvinok A. Polynomial time algorithm for counting integral points in polyhedra when the dimension is fixed // Mathematics of Operations Research. — 1994. — V. 19. — P. 769–779.

[21] Barvinok A., Pommersheim J. E. An algorithmic theory of lattice points in polyhedra // New Perspectives in Algebraic Combinatorics. — 1999. — V. 38. — P. 91–147.

[22] Blomer J. Closest vectors, successive minima, and dual HKZ-bases of lattices // Lecture Notes in Computer Science. — 2000. — V. 1853. — P. 248–259.

[23] Boliac R., Lozin V. On the clique-width of graphs in hereditary classes // Lecture Notes in Computer Science. — 2002. — V. 2518 — P. 44–54.

[24] Bonifas N., Di Summa M., Eisenbrand F., Hähnle N., Niemeier M. On sub-determinants and the diameter of polyhedra // Discrete & Computational Geometry. — 2014. — V. 52, No 1. — P. 102–115.

[25] Brandstädt A., Dragan F. F. On linear and circular structure of (claw, net)-free graphs // Discrete Applied Mathematics. — 2003. — V. 129, No 2–3. — P. 285–303.

[26] Burger E. Uber homoge nelineare Ungleichungssysteme // Angewandte Math. und Mech. — 1956. — V. 36, No 3–4. — P. 135–139.

[27] Cassels J.W. An introduction to the geometry of numbers // Publisher: Springer-Verlag. — 1997. — 343 P.

[28] Chaselle B. An optimal convex hull algorithm in any fixed dimension // Discrete & Computational Geometry. — 1993. — No 10. — P. 377–409.

[29] Chirkov A. Y., Zolotykh N. Y. On the number of irreducible points in polyhedra // Graphs and Combinatorics. — 2016. — doi: 10.1007/s00373-016-1683-1

[30] Clarkson K. L. Las Vegas algorithms for linear and integer programming when the dimension is small // Journal of the Association for Computing Machinery. — 1995. — V. 42. — P. 488–499.

[31] Cook W., Hartmann M.E., Kannan R., McDiarmid C. On integer points in polyhedra // Combinatorica. — 1992. — V. 12. — P. 27–37.

[32] Cormen T. H., Leiserson C. E., Rivest R. L., Stein C. Introduction to algorithms, third edition // Publisher: MIT Press. — 2009. — 1313 P.

[33] Courcelle B., Makowsky J., Rotics U. Linear time solvable optimization problems on graphs of bounded clique-width // Theory of Computing Systems. — 2000. — V. 33, No 2. — P. 125–150.

[34] Dadush D. Transference theorems in the geometry of numbers // http://cs.nyu.edu/courses/spring13/CSCI-GA.3033-013/lectures/transference.pptx. Accessed 10 August 2016.

[35] Eisenbrand F. Fast integer programming in fixed dimension // Lecture Notes in Computer Science. — 2003. — V. 2832. — P. 196–207.

[36] Eisenbrand F., Laue S. A linear algorithm for integer programming in the plane // Mathematical Programming. — 2005. — V. 102. — P. 249–259.

[37] Eisenbrand F., Vempala S. Geometric random edge // arXiv:1404.1568v5.

[38] Fukuda K., Prodon A. Double description method revisited // Lecture Notes in Computer Science. — 1996. — V. 1120. — P. 91–111.

[39] Garey M. R., Johnson D. S. Computers and intractability: a guide to the theory of NP-completeness // Publisher: W. H. Freeman and Company. — 1979. — 338 P.

[40] Gomory R. E. On the relation between intieger and non-integer solutions to linear programs // Proceedings of the National Academy of Sciences. — 1965. — V. 53, No 2. — P. 260–265.

[41] Gray R. M. Toeplitz and circulant matrices: a review // Foundations and Trends in Communications and Information Theory. — 2006. — V. 2, No 3. — P. 155–239.

[42] Gribanov D. V. The flatness theorem for some class of polytopes and searching an integer point // Springer Proceedings in Mathematics & Statistics. — 2013. — V. 104. — P. 37–45.

[43] Gribanov D. V., Chirkov A. J. The width and integer optimization on simplices with bounded minors of the constraint matrices // Optimization Letters. — 2016. — V. 10, No 6. — P. 1179–1189.

[44] Gribanov D. V., Veselov S. I. On integer programming with bounded determinants // Optimization Letters. — 2016. — V. 10, No 6. — P. 1169–1177.

[45] Haase C., Ziegler G. On the maximal width of empty lattice simplices // European Journal of Combinatorics. — 2000. — V. 21. — P. 111–119.

[46] Hanrot G., Stehle D. Improved analysis of Kannan's shortest lattice vector algorithm (extended abstract) // Lecture Notes in Comput. Science. — 2007. — V. 4622. — P. 170–186.

[47] Helfrich B. Algorithms to construct Minkowski reduced and Hermite reduced lattice bases // Theoretical Computer Science. —1985. — V. 41. — P. 125–139.

[48] Hu T. C. Integer programming and network flows // Publisher: Addison-Wesley. — 1970. — 452 P.

[49] Jünger M., Liebling T. M., Naddef D., Nemhauser G. L., Pulleyblank W. R., Reinelt G., Rinaldi G., Wolsey L. A. 50 years of integer programming 1958-2008 // Publisher: Springer-Verlag. — 2010. — 132 P.

[50] Kannan R. Minkowski's convex body theorem and integer programming // Mathematics of Operations Research. — 1987. — V. 12. — P. 415–440.

[51] Kannan R., Bachem A. Polynomial algorithms for computing the Smith and Hermite normal forms of an integer matrix // SIAM Journal on Computing. — 1979. — V. 8. — P. 499–507.

[52] Kantor J. M. On the width of lattice-free simplexes // Compositio Mathematica. — 1999. — V. 118. — P. 235–241.

[53] Karmarkar N. A new polynomial time algorithm for linear programming // Combinatorica. — 1984. — V. 4, No 4. — P. 373–395.

[54] Khachiyan L. G. Polynomial algorithms in linear programming // USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 1980. — V. 20, No 1. — P. 53–72.

[55] Kobler D., Rotics U. Edge dominating set and colorings on graphs with fixed clique-width // Discrete Applied Mathematics. — 2003. — V. 126, No 2–3. — P. 197–221.

[56] Kotnyek B. A generalization of totally unimodular and network matrices. PhD thesis // Publisher: Published by ProQuest LLC. — 2014. — 147 P.

[57] Lenstra H.W. Integer programming with a fixed number of variables // Mathematics of Operations Research. — 1983. — V. 8. — P. 538–548.

[58] Matousek J., Sharir M., Welzl E. A subexponential bound for linear programming // Algorithmica. — 1996. — V. 16. — P. 498–516.

[59] Micciancio D., Warinschi B. A linear space algorithm for computing the Hermite normal form // Proceedings of the 2001 international symposium on Symbolic and algebraic computation. — 2001. — P. 231–236.

[60] Nesterov Y. E., Nemirovsky A. S. Interior point polynomial methods in convex programming // Publisher: SIAM, Studies in Applied and Numerical Mathematics. — 1994. — 396 P.

[61] Papadimitriou C. H. On the complexity of integer programming // Journal of the Association for Computing Machinery. — 1981. — V. 28. — P. 765–768.

[62] Pardalos P. M., Han C. G., Ye Y. Interior point algorithms for solving nonlinear optimization problems // COAL Newsletter. — 1991. — V. 19. — P. 45–54.

[63] Pujol X., Stehle D. Rigorous and efficient short lattice vectors enumeration // Proceedings of 14th International Conference on the Theory and Application of Cryptology and Information Security. — 2008. — P. 390–405.

[64] Reed B. Mangoes and Blueberries // Combinatorica. — 1999. — V. 19, No 2. — P. 267–296.

[65] Rudelson M. Distances between non-symmetric convex bodies and the MM^* -estimate // Positivity. — 2000. — V. 4, No 2. — P. 161–178.

[66] Schrijver A. Theory of linear and integer programming // Publisher: John Wiley & Sons. — 1998. — 484 P.

[67] Schrijver A. Combinatorial optimization — polyhedra and efficiency // Publisher: Springer-Verlag. — 2003. — 1879 P.

[68] Sebö A. An introduction to empty lattice simplices // Lecture Notes in Computer Science. — 1999. — V. 1610. — P. 400–414.

[69] Storjohann A. Near optimal algorithms for computing Smith normal forms of integer matrices // Proceedings of the 1996 international symposium on Symbolic and algebraic computation. — 1996. — P. 267–274.

[70] Storjohann A., Labahn G. Asymptotically fast computation of Hermite normal forms of integer matrices // Proceedings of the 1996 international symposium on Symbolic and algebraic computation. — 1996. — P. 259–266.

[71] Veselov S. I., Chirkov A. J. Integer program with bimodular matrix // Discrete Optimization. — 2009. — V. 6, No 2. — P. 220–222.

[72] Whitesides S. H. A method for solving certain graph recognition and optimization problems, with applications to perfect graphs // Annals of Discrete Mathematics. — 1984. — V. 88. — P. 281–297.

[73] Zhendong W. Computing the smith forms of integer matrices and solving related problems. Doctoral Dissertation // Publisher: University of Delaware Newark, DE, USA. — 2005. — 111 P.

[74] Ziegler G. M. Lectures on polytopes // Publisher: Springer-Verlag, Graduate Texts in Mathematics. — 1995. — 370 P.