САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Ихсанов Лев Назарович

# Равномерные оценки приближений через второй модуль непрерывности

01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., доцент
Виноградов О. Л.

Санкт–Петербург – 2021

# Оглавление

# Введение

Настоящая диссертация посвящена вопросам приближения в пространствах ограниченных числовых функций, снабжённых sup–нормой. Автором получены новые результаты в задачах оценки погрешности приближения функции через её второй модуль непрерывности на множествах $[0,\ 1]$ и $\mathbb{R}$.

**Структура и объём диссертации.** Диссертация состоит из введения, из двух глав, разбитых на параграфы, а также из заключения и библиографии. Введение содержит обзоры обеих глав. Помимо основных результатов в этих обзорах даются исторические справки, основные определения и необходимые обозначения. Каждая из глав также содержит перечень используемых в ней определений и обозначений.

Формулы и утверждения имеют двойную нумерацию, где первая цифра – номер главы. Теоремы, не принадлежащие автору, имеют буквенную нумерацию.

Общий объём диссертации составляет 73 страницы. Библиография насчитывает 20 наименований.

# Обзор первой главы

**Определения и обозначения.** Через $B[0,\ 1]$ мы будем обозначать пространство ограниченных вещественнозначных функций, определённых на отрезке $[0,\ 1]$.

Важную роль будут играть функции

$$e_0(t) = 1, \quad e_1(t) = t, \quad p_{n,\,j}(t) = C_n^j t^j (1-t)^{n-j}.$$

Первым и вторым модулями непрерывности в пространстве $B[0,\,1]$ называются соответственно величины

$$\omega(f,\,h) = \sup_{|t|\le h,\, x\pm t\in[0,\,1]} |f(x+t) - f(x)|,$$
$$\omega_2(f,\,h) = \sup_{|t|\le h,\, x\pm t\in[0,\,1]} \left|f(x-t) - 2f(x) + f(x+t)\right|.$$

Напоминаем, что функции считаются определёнными в каждой точке.

Под $\operatorname{supp} F$ – носителем функционала $F$ – мы будем понимать наименьшее по включению замкнутое множество со свойством

$$\operatorname{supp} F \cap \operatorname{supp} f = \emptyset \Rightarrow F(f) = 0 \quad \forall f \in B[0,\,1].$$

Через $r(F)$ обозначим наименьшее число $r$, такое что

$$\operatorname{supp}(F) \subset [F(e_1) - r,\, F(e_1) + r].$$

Определим оператор $S_\sigma :\ B[0,\,1] \to B[0,\,1]$ формулой

$$S_\sigma f(x) = \begin{cases} f(2\sigma - x), & 2\sigma - x \in [0,\,1], \\ 0, & 2\sigma - x \notin [0,\,1] \end{cases}$$

Оператор $S_\sigma$ осуществляет симметрию графика функции $f$ относительно точки $\sigma$.

Через $\mathcal{F}$ будем обозначать множество линейных непрерывных положительных функционалов над $B[0,\,1]$ со свойствами

$$F(e_0) = 1,$$
$$F(f) = F(S_{F(e_1)}f).$$

**Историческая справка.** Предложенные Бернштейном в 1912 году полиномиальные операторы, названные впоследствии его именем, имеют вид

$$B_n f(x) = \sum_{j=0}^{n} p_{n,\,j}(x) f\left(\frac{j}{n}\right).$$

Бернштейн интерпретировал свою конструкцию с точки зрения теории вероятностей, а именно, $B_n f(x)$ представляет из себя математическое ожидание выигрыша в игре из $n$ партий с вероятностью победы, равной $x$, при условии, что награда за $k$ побед составляет $f\left(\frac{k}{n}\right)$. Вероятностный подход также использовался им для доказательства равномерной сходимости полиномов $B_n f$ к функции $f$.

В двадцатом веке были получены разнообразные оценки скорости этой сходимости, в частности, через модули непрерывности. Так, в [6] Сиккема показал, что для $f \in C[0,\,1]$ имеет место неравенство

$$\|f - B_n f\| \le \frac{4306 + 837\sqrt{6}}{5832}\omega\left(f,\, \frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Константа в этом неравенстве достигается при $n = 6$.

В серии статей, собранных в книге [5], Палтаня доказал следующую теорему.

**Теорема A.** Пусть $n \in \mathbb{N}$, $f \in B[0,\,1]$ и оператор $B_n$ определён формулой

$$B_n f(x) = \sum_{j=0}^{n} p_{n,\,j}(x) f\left(\frac{j}{n}\right).$$

Тогда

$$\|B_n f - f\| \le \omega_2\left(f,\, \frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

причём это неравенство является точным для каждого $n$.

Заметим, что в теории приближения установлено, что порядок шага $\frac{1}{\sqrt{n}}$ является оптимальным при оценке приближения операторами Бернштейна через второй модуль непрерывности. В качестве примера функции, у которой совпадают порядки убывания величин $\|f - B_n f\|$ и $\omega_2\left(f,\, \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, можно привести $f(x) = |2x - 1|$. Легко видеть, что $\omega_2\left(f,\, \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{2}{\sqrt{n}}$, при этом, как установлено в [19],

$$\|f - B_n f\| = \frac{C_{2n}^n}{2^{2n}} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$

Иными словами, порядок шага $\frac{1}{\sqrt{n}}$ не может быть сделан меньше. Более того, он не может быть сделан меньше, даже если ограничиться сколь угодно гладкими функциями. Это следует из теоремы Вороновской (см., например, [18, гл. X, §2]):

**Теорема B.** Пусть $x \in (0,\, 1)$, $f \in B[0,\, 1]$ и $\exists f''(x)$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} n\left(B_n f(x) - f(x)\right) = \frac{x(1-x)}{2} f''(x),$$

причём если $f \in C^2[0,\, 1]$, то сходимость равномерна.

Таким образом, порядок приближения полиномами Бернштейна не может быть лучше $\frac{1}{n}$ даже для очень хороших функций. При этом, порядок $\omega_2(f,\, h)$ для таких функций может быть равен $h^2$, из чего следует невозможность улучшения порядка шага $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Нас будет интересовать конструкция, предложенная Канторовичем [16]:

$$K_n = \sum_{j=0}^{n} p_{n,\,j} F_{n,\,j},$$

где $F_{n,\,j}$ – положительные операторы. Обращаем внимание, что функции $p_{n,\,j}$ образуют базис в пространстве полиномов степени не выше $n$. По этой причине к такому виду могут быть приведены различные положительные полиномиальные операторы. В частности, при

$$F_{n,\,j}(f) = f\left(\frac{j}{n}\right)$$

получаются полиномы Бернштейна, а при

$$F_{n,\,j}(f) = (n+1)\int\limits_{\frac{j}{n+1}}^{\frac{j+1}{n+1}} f(t)\,dt$$

получаются классические операторы Канторовича, которые также могут применяться для приближения в $L[0,\, 1]$. Историю вопроса можно посмотреть в [10].

**Основной результат**. Получен аналог теоремы А для операторов Канторовича, не требующий явного выражения функционалов $F_{n,\,j}$.

**Теорема 1.1.** Пусть $n \in \mathbb{N}$, $f \in B[0,\, 1]$ и оператор $B_n$ задан формулой

$$B_n f(x) = \sum_{j=0}^{n} p_{n,\,j}(x) F_{n,\,j}(f),$$

где $F_{n,\,j} \in \mathcal{F}$, $F_{n,\,j}(e_1) = \frac{j}{n}$, а кроме того, если $n > 10$, то

$$R = \max_{0\le j\le n} r(F_{n,\,j}) < \min\left\{\frac{1}{n},\, \frac{1}{4\sqrt{n}}\right\}.$$

Тогда
$$\|B_n f - f\| \le \omega_2\left(f,\, \frac{1}{\sqrt{n}} + h_n\right),$$
где
$$h_n = \begin{cases} 0, & n < 5, \\ \frac{n-2\sqrt{n}}{2n}, & 5 \le n \le 10, \\ \frac{2}{n} + \frac{3}{2}R, & 11 \le n < 60, \\ \frac{5}{2}R, & 60 \le n, \end{cases}$$
причём это неравенство является точным для каждого $n$.

В качестве примера допустимого набора функционалов (в случае измеримой функции $f$) можно привести следующую конструкцию.

$$F_{n,j}(f) =$$
$$= \sum_{k=1}^{m_j} c_k \left(f\left(\frac{j}{n} - t_k\right) + f\left(\frac{j}{n} + t_k\right)\right) + \int\limits_0^{t_0} \varphi_j(t) \left(f\left(\frac{j}{n} - t\right) + f\left(\frac{j}{n} + t\right)\right) dt,$$
где
$$m_j \in \mathbb{N},\, c_1, \ldots, c_{m_j} \ge 0,\, t_1,\, \ldots,\, t_{m_j},\, t_0 \in \left[0,\, \min\left\{\frac{1}{n},\, \frac{1}{4\sqrt{n}}\right\}\right),$$
$$\varphi_j \in L[0,\, 1],\, \varphi_j \ge 0,$$
$$\sum_{k=1}^{m_j} c_k + \int\limits_0^{t_0} \varphi_j(t)\, dt = \frac{1}{2}.$$

Легко видеть, что $F_{n,j} \in \mathcal{F}$, и, кроме того, $F_{n,j}(e_1) = \frac{j}{n}$.

Операторы Бернштейна являются частным случаем рассматриваемой конструкции, причём в этом случае $R = 0$, то есть теорема A следует из теоремы 1.1 для всех $n \in \mathbb{N} \setminus \{5,\, \ldots,\, 59\}$.

К сожалению, коэффициенты классических операторов Канторовича не обладают приведёнными выше свойствами, и аналогичной оценки для этих операторов пока не установлено. Однако, в случае измеримой функции $f$, вместо них можно рассмотреть похожую конструкцию с коэффициентами из приведённого выше семейства и удовлетворяющую условиям теоремы:

$$\widetilde{K}_n f(x) = f(0) + \sum_{j=1}^{n-1} p_{n,\,j}(x)\, \frac{1}{2t_j} \int\limits_{\frac{j}{n}-t_j}^{\frac{j}{n}+t_j} f(t)\, dt + f(1),$$

где $t_1, \ldots, t_{n-1} \in \left(0,\, \min\left\{\frac{1}{n},\, \frac{1}{4\sqrt{n}}\right\}\right)$.

Результаты исследований по этой теме опубликованы в статьях [14] и [15].

# Обзор второй главы

**Определения и обозначения.** Обозначим через $F$ пространство ограниченных измеримых вещественнозначных функций на множестве $\mathbb{R}$, обладающих свойством

$$\int\limits_k^{k+1} f(x)\, dx = \int\limits_0^1 f(x)\, dx \quad \forall k \in \mathbb{Z},$$

с нормой

$$\|f\| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|,$$

а через $F^0$ – подпространство $F$, состоящее из функций, обладающих свойством

$$\int\limits_k^{k+1} f(x)\, dx = 0 \qquad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Иными словами, пространство $F^0$ состоит из ограниченных измеримых функций, ортогональных кусочно-постоянным с узлами в целых точках.

Под $C$ мы будем понимать пространство непрерывных 1-периодических функций с такой же нормой.

Первый модуль непрерывности функции $f$ с шагом $h$ в пространстве $F$ определяется формулой

$$\omega(f,\, h) = \sup_{x\in\mathbb{R},\, |t|\le h} |f(x+t) - f(x)|\,,$$

а модули непрерывности чётного порядка – формулой

$$\omega_{2r}(f,\, h) = \sup_{x\in\mathbb{R},\, |t|\le h} \left| \sum_{k=0}^{2r} (-1)^k C_{2r}^k f\left(x - (r-k)\, t\right) \right|.$$

В частности,

$$\omega_2(f,\,h) = \sup_{x\in\mathbb{R},\,|t|\le h} |f(x-t) - 2f(x) + f(x+t)|\,.$$

Для формулировки результатов нам понадобятся множества

$$F_b = \left\{ f\in F^0 \middle| f\left(\frac{1+b}{2}\right) = \|f\| = 1 \right\}, \quad F^* = \bigcup_{b\in[0,1]} F_b,$$

а также функция

$$q(b) = \begin{cases} \frac{96}{27b^3-27b^2+9b+55}, & b\in\left[0,\,\frac{1}{3}\right], \\ \frac{8(11b^2+66b-13)}{3b^4-69b^3+17b^2+385b-80}, & b\in\left(\frac{1}{3},\,1\right]. \end{cases}$$

Заметим, что функция $q(b)$ непрерывна на отрезке $[0,\,1]$, имеет на этом отрезке ровно два интервала монотонности и достигает минимума между точками 0.43 и 0.44, причём

$$q(b) > 1.6721.$$

Наконец, через $E_0(f)$ обозначается наилучшее приближение $f$ постоянными, то есть

$$E_0(f) = \inf_{c\in\mathbb{R}} \|f-c\|.$$

Нас будут интересовать величины

$$J_2^* = \sup_{f\in F} \frac{E_0(f)}{\omega_2(f,\,1)}, \quad W_2^* = \sup_{f\in F^0} \frac{\|f\|}{\omega_2(f,\,1)},$$

с соглашением $\frac{0}{0} = 0$. Это оправдано, поскольку для случая прямой из $\omega_2(f,\,h) = 0$ следует $f = 0$.

**Историческая справка.** В своей диссертации [3] Джексон рассмотрел наилучшее приближение на различных классах функций и получил асимптотические оценки величины $E_n(f)$. Кроме того им были получены неравенства вида

$$E_n(f) \le C\omega(f,\,h_n).$$

Аналогичные неравенства с модулями непрерывности произвольного порядка в различных задачах аппроксимации принято называть неравенствами типа Джексона. Сегодня результаты такого типа получены для многих пространств функций и приближающих классов, но точные константы в них известны далеко не всегда. С историей и современным состоянием теории неравенств типа Джексона можно ознакомиться в обзорных статьях [9, 12].

Тема второй главы связана с одной стороны с вопросом о точном значении константы в неравенстве

$$E_n(f) \le C_r(\gamma)\ \omega_{2r}\left(f,\ \frac{\gamma\pi}{n}\right),$$

где $f \in C$. Результаты в этом направлении, полученные в [2], позже были улучшены в [9].

С другой стороны, в теории приближения известен следующий результат для старших модулей непрерывности:

$$\sup_{f\in C} \frac{\left\| f - \int\limits_0^1 f(t)\,dt \right\|}{\omega_{2r}(f,\ 1)} = \frac{1}{C_{2r}^r},$$

где точность верхней грани была доказана в [7].

Если рассматривать вместо $C$ пространство $F$, то, поскольку

$$f - \int\limits_0^1 f(x)\,dx \in F^0,$$

получается, что

$$\sup_{f\in F} \frac{\left\| f - \int\limits_0^1 f(x)\,dx \right\|}{\omega_{2r}(f,\ 1)} = \sup_{f\in F^0} \frac{\|f\|}{\omega_{2r}(f,\ 1)},$$

то есть соответствующая константа так же является точной для оценки нормы функции из $F^0$ через её модуль непрерывности степени $2r$. Таким образом, константы $J_2^*$ и $W_2^*$ являются точными в соответствующих классических неравенствах для пространства $F$ в случае $r = 1$.

В [4] Ю. Крякин установил, что

$$\sup_{f\in F^0} \frac{\|f\|}{\omega_{2r}(f,\ 1)} \le \frac{1 + H_r}{C_{2r}^r},$$

где $H_r$ – гармоническое число, и предположил возможную связь этой задачи с вопросом о порядке величины $C_r(\gamma)$. Так же он связывал эту тематику с константами Уитни [8, 17].

Его оценка была улучшена в [11].

Кроме того, Крякиным было показано, что

$$0.5058 \le W_2^* \le 0.6244,$$

и к тому же, что для определения величины $W_2^*$ можно ограничиться рассмотрением функций $f$, для которых

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f| = \sup_{x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]} |f|.$$

Аналогичный вопрос касательно $\omega(f,\, 1)$ не представляет большого интереса, а именно, легко показать, что

$$\sup_{f\in F^0} \frac{\|f\|}{\omega(f,\, 1)} = \frac{1}{2}.$$

**Основные результаты.** Установлено, что $J_2^* = W_2^*$. При этом удалось значительно сузить область для поиска супремума и улучшить оценку для константы $W_2^*$, точное значение которой пока остаётся неизвестным. Сужение области поиска осуществляется в несколько этапов. Сперва мы установим, что вместо пространства $F$ можно ограничиться множеством $F^*$, более того, верна

**Теорема 2.1.**

$$J_2^* = W_2^* = \sup_{f\in F^*} \frac{\|f\|}{\omega_2(f,\, 1)} = \frac{1}{\inf\limits_{f\in F^*} \omega_2(f,\, 1)}.$$

**Замечание.** В периодическом случае

$$W_2^* = J_2^* = \frac{1}{2}.$$

Этот результат можно найти в [7, замечание 5].

Следовательно, задача вычисления $J_2^*$ сводится к исследованию поведения величины $\inf\limits_{f\in F_b} \omega_2(f,\, 1)$ при $b \in [0,\, 1]$. Нижнюю оценку этой величины даёт

**Теорема 2.2.** Пусть $f \in F_b$. Тогда

$$q(b) \le \omega_2(f,\, 1).$$

Для верхней оценки мы строим функцию $f^*$ из множества $F^*$ со вторым модулем непрерывности равным $\frac{32}{19}$. Таким образом,

$$1.6721 \leq q(b) \leq \inf_{f \in F^*} \omega_2(f^*,\, 1) \leq \frac{32}{19},$$

откуда, согласно теореме 2.1 и замечанию относительно свойств $q(b)$, следует

**Теорема 2.3**

$$\frac{19}{32} = 0.59375 \leq J_2^* \leq 0.5981,$$

причём

$$J_2^* = \sup_{b \in [b_0,\, b_1]} \frac{1}{\inf\limits_{f \in F_b} \omega_2(f,\, 1)},$$

где точки $\frac{1}{3} < b_0 < b_1 < 1$ являются корнями уравнения

$$q(b) = \frac{32}{19}.$$

Для доказательств разработан метод, заключающийся в последовательном получении неравенств, связывающих средние значения функции с её вторым модулем непрерывности, при помощи методов линейного программирования. Функция $f^*$, используемая для нижней оценки, строится так, чтобы обратить некоторые из этих неравенств в равенства.

Системы линейных уравнений решены при помощи программного пакета Maple. Результаты этой главы опубликованы в статье [13].

# Глава 1.
# Точная оценка приближения абстрактными операторами типа Канторовича через второй модуль непрерывности

## 1.1 Введение

**Определения и обозначения.** Через $B[0,\,1]$ мы будем обозначать пространство ограниченных вещественнозначных функций, определённых на отрезке $[0,\,1]$.

Важную роль будут играть функции

$$e_0(t) = 1, \quad e_1(t) = t, \quad p_{n,j}(t) = C_n^j t^j (1-t)^{n-j}.$$

Вторым модулем непрерывности в пространстве $B[0,\,1]$ называется величины

$$\omega_2(f,\,h) = \sup_{|t|\le h,\, x\pm t\in[0,\,1]} |f(x-t) - 2f(x) + f(x+t)|\,.$$

Напоминаем, что функции считаются определёнными в каждой точке.

Под $\operatorname{supp} F$ – носителем функционала $F$ – мы будем понимать наименьшее по включению замкнутое множество со свойством

$$\operatorname{supp} F \cap \operatorname{supp} f = \emptyset \Rightarrow F(f) = 0 \quad \forall f \in B[0,\,1].$$

Через $r(F)$ обозначим наименьшее число $r$, такое что

$$\operatorname{supp}(F) \subset [F(e_1) - r,\, F(e_1) + r].$$

Определим операторы $T_\sigma,\, S_\sigma : B[0,\,1] \to B[0,\,1]$, формулами

$$S_\sigma f(x) = \begin{cases} f(2\sigma - x), & 2\sigma - x \in [0,\,1], \\ 0, & 2\sigma - x \notin [0,\,1] \end{cases}$$

$$T_\sigma f(x) = \begin{cases} f(\sigma + x), & \sigma + x \in [0,\, 1], \\ 0, & \sigma + x \notin [0,\, 1] \end{cases}$$

Операторы $T_\sigma$ и $S_\sigma$ осуществляют сдвиг и симметрию графика функции $f$, соответственно.

Через $\mathcal{F}$ будем обозначать множество линейных непрерывных положительных функционалов над $B[0,\, 1]$ со свойствами

$$F(e_0) = 1, \tag{1.1}$$

$$F(f) = F(S_{F(e_1)} f). \tag{1.2}$$

Кроме того, при фиксированном $n \in \mathbb{N}$ мы будем использовать индексные функции

$$\tau(t) = \min\left\{ i \in \mathbb{N}_0 \;\middle|\; \frac{i}{n} > t \right\}, \qquad \overline{\tau}(t) = \min\left\{ i \in \mathbb{N}_0 \;\middle|\; \frac{i}{n} \geq t \right\},$$

$$\sigma(t) = \max\left\{ i \in \mathbb{N}_0 \;\middle|\; \frac{i}{n} < t \right\}, \qquad \overline{\sigma}(t) = \max\left\{ i \in \mathbb{N}_0 \;\middle|\; \frac{i}{n} \leq t \right\}. \tag{1.3}$$

**Основной результат**. Настоящая глава посвящена доказательству следующего результата.

**Теорема 1.1.** Пусть $n \in \mathbb{N}$, $f \in B[0,\, 1]$ и оператор $B_n$ задан формулой

$$B_n f(x) = \sum_{j=0}^{n} p_{n,\,j}(x) F_{n,\,j}(f),$$

где $F_{n,\,j} \in \mathcal{F}$, $F_{n,\,j}(e_1) = \frac{j}{n}$, а кроме того, если $n > 10$, то

$$R = \max_{0 \leq j \leq n} r(F_{n,\,j}) < \min\left\{ \frac{1}{n},\, \frac{1}{4\sqrt{n}} \right\}.$$

Тогда

$$\|B_n f - f\| \leq \omega_2\left(f,\, \frac{1}{\sqrt{n}} + h_n\right),$$

где

$$h_n = \begin{cases} 0, & n < 5, \\ \frac{n - 2\sqrt{n}}{2n}, & 5 \leq n \leq 10, \\ \frac{2}{n} + \frac{3}{2}R, & 11 \leq n < 60, \\ \frac{5}{2}R, & n \leq 60, \end{cases}$$

причём это неравенство является точным для каждого $n$.

## 1.2 Леммы

Помимо определения, мы будет использовать следующие свойства функционалов из $\mathcal{F}$.

**Лемма 1.1.** Пусть $F \in \mathcal{F}$. Тогда

$$r(F) \leq F(e_1) \leq 1 - r(F), \tag{1.4}$$

и

$$F(T_\sigma f) = F(S_{F(e_1)+\frac{\sigma}{2}} f), \tag{1.5}$$

для любого $\sigma$, удовлетворяющего условию

$$\sigma + t,\ \ 2F(e_1) - t + \sigma \in [0,\ 1] \quad \forall t \in \operatorname{supp} F.$$

*Доказательство.* Если $F(e_1) = \frac{1}{2}$, то $r(F) \leq \frac{1}{2}$ по определению.

Пусть $F(e_1) < \frac{1}{2}$ (случай $F(e_1) > \frac{1}{2}$ рассматривается аналогично). Тогда

$$1 = F(e_0) = F(S_{F(e_1)} e_0) = F(\mathbb{1}_{[0,\ 2F(e_1)]}),$$

откуда следует, что $F(\mathbb{1}_{(2F(e_1),\, 1]}) = 0$. В силу положительности $F$ это значит, что если $\operatorname{supp} f \subset (2F(e_1),\ 1]$, то $F(f) = 0$. Иными словами, $\operatorname{supp} F \subset [0,\ 2F(e_1)]$, откуда следует (1.4).

Пусть

$$\sigma + t,\ \ 2F(e_1) - t + \sigma \in [0,\ 1].$$

Тогда имеет место соотношение

$$S_{F(e_1)} T_\sigma f(t) = f(2F(e_1) - t + \sigma) = S_{F(e_1)+\frac{\sigma}{2}} f(t),$$

откуда следует

$$F(T_\sigma f) = F(S_{F(e_1)} T_\sigma f) = F(S_{F(e_1)+\frac{\sigma}{2}} f).$$

$\square$

Доказательство теоремы 1.1 будет проводиться поточечно. Таким образом, нашей основной задачей является получение оценок вида

$$|F(f) - F(e_0)f(x)| \le F(e_0)\omega_2(f,\, h),$$

где $x \in (0,\, 1)$, $f \in B[0,\, 1]$, $F$ – функционал над $B[0,\, 1]$.

Сформулируем достаточный для этого список условий.

**Лемма 1.2.** Пусть $M > 0$, $f \in B[0,\, 1]$,

$$F = \sum_{i \in \mathcal{I}} \gamma_i F_i,$$

где $\mathcal{I}$ – конечный набор индексов, $\gamma_i > 0$, $F_i$ – линейные функционалы над $B[0,\, 1]$, причём $F_i(e_0) = 1$, $y_i = F_i(e_1)$, а точка $x$, определённая равенством

$$F(e_1 - xe_0) = 0,$$

принадлежит интервалу $(0,\, 1)$.

Пусть найдётся такое множество $Z \subset (0,\, 1)$, а для каждого $z \in Z$ такие непересекающиеся непустые наборы индексов $I(z)$, $J(z) \subset \mathcal{I}$ со свойством

$$y_i < z \le y_j \quad \forall i \in I(z),\, \forall j \in J(z), \tag{1.6}$$

что выполнены следующие условия:

**1)** $x \in Z$, причём $I(x) \cup J(x) = \mathcal{I}$,

**2)** для любого $z \in Z$ выполнено

$$\sum_{i \in I(z)} \gamma_i (z - y_i) + \sum_{j \in J(z)} \gamma_j (z - y_j) \ge 0, \tag{1.7}$$

**3)** Для любого $z \in Z$ и для любого $i \in I(z)$ выполнено хотя бы одно из двух: или

$$\left| \frac{y_j - z}{y_j - y_i} F_i(f) + \frac{z - y_i}{y_j - y_i} F_j(f) - f(z) \right| \le M, \quad \forall j \in J(z), \tag{1.8}$$

или найдётся такая точка $z_i \in Z$, что $I(z_i)$, $J(z_i) \subset J(z)$,

$$\left| \frac{y_j - z}{y_j - y_i} F_i(f) + \frac{z - y_i}{y_j - y_i} F_j(f) - f(z) \right| \le M, \quad \forall j \in J(z) \setminus J(z_i), \tag{1.9}$$

и

$$\left| \frac{z - z_i}{z - y_i} F_i(f) + \frac{z_i - y_i}{z - y_i} f(z) - f(z_i) \right| \le \left( \frac{z_i - y_i}{z - y_i} - 1 \right) M. \tag{1.10}$$

Тогда
$$|F(f)-F(e_0)f(x)|\le F(e_0)M.$$

*Доказательство.* Пусть
$$\gamma=\sum_{i\in I(x)}\gamma_i(x-y_i)=\sum_{j\in J(x)}\gamma_j(y_j-x).$$

Последнее равенство следует из определения точки $x$ и условия **1)**:
$$0=F(e_1-xe_0)=\sum_{i\in\mathcal{I}}\gamma_i(y_i-x)=\sum_{i\in I(x)}\gamma_i(y_i-x)-\sum_{i\in J(x)}\gamma_j(x-y_j).$$

Для начала установим справедливость следующих тождеств, которыми мы будем пользоваться:
$$F(e_0)=\sum_{i\in I(x)}\sum_{j\in J(x)}\frac{\gamma_i\gamma_j(y_j-y_i)}{\gamma}, \tag{1.11}$$

$$\begin{aligned}&F(f)-F(e_0)f(x)=\\&\quad=\sum_{i\in I(x)}\sum_{j\in J(x)}\frac{\gamma_i\gamma_j(y_j-y_i)}{\gamma}\left(\frac{y_j-x}{y_j-y_i}F_i(f)+\frac{x-y_i}{y_j-y_i}F_j(f)-f(x)\right).\end{aligned} \tag{1.12}$$

Имеем
$$\begin{aligned}\sum_{i\in I(x)}\sum_{j\in J(x)}\frac{\gamma_i\gamma_j(y_j-y_i)}{\gamma}&=\sum_{i\in I(x)}\sum_{j\in J(x)}\frac{\gamma_i\gamma_j(y_j-x)}{\gamma}+\sum_{i\in I(x)}\sum_{j\in J(x)}\frac{\gamma_i\gamma_j(x-y_i)}{\gamma}=\\&=\sum_{i\in I(x)}\gamma_i\left(\frac{\sum\limits_{j\in J(x)}\gamma_j(y_j-x)}{\gamma}\right)+\sum_{j\in J(x)}\gamma_j\left(\frac{\sum\limits_{i\in I(x)}\gamma_i(x-y_i)}{\gamma}\right)=\\&=\sum_{i\in I(x)}\gamma_i+\sum_{j\in J(x)}\gamma_j=\sum_{i\in\mathcal{I}}\gamma_i=F(e_0),\end{aligned}$$

а с учётом этого

$$
\begin{gathered}
F(f)-F(e_0)f(x)=\sum_{i\in\mathcal{I}}\gamma_iF_i(f)-F(e_0)f(x)=\\
=\sum_{i\in I(x)}\gamma_iF_i(f)+\sum_{j\in J(x)}\gamma_jF_j(f)-\sum_{i\in I(x)}\sum_{j\in J(x)}\frac{\gamma_i\gamma_j(y_j-y_i)}{\gamma}f(x)=\\
=\sum_{i\in I(x)}\gamma_iF_i(f)\left(\sum_{j\in J(x)}\frac{\gamma_j(y_j-x)}{\gamma}\right)+\sum_{j\in J(x)}\gamma_jF_j(f)\left(\sum_{i\in I(x)}\frac{\gamma_i(x-y_i)}{\gamma}\right)-\\
-\sum_{i\in I(x)}\sum_{j\in J(x)}\frac{\gamma_i\gamma_j(y_j-y_i)}{\gamma}f(x)=\\
=\sum_{i\in I(x)}\sum_{j\in J(x)}\frac{\gamma_i\gamma_j(y_j-x)}{\gamma}F_i(f)+\sum_{j\in J(x)}\sum_{i\in I(x)}\frac{\gamma_j\gamma_i(x-y_i)}{\gamma}F_j(f)-\\
-\sum_{i\in I(x)}\sum_{j\in J(x)}\frac{\gamma_i\gamma_j(y_j-y_i)}{\gamma}f(x)=\\
\sum_{i\in I(x)}\sum_{j\in J(x)}\frac{\gamma_i\gamma_j(y_j-y_i)}{\gamma}\left(\frac{y_j-x}{y_j-y_i}F_i(f)+\frac{x-y_i}{y_j-y_i}F_j(f)-f(x)\right).
\end{gathered}
$$

Теперь заметим, что если для точки $x$ и для каждого $i\in I(x)$ выполнено условие (1.8), то справедливость леммы следует из (1.11) и (1.12):

$$
\begin{gathered}
|F(f)-f(x)F(e_0)|\le\\
\le\sum_{i\in I(x)}\sum_{j\in J(x)}\frac{\gamma_i\gamma_j(y_j-y_i)}{\gamma}\left|\frac{y_j-x}{y_j-y_i}F_i(f)+\frac{x-y_i}{y_j-y_i}F_j(f)-f(x)\right|\le\\
\le\left(\sum_{i\in I(x)}\sum_{j\in J(x)}\frac{\gamma_i\gamma_j(y_j-y_i)}{\gamma}\right)M=F(e_0)M.
\end{gathered}
$$

Перейдём к рассмотрению общего случая.

Доказательство проведём индукцией по $m=|J(x)|$, где через $|\cdot|$ мы обозначаем мощность множества.

Если $m=1$ и $i\in I(x)$, то требования к точке $z_i$ из **3**) не могут выполниться, так как по условию

$$
I(z_i)\ne\emptyset,\quad J(z_i)\ne\emptyset,\quad I(z_i)\cap J(z_i)=\emptyset,
$$

а значит, выполняется условие (1.8). В этом случае лемма уже доказана.

Пусть утверждение верно при $m > 1$ и $|J(x)| < m$, проверим, что оно верно при $|J(x)| = m$. Для этого достаточно показать, что для всех $i \in I(x)$

$$\left|\sum_{j\in J(x)} \frac{\gamma_i\gamma_j(y_j-y_i)}{\gamma}\left(\frac{y_j-x}{y_j-y_i}F_i(f)+\frac{x-y_i}{y_j-y_i}F_j(f)-f(x)\right)\right| \leq$$
$$\leq \left(\sum_{j\in J(x)} \frac{\gamma_i\gamma_j(y_j-y_i)}{\gamma}\right)M, \quad (1.13)$$

так как в этом случае, с учётом (1.11) и (1.12), получим

$$|F(f)-f(x)F(e_0)| \leq$$
$$\leq \sum_{i\in I(x)}\left|\sum_{j\in J(x)} \frac{\gamma_i\gamma_j(y_j-y_i)}{\gamma}\left(\frac{y_j-x}{y_j-y_i}F_i(f)+\frac{x-y_i}{y_j-y_i}F_j(f)-f(x)\right)\right| \leq$$
$$\leq \left(\sum_{i\in I(x)}\sum_{j\in J(x)} \frac{\gamma_i\gamma_j(y_j-y_i)}{\gamma}\right)M = F(e_0)M.$$

Если для индекса $i \in I(x)$ выполняется условие (1.8) при $z = x$, то из этого следует (1.13). Иначе существует точка $x_i$, со свойствами (1.9) и (1.10), причём $I(x_i),\ J(x_i) \subset J(x)$.

Обозначим

$$\mu_i = \frac{\sum\limits_{j\in J(x_i)}\gamma_j(y_j-x_i)}{\sum\limits_{j\in I(x_i)}\gamma_j(x_i-y_j)}, \quad H_i = \mu_i\sum_{j\in I(x_i)}\gamma_jF_j + \sum_{j\in J(x_i)}\gamma_jF_j,$$

$$P_i(t) = \frac{x-t}{x-y_i}F_i(f) + \frac{t-y_i}{x-y_i}f(x),$$

$$S_i = \left|\sum_{j\in J(x)} \frac{\gamma_i\gamma_j(y_j-y_i)}{\gamma}\left(\frac{y_j-x}{y_j-y_i}F_i(f)+\frac{x-y_i}{y_j-y_i}F_j(f)-f(x)\right)\right|$$

и сперва покажем, что

$$S_i \leq \frac{\gamma_i}{\gamma}\left(\sum_{j\in J(x)\setminus J(x_i)}\gamma_j(y_j-y_i) - \mu_i\sum_{j\in I(x_i)}\gamma_j(y_j-y_i) + (x_i-x)\,H_i(e_0)\right)M+$$
$$+\frac{\gamma_i(x-y_i)}{\gamma}|H_i(f)-f(x_i)H_i(e_0)|. \quad (1.14)$$

Обращаем внимание, что в силу условия (1.6) и поскольку $I(x_i)$, $J(x_i) \neq \emptyset$, величина $\mu_i$ корректно определена и неотрицательна. Более того, из (1.7) следует, что $\mu_i \leq 1$.

Также отметим, что в силу свойств функционалов $F_j$

$$F_j(f-P_i) = \frac{y_j-y_i}{x-y_i}\left(\frac{y_j-x}{y_j-y_i}F_i(f)+\frac{x-y_i}{y_j-y_i}F_j(f)-f(x)\right),$$

откуда, с учётом условия (1.9) для $j \in J(x) \setminus J(x_i)$, верно

$$|F_j(f-P_i)| \leq \frac{y_j-y_i}{x-y_i}M.$$

В силу вышесказанного имеем

$$S_i = \left|\sum_{j\in J(x)} \frac{\gamma_i\gamma_j(x-y_i)}{\gamma}\frac{(y_j-y_i)}{x-y_i}\left(\frac{y_j-x}{y_j-y_i}F_i(f)+\frac{x-y_i}{y_j-y_i}F_j(f)-f(x)\right)\right| =$$

$$= \left|\sum_{j\in J(x)} \frac{\gamma_i\gamma_j(x-y_i)}{\gamma}F_j(f-P_i)\right| \leq \sum_{j\in J(x)\setminus(J(x_i)\cup I(x_i))} \frac{\gamma_i\gamma_j(x-y_i)}{\gamma}|F_j(f-P_i)| +$$

$$+\left|(1-\mu_i)\sum_{j\in I(x_i)} \frac{\gamma_i\gamma_j(x-y_i)}{\gamma}F_j(f-P_i)+\right.$$

$$\left.+\frac{\gamma_i(x-y_i)}{\gamma}\left(\mu_i\sum_{j\in I(x_i)}\gamma_jF_j(f-P_i)+\sum_{j\in J(x_i)}\gamma_jF_j(f-P_i)\right)\right| \leq$$

$$\leq \sum_{j\in J(x)\setminus(J(x_i)\cup I(x_i))} \frac{\gamma_i\gamma_j(x-y_i)}{\gamma}|F_j(f-P_i)| +$$

$$+(1-\mu_i)\sum_{j\in I(x_i)} \frac{\gamma_i\gamma_j(x-y_i)}{\gamma}|F_j(f-P_i)| + \frac{\gamma_i(x-y_i)}{\gamma}|H_i(f-P_i)| \leq$$

$$\leq \sum_{j\in J(x)\setminus(J(x_i)\cup I(x_i))} \frac{\gamma_i\gamma_j(y_j-y_i)}{\gamma}M + (1-\mu_i)\sum_{j\in I(x_i)} \frac{\gamma_i\gamma_j(y_j-y_i)}{\gamma}M+$$

$$+\frac{\gamma_i(x-y_i)}{\gamma}\left(|f(x_i)-P_i(x_i)|\,H_i(e_0)+|H_i(f-P_i)-(f(x_i)-P_i(x_i))H_i(e_0)|\right),$$

откуда, с учётом (1.10),

$$\begin{aligned}S_i \le \frac{\gamma_i}{\gamma}\Big( \sum_{j\in J(x)\setminus J(x_i)} \gamma_j(y_j-y_i)M - \mu_i \sum_{j\in I(x_i)} \gamma_j(y_j-y_i)M + \\ + (x-y_i)\left|f(x_i)-P_i(x_i)\right| H_i(e_0)\Big) + \\ + \frac{\gamma_i(x-y_i)}{\gamma}\left(\left|H_i(f)-f(x_i)H_i(e_0)\right| + \left|H_i(P_i)-P_i(x_i)H_i(e_0)\right|\right) \le \\ \le \frac{\gamma_i}{\gamma}\Big( \sum_{j\in J(x)\setminus J(x_i)} \gamma_j(y_j-y_i) - \mu_i \sum_{j\in I(x_i)} \gamma_j(y_j-y_i) + (x-y_i)\left(\frac{x_i-y_i}{x-y_i}-1\right) H_i(e_0)\Big)M + \\ + \frac{\gamma_i(x-y_i)}{\gamma}\left(\left|H_i(f)-f(x_i)H_i(e_0)\right| + \left|H_i(P_i)-P_i(x_i)H_i(e_0)\right|\right).\end{aligned}$$

Для доказательства (1.14) осталось заметить, что

$$\begin{aligned}H_i(e_1-x_ie_0) = \\ = \mu_i \sum_{j\in I(x_i)} \gamma_j F_j(e_1-x_ie_0) + \sum_{j\in J(x_i)} \gamma_j F_j(e_1-x_ie_0) = \\ = \mu_i \sum_{j\in I(x_i)} \gamma_j(y_j-x_i) + \sum_{j\in J(x_i)} \gamma_j(y_j-x_i) = \\ = -\sum_{j\in J(x_i)} \gamma_j(y_j-x_i) + \sum_{j\in J(x_i)} \gamma_j(y_j-x_i) = 0, \quad (1.15)\end{aligned}$$

откуда следует, что $H_i(P) - P(x_i)H_i(e_0) = 0$ для любого полинома $P$ степени не выше первой.

Теперь проверим, что функционалы $H_i$ удовлетворяют требованиям леммы при том же $M$, $\mathcal{I} = I(x_i) \cup J(x_i)$ и теми же функционалами $F_j$. Как видно из (1.15), роль точки $x$ для оператора $H_i$ играет точка $x_i$.

Рассмотрим множество

$$Z_i = \{x_i\} \cup \{z \in Z \,|\, I(z),\, J(z) \subset J(x_i)\} \subset Z.$$

В качестве индексных множеств для $z \in Z_i$ сохраним $I(z)$ и $J(z)$.

Ясно, что при этом выполнено условие **1)**. Путь $z \in Z_i$. Проверка условий **2)** и **3)** проводится элементарно в силу сохранения множеств $I(z)$ и $J(z)$, и коэффициентов $\gamma_j$ при $j \in J(x_i)$. Отдельно поясним, что в случае $z = x_i$ при проверки (1.7) имеем

$$\mu_i \sum_{j\in I(x_i)} \gamma_j(x_i-y_j) + \sum_{j\in J(x_i)} \gamma_j(x_i-y_j) = H_i(x_ie_0-e_1) = 0.$$

Таким образом, поскольку

$$|J(x_i)| < |J(x_i)| + |I(x_i)| \leq |J(x)| = m,$$

согласно индукционному предположению

$$|H_i(f) - H_i(e_0)f(x_i)| \leq \ H_i(e_0)\, M,$$

и (1.14) можно переписать как

$$\left| \sum_{j \in J(x)} \frac{\gamma_i \gamma_j (y_j - y_i)}{\gamma} \left( \frac{y_j - x}{y_j - y_i} F_i(f) + \frac{x - y_i}{y_j - y_i} F_j(f) - f(x) \right) \right| \leq$$
$$\leq \frac{\gamma_i}{\gamma} \Big( \sum_{j \in J(x) \setminus J(x_i)} \gamma_j (y_j - y_i) - \mu_i \sum_{j \in I(x_i)} \gamma_j (y_j - y_i) + (x_i - y_i) H_i(e_0) -$$
$$- (x - y_i) H_i(e_0) \Big) M + \frac{\gamma_i (x - y_i)}{\gamma} H_i(e_0) M \leq$$
$$\leq \frac{\gamma_i}{\gamma} \left( \sum_{j \in J(x) \setminus J(x_i)} \gamma_j (y_j - y_i) - \mu_i \sum_{j \in I(x_i)} \gamma_j (y_j - y_i) + (x_i - y_i) H_i(e_0) \right) M.$$

Для доказательства (1.13) осталось заметить, что

$$\sum_{j \in J(x) \setminus J(x_i)} \gamma_j (y_j - y_i) - \mu_i \sum_{j \in I(x_i)} \gamma_j (y_j - y_i) + (x_i - y_i) H_i(e_0) =$$
$$= \sum_{j \in J(x) \setminus J(x_i)} \gamma_j (y_j - y_i) - \mu_i \sum_{j \in I(x_i)} \gamma_j (y_j - y_i) +$$
$$+ \mu_i \sum_{j \in I(x_i)} \gamma_j (x_i - y_i) + \sum_{j \in J(x_i)} \gamma_j (x_i - y_i) =$$
$$= \sum_{j \in J(x) \setminus J(x_i)} \gamma_j (y_j - y_i) + \mu_i \sum_{j \in I(x_i)} \gamma_j (x_i - y_j) + \sum_{j \in J(x_i)} \gamma_j (x_i - y_i) =$$
$$= \sum_{j \in J(x) \setminus J(x_i)} \gamma_j (y_j - y_i) + \sum_{j \in J(x_i)} \gamma_j (y_j - x_i) + \sum_{j \in J(x_i)} \gamma_j (x_i - y_i) =$$
$$= \sum_{j \in J(x) \setminus J(x_i)} \gamma_j (y_j - y_i) + \sum_{j \in J(x_i)} \gamma_j (y_j - y_i) = \sum_{j \in J(x)} \gamma_j (y_j - y_i),$$

и сослаться на (1.11). □

Последующие леммы посвящены проверке условий **1)** – **3)** для функционалов, участвующих в доказательстве теоремы 1.1. Конкретнее, в лемме 1.3

вводятся наборы $\{\gamma_i\}_{i \in \mathcal{I}}$, которыми мы будем пользоваться и устанавливается выполнение (1.7), лемма 1.4 устанавливает (1.9) вместе с (1.8) для функционалов из $\mathcal{F}$, а лемма 1.5 гарантирует в случае необходимости существование точки $z_i$ и выполнение условия (1.10).

Определение индексных функций даётся равенствами(1.3).

**Лемма 1.3.** Пусть $n > 6$, $h = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Для произвольных $x \in (0,\, 1-h)$ и $z \in (x + \frac{3}{4}h,\, 1)$ определим

$$I_n(x) = \begin{cases} \left\{\overline{\tau}\left(x - \frac{h}{2} - \frac{1}{n}\right), \ldots, \sigma(x)\right\}, & n < 60,\ x < \frac{3}{4}h + \frac{1}{n} \\ \left\{\overline{\tau}(x-h),\, \ldots,\, \overline{\sigma}\left(x - \frac{3}{4}h - \frac{1}{n}\right)\right\} \cup & \\ \qquad\qquad \cup \left\{\overline{\tau}\left(x - \frac{h}{2} - \frac{1}{n}\right), \ldots, \sigma(x)\right\}, & n < 60,\ x \geq \frac{3}{4}h + \frac{1}{n}, \\ \left\{\overline{\tau}\left(x - \frac{h}{2}\right), \ldots, \sigma(x)\right\}, & n \geq 60, \end{cases}$$

$$J_n(x) = \{\tau(x), \ldots, n\},$$

$$J_{n,x}(z) = \begin{cases} \{\max\{\tau(x),\, \tau(z-h)\}, \ldots, n\}, & z \in \left[x + \frac{3}{4}h,\, x + \frac{5}{4}h\right], \\ \left\{\tau\left(z - \frac{h}{2}\right), \ldots, n\right\}, & z \in \left(x + \frac{5}{4}h,\, 1\right). \end{cases}$$

Тогда существуют функции $g_{n,0},\, g_{n,1},\, \ldots,\, g_{n,n} : (0,\, 1-h) \to (0,\, 1]$, такие что для всякого $x \in (0,\, 1-h)$

$$\sum_{i \in I_n(x)} g_{n,i}(x) \left(x - \frac{i}{n}\right) + \sum_{j \in J_n(x)} g_{n,j}(x) \left(x - \frac{j}{n}\right) = 0, \tag{1.16}$$

$$\sum_{j \in J_{n,x}(z)} g_{n,j}(x) \left(z - \frac{j}{n}\right) \geq 0 \quad \forall z \in \left[x + \frac{3}{4}h,\, 1\right), \tag{1.17}$$

и

$$g_{n,j}(x) = p_{n,j}(x) \quad \forall j \in \{\tau(x+h), \ldots, n\}, \tag{1.18}$$

а если при этом $x > h$, то

$$g_{n,j}(x) + g_{n,n-j}(1-x) < p_{n,j}(x) \quad \forall j \in \{\overline{\tau}(x-h), \ldots, \overline{\sigma}(x+h)\}. \tag{1.19}$$

*Доказательство.* Данная лемма представляет собой переработанное собрание утверждений, данных Палтаней в его книге. Вместо доказательств некоторых неравенств мы предлагаем ссылки на соответствующие места в [5].

Обозначим

$$\varphi_{n,\,j}(x,\,t) = p_{n,\,j}(x)\left(t - \frac{j}{n}\right),$$

$$J_n^{(1)}(x) = \left\{\tau(x), \dots, \overline{\sigma}\left(x + \frac{h}{2}\right)\right\},$$
$$J_n^{(2)}(x) = \left\{\tau\left(x + \frac{h}{2}\right), \dots, \overline{\sigma}(x+h)\right\},$$
$$J_n^{(3)}(x) = \{\tau(x+h),\, \dots,\, n\},$$

Покажем, что для существования функций $g_{n,\,0},\, g_{n,\,1},\, \dots, g_{n,\,n}$ достаточно того, что

$$\frac{3}{2}h \sum_{j\in J_{n,\,x}(z)} p_{n,\,j}(x) + \sum_{j\in J_{n,\,x}(z)} \varphi_{n,\,j}(x,\,x) > 0, \quad \forall z \in \left(x + \frac{3}{2}h,\, 1\right), \tag{1.20}$$

и существования функций $\lambda_n^{(1)}$, $\lambda_n^{(2)}$, $\mu_n : (0,\,1-h) \to (0,\,1)$ со свойствами

$$\sum_{i\in I_n(x)} \mu_n(x)\varphi_{n,\,i}(x,\,x) + \sum_{j\in J_n^{(1)}(x)} \lambda_n^{(1)}(x)\varphi_{n,\,j}(x,\,x) + \\ + \sum_{j\in J_n^{(2)}(x)} \lambda_n^{(2)}(x)\varphi_{n,\,j}(x,\,x) + \sum_{j\in J_n^{(3)}(x)} \varphi_{n,\,j}(x,\,x) = 0, \tag{1.21}$$

$$\sum_{j\in J_{n,\,x}(z)\cap J_n^{(1)}(x)} \lambda_n^{(1)}(x)\varphi_{n,\,j}(x,\,z) + \sum_{j\in J_{n,\,x}(z)\cap J_n^{(2)}(x)} \lambda_n^{(2)}(x)\varphi_{n,\,j}(x,\,z) + \\ + \sum_{j\in J_{n,\,x}(z)\cap J_n^{(3)}(x)} \varphi_{n,\,j}(x,\,z) \geq 0 \quad \forall z \in \left[x + \frac{3}{4}h,\, x + \frac{3}{2}h\right], \tag{1.22}$$

$$\lambda_n^{(1)}(x) + \mu_n(1-x) < 1, \quad \lambda_n^{(2)}(x) + \mu_n(1-x) < 1 \quad \forall x \in (h,\,1-h), \tag{1.23}$$

где суммы по пустому множеству индексов мы полагаем равными нулю.

Действительно, пусть

$$g_{n,\,j}(x) = \begin{cases} \mu_n(x)p_{n,\,j}(x), & j \in \{0, \dots,\, \sigma(x)\}, \\ \alpha_{n,\,j}(x)p_{n,\,j}(x), & j \in \{\overline{\tau}(x), \dots,\, n\}, \end{cases}$$

где

$$\alpha_{n,\,j}(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}, & x=\frac{j}{n},\\ \lambda_n^{(1)}(x), & j\in J^{(1)}(x),\\ \lambda_n^{(2)}(x), & j\in J^{(2)}(x),\\ 1, & j\in J^{(3)}(x).\end{cases}$$

Тогда равенство (1.16) выполняется благодаря (1.21):

$$\sum_{i\in I_n(x)} g_{n,\,i}(x)\left(x-\frac{i}{n}\right)+\sum_{j\in J_n(x)} g_{n,\,j}(x)\left(x-\frac{j}{n}\right)=$$
$$=\sum_{i\in I_n(x)} \mu_n(x)p_{n,\,i}(x)\left(x-\frac{i}{n}\right)+\sum_{j\in J_n(x)} \alpha_{n,\,j}(x)p_{n,\,j}(x)\left(x-\frac{j}{n}\right)=$$
$$=\sum_{i\in I_n(x)} \mu_n(x)\varphi_{n,\,i}(x,\,x)+\sum_{j\in J_n(x)} \alpha_{n,\,j}(x)\varphi_{n,\,j}(x,\,x)=\sum_{i\in I_n(x)} \mu_n(x)\varphi_{n,\,i}(x,\,x)+$$
$$+\sum_{j\in J_n^{(1)}(x)} \lambda_n^{(1)}(x)\varphi_{n,\,j}(x,\,x)+\sum_{j\in J_n^{(2)}(x)} \lambda_n^{(2)}(x)\varphi_{n,\,j}(x,\,x)+\sum_{j\in J_n^{(3)}(x)} \varphi_{n,\,j}(x,\,x)=0.$$

Неравенство (1.17) для $z\in\left[x+\frac{3}{4}h,\,x+\frac{3}{2}h\right]$ следует из (1.22):

$$\sum_{j\in J_{n,\,x}(z)} g_{n,\,j}(x)\left(z-\frac{j}{n}\right)=$$
$$=\sum_{j\in J_{n,\,x}(z)} \alpha_{n,\,j}(x)p_{n,\,j}(x)\left(z-\frac{j}{n}\right)=\sum_{j\in J_{n,\,x}(z)} \alpha_{n,\,j}(x)\varphi_{n,\,j}(x,\,z)=$$
$$=\sum_{j\in J_{n,\,x}(z)\cap J_n^{(1)}(x)} \lambda_n^{(1)}(x)\varphi_{n,\,j}(x,\,z)+\sum_{j\in J_{n,\,x}(z)\cap J_n^{(2)}(x)} \lambda_n^{(2)}(x)\varphi_{n,\,j}(x,\,z)+$$
$$+\sum_{j\in J_{n,\,x}(z)\cap J_n^{(3)}(x)} \varphi_{n,\,j}(x,\,z)\geq 0$$

а для $z\in\left(x+\frac{3}{2}h,\,1\right)$ ввиду (1.20) имеем

$$\sum_{j\in J_{n,\,x}(z)} g_{n,\,j}(x)\left(z-\frac{j}{n}\right)=\sum_{j\in J_{n,\,x}(z)} p_{n,\,j}(x)\left(z-\frac{j}{n}\right)=$$
$$=(z-x)\sum_{j\in J_{n,\,x}(z)} p_{n,\,j}(x)+\sum_{j\in J_{n,\,x}(z)} p_{n,\,j}(x)\left(x-\frac{j}{n}\right)>$$
$$>\frac{3}{2}h\sum_{j\in J_{n,\,x}(z)} p_{n,\,j}(x)+\sum_{j\in J_{n,\,x}(z)} \varphi_{n,\,j}(x,\,x)>0.$$

Равенство (1.18) выполнено по построению.

Наконец, покажем что (1.19) следует из (1.23). Пусть $x \in (h,\, 1-h)$. Поскольку

$$p_{n,\,j}(x) = p_{n,\,n-j}(1-x)$$

имеем

$$g_{n,\,j}(x) + g_{n,\,n-j}(1-x) = \\ = \begin{cases} \frac{2}{3} p_{n,\,j}(x), & x = \frac{j}{n}, \\ \left(\mu_n(x) + \alpha_{n,\,n-j}(1-x)\right) p_{n,\,j}(x), & j \in \{\overline{\tau}(x-h), \ldots, \sigma(x)\}, \\ \left(\alpha_{n,\,j}(x) + \mu_n(1-x)\right) p_{n,\,j}(x), & j \in \{\tau(x), \ldots, \overline{\sigma}(x+h)\}, \end{cases}$$

а поскольку при $j \in \{\overline{\tau}(x-h), \ldots, \overline{\sigma}(x)\}$ выполняется

$$n - j \in \{\overline{\tau}(1-x), \ldots, \sigma(1-x+h)\},$$

это означает, что $g_{n,\,j}(x) + g_{n,\,n-j}(1-x)$ имеет одно из пяти значений:

$$\frac{2}{3} p_{n,\,j}(x), \;\; \left(\lambda_n^{(1)}(1-x) + \mu_n(x)\right) p_{n,\,j}(x), \;\; \left(\lambda_n^{(2)}(1-x) + \mu_n(x)\right) p_{n,\,j}(x), \\ \left(\lambda_n^{(1)}(x) + \mu_n(1-x)\right) p_{n,\,j}(x), \;\; \left(\lambda_n^{(2)}(x) + \mu_n(1-x)\right) p_{n,\,j}(x),$$

после чего остаётся сослаться на (1.23).

Дадим ссылки из [5] на (1.20), (1.21), (1.22), (1.23). Для случая $n \geq 60$ (1.20) следует из комбинации леммы 4.2.2 (стр. 99) и леммы 4.2.5 (стр. 104) при $\alpha = \rho = 1$, $d = \frac{1}{2}$, а для случая $6 < n < 60$ из леммы 4.2.7 (стр. 111) для $\rho = 1$.

Поскольку величина $\mu_n(x)$ полностью определена соотношением (1.21), то (1.21) – (1.23) можно рассматривать как условия на $\lambda_n^{(1)}(x)$ и $\lambda_n^{(2)}(x)$. Существование $\lambda_n^{(1)}(x)$ при $n \geq 60$ следует из леммы 4.2.6 (стр. 104), подробности также можно найти в доказательстве утверждения 4.2.1 (стр. 108). Заметим, что при этом получается, что $\lambda_n^{(2)}(x) = 0$, однако легко видеть, что это значение можно заменить на достаточно малое положительное число.

При $6 < n < 60$ существование $\lambda_n^{(1)}(x)$ и $\lambda_n^{(2)}(x)$ следует из доказательства утверждения 4.2.2 (стр. 118). Подробнее, существование этих величин следует из части доказательства, посвященной неравенствам, предполагаемым в условии леммы 4.2.8 (стр.111). Обращаем внимание, что в указанной лемме используются более сильные утверждения, где вместо величины $\mu_n(x)$, определённой (1.21) и имеющей вид

$$\mu_n(x) = \frac{\sum\limits_{j\in J_n(x)} \alpha_{n,j}(x)\varphi_{n,j}(x,\, x)}{\sum\limits_{j\in I_n(x)} p_{n,j}(x)\left(x - \frac{j}{n}\right)},$$

фигурирует величина

$$\frac{\sum\limits_{j\in J_n(x)} \alpha_{n,j}(x)\varphi_{n,j}(x,\, x)}{\sum\limits_{j=\overline{\tau}(x-h)}^{\sigma\left(x-\frac{3}{4}h\right)} p_{n,j}(x)\left(x - \frac{j}{n}\right) + \sum\limits_{j=\overline{\tau}\left(x-\frac{h}{2}\right)}^{\sigma(x)} p_{n,j}(x)\left(x - \frac{j}{n}\right)},$$

которую мы обозначим $\widetilde{\mu}_n(x)$. Значение $\mu_n(x)$ совпадает $\widetilde{\mu}_n(x)$ при $x-\frac{h}{2}-\frac{1}{n} < 0$, а в противном случае может быть получено, если в индексном множестве знаменателя приведённой дроби удалить точку $\sigma\left(x - \frac{3}{4}h\right)$ и добавить $\overline{\tau}\left(x - \frac{h}{2} - \frac{1}{n}\right)$. Поскольку последовательность $p_{n,j}(x)$ возрастает при $j \in \{0, \ldots, \sigma(x)\}$, это означает, что знаменатель при этом увеличится, следовательно

$$\mu_n(x) \le \widetilde{\mu}_n(x).$$

$\square$

В доказательствах лемм 1.4 и 1.5 мы будем пользоваться хорошо известным фактом, что если $0 \le a < b \le 1$, $x \in [a,\, b]$, $f \in B[0,\, 1]$, то

$$\left|\frac{b-x}{b-a}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b) - f(x)\right| \le \omega_2\left(f,\, \frac{b-a}{2}\right), \tag{1.24}$$

и простым соображением, касающимся произвольного линейного положительного функционала $F$:

$$|F(f)| \le F\left(\sup_{x\in\operatorname{supp} F} |f(x)|\right) = \sup_{x\in\operatorname{supp} F} |f(x)| F(e_0),$$

которое при $F \in \mathcal{F}$ даёт

$$|F(f)| \le \sup_{x\in\operatorname{supp} F} |f(x)|. \tag{1.25}$$

**Лемма 1.4.** Пусть $f \in B[0,\,1]$, $0 \le a < b \le 1$, $x \in [a,\,b]$, $F_a,\ F_b \in \mathcal{F}$, причём $F_a(e_1) = a$, $F_b(e_1) = b$. Тогда

$$\left|\frac{b-x}{b-a}F_a(f) + \frac{x-a}{b-a}F_b(f) - f(x)\right| \le \omega_2\left(f,\,h\right),$$

где

$$h = \max\left\{\frac{b-a}{2} + \frac{r(F_a)+r(F_b)}{2},\,r(F_a),\,r(F_b)\right\}.$$

*Доказательство.* Обозначим

$$g(t) = \frac{b-t}{b-a}F_a(f) + \frac{t-a}{b-a}F_b(f) - f(t).$$

Поскольку $\omega_2$ не меняется от прибавления линейной функции, то

$$\omega_2(g,\,h) = \omega_2(f,\,h),$$

и достаточно доказать, что для всех $x \in [a,\,b]$

$$|g(x)| \le \omega_2(g,\,h).$$

Более того, поскольку мы можем при необходимости рассматривать вместо $g$ функцию $-g$, ограничимся доказательством неравенства

$$g(x) \le \omega_2(g,\,h).$$

для тех $x \in [a,\,b]$ для которых $g(x) > 0$.

Далее, поскольку $F_a$ и $F_b$ – положительные функционалы и

$$\begin{aligned}F_a(g) = F_a\left(\frac{b-x}{b-a}F_a(f) + \frac{x-a}{b-a}F_b(f) - f(x)\right) &=\\ = F_a\left(\frac{b-x}{b-a}F_a(f)\right) + F_a\left(\frac{x-a}{b-a}F_b(f)\right) - F_a(f) &=\\ = \frac{b-a}{b-a}F_a(f) + \frac{a-a}{b-a}F_b(f) - F_a(f) &= 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F_b(g) = F_b\left(\frac{b-x}{b-a}F_a(f) + \frac{x-a}{b-a}F_b(f) - f(x)\right) &=\\ = F_b\left(\frac{b-x}{b-a}F_a(f)\right) + F_b\left(\frac{x-a}{b-a}F_b(f)\right) - F_b(f) &=\\ = \frac{b-b}{b-a}F_a(f) + \frac{b-a}{b-a}F_b(f) - F_b(f) &= 0,\end{aligned}$$

то существуют точки $a^* \in \operatorname{supp} F_a$, $b^* \in \operatorname{supp} F_b$, такие что

$$g(a^*),\, g(b^*) \le 0.$$

Если $x \in [a^*,\, b^*]$, то по (1.24)

$$g(x) - \frac{b^* - x}{b^* - a^*}\, g(a^*) - \frac{x - a^*}{b^* - a^*}\, g(b^*) \le \omega_2\left(g,\, \frac{b^* - a^*}{2}\right),$$

откуда

$$g(x) \le \omega_2\left(g,\, \frac{b^* - a^*}{2}\right) + \frac{b^* - x}{b^* - a^*}\, g(a^*) + \frac{x - a^*}{b^* - a^*}\, g(b^*) \le \\ \le \omega_2\left(g,\, \frac{b^* - a^*}{2}\right) \le \omega_2(g,\, h).$$

Иначе верно хотя бы одно: или $x \in [a,\, a^*)$, или $x \in (b^*,\, b]$. Исследование обоих случаев проводится абсолютно одинаково, поэтому мы ограничимся первым.

Итак, имеем

$$F_a(g) = 0, \quad F_a(e_1) = a, \quad x \in [a,\, a^*) \subset [a,\, a + r(F_a)), \quad g(a^*) \le 0,$$

покажем, что $g(x) \le \omega_2(g,\, r(F_a)) \le \omega_2(g,\, h)$.

Пусть $x = a$. Поскольку, с учётом (1.2),

$$F_a(g) = F_a(S_a g) = \frac{F_a(g) + F_a(S_a g)}{2},$$

ввиду (1.25), получаем

$$g(a) = g(a) - F_a(g) = F_a(g(a)e_0) - F_a(g) = \\ = F(g(a)e_0) - \frac{F_a(g) + F_a(S_a g)}{2} = \frac{1}{2} F(-g + 2g(a)e_0 - S_a g) \le \\ \le \frac{1}{2} \sup_{t \in \operatorname{supp} F} |-g(t) + 2g(a) - g(2a - t)| \le \frac{1}{2}\omega_2(g,\, r(F_a)). \quad (1.26)$$

Если $x \ne a$, то предположим, что $g(x) - \omega_2(g,\, r(F_a)) > 0$(иначе доказывать нечего). Пусть $s \in (x,\, a + r(F_a)]$, а $t \in [a - r(F_a),\, s)$. Согласно (1.24)

$$\frac{s - x}{s - t} g(t) + \frac{x - t}{s - t} g(s) - g(x) \ge -\omega_2(g,\, r(F_a)),$$

из чего следует

$$g(t) \geq \frac{s-t}{s-x}(g(x) - \omega_2(g,\, r(F_a))) - \frac{x-t}{s-x}g(s). \tag{1.27}$$

Сопоставляя (1.26) и (1.27) при $t = a$, получаем

$$\frac{1}{2}\omega_2(g,\, r(F_a)) \geq g(a) \geq \frac{s-a}{s-x}(g(x) - \omega_2(g,\, r(F_a))) - \frac{x-a}{s-x}g(s),$$

откуда

$$g(s) \geq \frac{s-a}{x-a}(g(x) - \omega_2(g,\, r(F_a))) - \frac{s-x}{2(x-a)}\omega_2(g,\, r(F_a)),$$

что эквивалентно

$$g(s) - (g(x) - \omega_2(g,\, r(F_a))) \geq \frac{s-x}{x-a}(g(x) - \omega_2(g,\, r(F_a))) - \frac{s-x}{2(x-a)}\omega_2(g,\, r(F_a)),$$

а значит

$$\inf_{s\in(x,\, a+r(F_a)]} \frac{g(s) - (g(x) - \omega_2(g,\, r(F_a)))}{s-x} > -\infty,$$

из чего в свою очередь следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдётся

$$s^* \in (x,\, a + r(F_a)],$$

такой что для всех $s \in (x,\, a + r(F_a)]$

$$\frac{g(s) - (g(x) - \omega_2(g,\, r(F_a)))}{s-x} > \frac{g(s^*) - (g(x) - \omega_2(g,\, r(F_a)))}{s^*-x} - \varepsilon,$$

откуда

$$g(s) \geq \frac{s^*-s}{s^*-x}(g(x) - \omega_2(g,\, r(F_a))) - \frac{x-s}{s^*-x}g(s^*) - (s-x)\varepsilon, \tag{1.28}$$

что эквивалентно

$$-g(s^*) \geq \frac{s^*-s}{s-x}(g(x) - \omega_2(g,\, r(F_a))) - (s^*-x)\varepsilon - \frac{s^*-x}{s-x}g(s).$$

Пользуясь неравенствами $g(a^*) \leq 0$, $x < a^*$, при $s = a^*$, из последнего неравенства получаем оценку

$$-\,g(s^*) \geq \frac{s^*-a^*}{a^*-x}\,(g(x) - \omega_2(g,\, r(F_a))) - (s^*-x)\varepsilon. \tag{1.29}$$

Наконец, сопоставляя (1.27) при $s = s^*$ и (1.28), получаем

$$g(\tau) \geq \frac{s^*-\tau}{s^*-x}(g(x) - \omega_2(g,\, r(F_a))) - \frac{x-\tau}{s^*-x}g(s^*) - \varepsilon(\tau - x)\mathbb{1}_{(x,\, a+r(F_a)]}(\tau)$$

для всех $\tau \in [a - r(F_a),\, a + r(F_a)]$ . В силу положительности функционала $F_a$ отсюда следует, что

$$F_a(g) \geq \frac{s^* - a}{s^* - x}(g(x) - \omega_2(g,\, r(F_a))) - \frac{x - a}{s^* - x}g(s^*) - \varepsilon F_a\left((\tau - x)\mathbb{1}_{(x,\, a + r(F_a)]}\right),$$

а с учётом (1.29) и равенства

$$\frac{s^* - a^*}{a^* - x} \cdot \frac{x - a}{s^* - x} + \frac{s^* - a}{s^* - x} = \frac{a^* - a}{a^* - x},$$

это даёт нам оценку

$$F_a(g) \geq \frac{a^* - a}{a^* - x}(g(x) - \omega_2(g,\, r(F_a))) - \varepsilon\left((x - a) + F_a\left((\tau - x)\mathbb{1}_{(x,\, a + r(F_a)]}\right)\right),$$

которая противоречит условию $F_a(g) = 0$ при достаточно малом $\varepsilon$. □

**Лемма 1.5.** Пусть $f \in B[0,\, 1]$, $n \in \mathbb{N}$, $h > 0$, $F \in \mathcal{F}$, $a = F(e_1)$, причём

$$a + 2h + r(F) \leq 1, \quad r(F) < \frac{h}{2},$$

и

$$b \in \left[a + \frac{2r(F)}{2^{n+1} - 3},\, a + \frac{2h}{2^n}\right].$$

Тогда найдётся точка

$$x^* \in [a + 2^n(b - a) - r(F),\, a + 2^n(b - a) + r(F)]\,,$$

такая что

$$\left|f(x^*) - \frac{b - x^*}{b - a}F(f) - \frac{x^* - a}{b - a}f(b)\right| \leq \frac{x^* - b}{b - a}\,\omega_2(f,\, \max\{h,\, b{-}a{+}r(F)\}). \quad (1.30)$$

*Доказательство.* Обозначим $\max\{h,\, b{-}a{+}r(F)\}$ через $\widetilde{h}$. Достаточно доказать лемму для функции

$$g(x) = f(x) - \frac{x - a}{b - a}f(b) - \frac{b - x}{b - a}F(f).$$

Поскольку

$$F(g) = g(b) = 0, \quad \omega_2(g,\, \cdot) = \omega_2(f,\, \cdot),$$

в этом случае (1.30) принимает вид

$$|g(x^*)| \leq \frac{x^* - b}{b - a}\,\omega_2(g,\,\widetilde{h}).$$

Мы будем использовать операторы $T_\sigma$ и $S_\sigma$, определённые формулой (**??**).

Для начала покажем, что

$$|F(T_{2^n(b-a)}g)| \leq (2^n - 1)\omega_2(g,\,\widetilde{h}), \tag{1.31}$$

Для этого докажем неравенства

$$|F(T_{2(b-a)}g)| \leq \omega_2(g,\,\widetilde{h}) \tag{1.32}$$

и

$$|F(T_{2t}g)| \leq \omega_2(g,\,\widetilde{h}) + 2|F(T_t g)| \quad \forall t \in [0,\,h]\,, \tag{1.33}$$

из которых (1.31) легко следует по индукции.

Для доказательства (1.32) воспользуемся тем, что по (1.5)

$$F(T_{2b-2a}g) = F(S_{F(e_1)+(b-a)}g) = F(S_b g).$$

Далее, в условиях леммы

$$0 \leq a - r(F) \leq 2b - a - r(F), \quad 2b - a + r(F) \leq a + 2h + r(F) \leq 1,$$

а значит

$$2b - x \in [0,\,1] \quad \forall x \in \operatorname{supp} F,$$

следовательно

$$S_b g(x) = g(2b - x) \quad \forall x \in \operatorname{supp} F,$$

откуда, с учётом (1.25), имеем

$$\begin{gathered}|F(T_{2b-2a}g)| = |F(g) - 2g(b) + F(T_{2b-2a}g)| = |F(g) - 2g(b) + F(S_b g)| = \\ = |F(g) + F(-2g(b)e_0) + F(S_b g)| = |F(g - 2g(b)e_0 + S_b g)| \leq \\ \leq \sup_{x\in\operatorname{supp}(F)} |g(x) - 2g(b) + S_b g(x)| = \sup_{x\in\operatorname{supp}(F)} |g(x) - 2g(b) + g(2b - x)| \leq \omega_2(g,\,\widetilde{h}).\end{gathered}$$

Теперь докажем (1.33). В условиях леммы $2h + a + r(F) \leq 1$, поэтому

$$T_{2t}g = g(x + 2t) \quad \forall x \in \operatorname{supp} F,$$

следовательно

$$|F(T_{2t}g) - 2F(T_tg)| = |F(g) - 2F(T_tg) + F(T_{2t}g)| =$$
$$= |F(g - 2T_tg + T_{2t}g)| \le \sup_{x\in\operatorname{supp}(F)} |g(x) - 2T_tg(x) + T_{2t}g(x)| =$$
$$= \sup_{x\in\operatorname{supp}(F)} |g(x) - 2g(x+t) + g(x+2t)| \le \omega_2(g,\, h) \le \omega_2(g,\, \widetilde{h}).$$

Покажем, что существует такая точка $x^* \in \operatorname{supp}(F\circ T_{2^n(b-a)})$, что

$$|g(x^*)| \le \frac{x^*-b}{b-a}\omega_2(g,\, \widetilde{h}).$$

Пусть это не так. Рассмотрим несколько случаев.

Пусть $\forall x \in \operatorname{supp}(F\circ T_{2^n(b-a)})$

$$g(x) > \frac{x-b}{b-a}\omega_2(g,\, \widetilde{h}). \tag{1.34}$$

Обозначим $\widetilde{F} = F\circ T_{2^n(b-a)}$. Этот функционал линейный и положительный, а поскольку

$$a + r(F) + 2^n(b-a) \le 1,$$

то

$$x + 2^n(b-a) \in [0,\, 1] \quad \forall x \in \operatorname{supp} F,$$
$$\operatorname{supp}\widetilde{F} \subset [a + 2^n(b-a) - r(F),\, a + 2^n(b-a) + r(F)],$$

следовательно,

$$\widetilde{F}(e_0) = F(T_{2^n(b-a)}e_0) = F(e_0) = 1,$$
$$\widetilde{F}(e_1) = F(T_{2^n(b-a)}e_1) = F(e_1 + (T_{2^n(b-a)}e_1 - e_1)) =$$
$$= F(e_1) + 2^n(b-a)F(e_0) = a + 2^n(b-a).$$

Поэтому из (1.34) следует, что

$$\widetilde{F}(g) > \widetilde{F}\left(\left(\frac{x-a}{b-a} - 1\right)\omega_2(g,\, \widetilde{h})\right) = \left(\frac{\widetilde{F}(e_1) - a\widetilde{F}(e_0)}{b-a} - \widetilde{F}(e_0)\right)\omega_2(g,\, \widetilde{h}) =$$
$$= (2^n - 1)\,\omega_2(g,\, \widetilde{h}),$$

что приводит к противоречию с (1.31).

Аналогично, исключён вариант, при котором $\forall x \in \operatorname{supp}(\widetilde{F})$

$$g(x) < -\frac{x-b}{b-a}\omega_2(g, \widetilde{h}). \tag{1.35}$$

Значит, существуют точки $x_1$, $x_2 \in \operatorname{supp}\widetilde{F}$ для которых не выполняются неравенства (1.35) и (1.34), соответственно. Если ни одна из них не подходит на роль $x^*$, то для $x_1$ обязано выполнится (1.34), а для $x_2$ – (1.35). Не умаляя общности мы можем считать, что $x_1 < x_2$.

Согласно (1.24)

$$g(x_1) - \frac{x_1-b}{x_2-b}g(x_2) - \frac{x_2-x_1}{x_2-b}g(b) \le \omega_2(g, \widetilde{h}),$$

а поскольку

$$x_1 \in \operatorname{supp}\widetilde{F} \subset [a + 2^n(b-a) - r(F),\, a + 2^n(b-a) + r(F)],$$
$$b - a \ge \frac{2r(F)}{2^{n+1}-3},$$

то

$$\begin{aligned} x_1 - b \ge a + 2^n(b-a) - r(F) - b = (2^n-1)(b-a) - r(F) = \\ = \frac{b-a}{2} + \frac{1}{2}\big((2^{n+1}-3)(b-a) - 2r(F)\big) \ge \frac{b-a}{2}. \end{aligned}$$

Поэтому имеем противоречие

$$\begin{aligned} \omega_2(g, \widetilde{h}) \ge g(x_1) - \frac{x_1-b}{x_2-b}g(x_2) - \frac{x_2-x_1}{x_2-b}g(b) = \\ = g(x_1) - \frac{x_1-b}{x_2-b}g(x_2) > \left(\frac{x_1-b}{b-a} + \frac{(x_1-b)}{(x_2-b)}\frac{(x_2-b)}{(b-a)}\right)\omega_2(g, \widetilde{h}) = \\ = \frac{2(x_1-b)}{b-a}\omega_2(g, \widetilde{h}) \ge \omega_2(g, \widetilde{h}). \end{aligned}$$

□

## 1.3 Доказательство теоремы 1.1

Заметим, что в силу условия (1.4) из леммы 1.1 получается, что $r(F_0) = r(F_n) = 0$, а значит, по условию (1.1)

$$F_0(f) = f(0), \quad F_n(f) = f(1).$$

Обозначим $h = \frac{1}{\sqrt{n}}$. Докажем точность результата. Для этого рассмотрим функцию

$$\varphi_\varepsilon(t) = \mathbb{1}_{[0,\varepsilon]}(t) \cdot \frac{\varepsilon - t}{\varepsilon}.$$

Несложно видеть, что $\omega_2(\varphi_\varepsilon,\, h + h_n) = 1$. При $\varepsilon < \frac{1}{n} - R$, иначе говоря, при $[0,\, \varepsilon] \cap \operatorname{supp} F_1 = \emptyset$ имеем

$$B_n\varphi_\varepsilon(x) = (1-x)^n F_0(\varphi_\varepsilon) = (1-x)^n,$$

$$\|B_n\varphi_\varepsilon - \varphi_\varepsilon\| = \|(1-x)^n - \varphi_\varepsilon(x)\| \underset{\varepsilon \to 0+}{\longrightarrow} 1.$$

Перейдём к доказательству неравенства. Оно будет строиться на проверке условий **1)**, **2)**, **3)** леммы 1.2 для различных функционалов. В качестве константы $M$ будет выступать величина $\omega_2(f,\, h + h_n)$. При этом мы будем указывать специально индексное множество $\mathcal{I}$, а также коэффициенты $\gamma_i$, а в качестве функционалов $F_i$ будут всегда выступать функционалы из условия. При этом $y_i = \frac{i}{n}$. Напоминаем, что при $x = 0,\, 1$ имеем $B_nf(x) = f(x)$, так что справедливость оценки очевидна.

Пусть $n \le 10$ и $x \in (0,\, 1)$ фиксировано. Проверим условие леммы для функционала $B_nf(x)$, где $\mathcal{I} = \{0,\, \dots,\, n\}$, $\gamma_i = p_{n,\,i}(x)$. В качестве множества $Z$ выберем $\{x\}$, и пусть $I(x) = \{0, \dots, \sigma(x)\}$, $J(x) = \{\overline{\tau}(x), \dots,\, n\}$, где индексные функции определены формулами (1.3).

Обращаем внимание, что, поскольку $F_i(e_0) = 1$, $F_i(e_1) = \frac{i}{n}$, то

$$B_n(e_1 - xe_0)(x) = 0,$$

откуда легко видеть, что условия **1)** и **2)** соблюдены. Для проверки **3)** докажем (1.8). В силу (1.4), для любых $i \in I(x)$ и $j \in J(x)$

$$r(F_i) \le y_i, \quad r(F_j) \le 1 - y_j, \quad r(F_i),\, r(F_j) \le \frac{1}{2},$$

следовательно

$$y_j + r(F_j) - (y_i - r(F_i)) \le 1 \le 2h + 2h_n,$$
$$r(F_i),\, r(F_j) \le \frac{1}{2} \le h + h_n,$$

а значит, по лемме 1.4

$$\left|f(x)-\frac{y_j-x}{y_j-y_i}F_i(f)-\frac{x-y_i}{y_j-y_i}F_j(f)\right|\le$$
$$\le\omega_2\left(f,\,\max\left\{\frac{y_j-y_i}{2}+\frac{r(F_i)+r(F_j)}{2},r(F_i),\,r(F_j)\right\}\right)\le\omega_2\left(f,\,h+h_n\right).$$

Пусть теперь $n>10$, зафиксируем $x\in(0,\,1)$, и пусть $g_{n,\,j}$ – функции из леммы 1.3. Рассмотрим

$$F(f)=\sum_{i\in I_n(x)}g_{n,\,i}(x)F_i(f)+\sum_{j\in J_n(x)}g_{n,\,j}(x)F_j(f),$$
$$G(f)=\sum_{i\in I_n^*(x)}g_{n,\,n-i}(1-x)F_i(f)+\sum_{j\in J_n^*(x)}g_{n,\,n-j}(1-x)F_j(f),$$
$$H(f)=\begin{cases}B_nf(x)-F(f), & x<h,\\ B_nf(x)-G(f), & x>1-h,\\ B_nf(x)-F(f)-G(f), & x\in[h,\,1-h],\end{cases}$$

где

$$I_n(x)=\begin{cases}\left\{\overline{\tau}\left(x-\frac{h}{2}-\frac{1}{n}\right),\dots,\,\sigma(x)\right\}, & n<60,\,x<\frac{3}{4}h+\frac{1}{n}\\ \left\{\overline{\tau}(x-h),\,\dots,\,\overline{\sigma}\left(x-\frac{3}{4}h-\frac{1}{n}\right)\right\}\cup & \\ \qquad\cup\left\{\overline{\tau}\left(x-\frac{h}{2}-\frac{1}{n}\right),\dots,\,\sigma(x)\right\}, & n<60,\,x\ge\frac{3}{4}h+\frac{1}{n},\\ \left\{\overline{\tau}\left(x-\frac{h}{2}\right),\dots,\,\sigma(x)\right\}, & n\ge 60,\end{cases}$$

$$J_n(x)=\left\{\tau(x),\,\dots,\,n\right\}.$$

$$I_n^*(x)=\{i\,|\,n-i\in I_n(1-x)\},\quad J_n^*(x)=\{j\,|\,n-j\in J_n(1-x)\}.$$

Для доказательства теоремы нам достаточно установить неравенства

$$|F(f)-f(x)F(e_0)|\le F(e_0)\omega_2\left(f,\,h+h_n\right),\tag{1.36}$$

$$|G(f)-f(x)G(e_0)|\le G(e_0)\omega_2\left(f,\,h+h_n\right),\tag{1.37}$$

$$|H(f)-f(x)H(e_0)|\le H(e_0)\omega_2\left(f,\,h+h_n\right).\tag{1.38}$$

Начнём с того, что (1.37) следует из (1.36). Действительно, если (1.36) верно для любых $x$, функции $f$ и набора $(F_0, \dots, F_n)$, удовлетворяющих условию теоремы, то достаточно показать, что

$$G(f) = \sum_{i \in I_n^*(x)} g_{n,\,n-i}(1-x) F_i(f) + \sum_{j \in J_n^*(x)} g_{n,\,n-j}(1-x) F_j(f) =$$
$$= \sum_{i \in I_n(1-x)} g_{n,\,i}(1-x) \widetilde{F}_i(S_{\frac{1}{2}} f) + \sum_{j \in J_n(1-x)} g_{n,\,j}(1-x) \widetilde{F}_j(S_{\frac{1}{2}} f),$$

где

$$\widetilde{F}_i = F_{n-i} \circ T_{\frac{2i}{n}-1},$$

то есть совпадает с функционалом $F$ при другом наборе параметров.

Заметим, что если $i \in \{0,\, \dots,\, n\}$, $t \in \operatorname{supp} F_{n-i}$ и $\sigma = \frac{2i}{n} - 1$, то

$$\sigma + t,\;\; 2F_{n-i}(e_1) - t + \sigma \in [0,\, 1],$$

откуда, согласно (1.5),

$$\widetilde{F}_i\left(S_{\frac{1}{2}} f\right) = F_{n-i}\left(T_{\frac{2i}{n}-1} S_{\frac{1}{2}} f\right) = F_{n-i}\left(S_{F_{n-i}(e_1) - \frac{1}{2} + \frac{i}{n}} S_{\frac{1}{2}} f\right) =$$
$$= F_{n-i}\left(S_{1-\frac{i}{n}-\frac{1}{2}+\frac{i}{n}} S_{\frac{1}{2}} f\right) = F_{n-i}\left(S_{\frac{1}{2}} S_{\frac{1}{2}} f\right) = F_{n-i}(f).$$

Поэтому

$$\sum_{i \in I_n(1-x)} g_{n,\,i}(1-x) \widetilde{F}_i\left(S_{\frac{1}{2}} f\right) + \sum_{j \in J_n(1-x)} g_{n,\,j}(1-x) \widetilde{F}_j\left(S_{\frac{1}{2}} f\right) =$$
$$= \sum_{i \in I_n(1-x)} g_{n,\,i}(1-x) F_{n-i}(f) + \sum_{j \in J_n(1-x)} g_{n,\,j}(1-x) F_{n-j}(f) =$$
$$= \sum_{n-i \in I_n(1-x)} g_{n,\,n-i}(1-x) F_i(f) + \sum_{n-j \in J_n(1-x)} g_{n,\,n-j}(1-x) F_j(f) =$$
$$= \sum_{i \in I_n^*(x)} g_{n,\,n-i}(1-x) F_i(f) + \sum_{j \in J_n^*(x)} g_{n,\,n-j}(1-x) F_j(f) = G(f).$$

Для доказательства неравенства (1.38) применим лемму 1.2 к функционалу $H$. По построению этот функционал можно представить в виде

$$H = \sum_{i=\overline{\tau}(x-h)}^{\overline{\sigma}(x+h)} \gamma_i F_i.$$

В самом деле, при $x \geq 1-h$ имеем $\overline{\sigma}(x+h)=n$. При $x<1-h$ по условию (1.18) для $i \geq \tau(x+h)$ коэффициенты $F$ совпадают с коэффициентами $B_n$ и поэтому сокращаются, а в разложении функционала $G$ не встречаются слагаемые с такими индексами. При $x>h$ и $i \leq \sigma(x-h)$ ситуация аналогична в силу симметрии $F$ и $G$. При этом, по условию (1.19)

$$\gamma_i \geq p_{n,i}(x) - g_{n,i}(x) - g_{n,n-i}(1-x) > 0.$$

В качестве множества $Z$ снова выберем $\{x\}$, и пусть

$$I(x)=\{\overline{\tau}(x-h),\dots,\sigma(x)\}, \quad J(x)=\{\overline{\tau}(x),\dots,\overline{\sigma}(x+h)\}.$$

Обращаем внимание, что в силу (1.16)

$$F(e_1 - xe_0) = 0, \tag{1.39}$$

откуда, из-за уже отмеченной связи функционалов $F$ и $G$, следует, что

$$H(e_1-xe_0)=B_n(e_1-xe_0)=0,$$

значит, условия **1)** и **2)** соблюдены.

Далее, поскольку в силу определения для любых $i \in I(x)$ и $j \in J(x)$

$$y_j - y_i \leq 2h,$$

и по условию $r(F_i)$, $r(F_j) \leq \frac{1}{n}$, то по лемме 1.4

$$\begin{aligned}\left| f(x) - \frac{y_j - x}{y_j - y_i} F_i(f) - \frac{x-y_i}{y_j-y_i} F_j(f) \right| \leq \\ \leq \omega_2\left(f,\, \max\left\{\frac{y_j-y_i}{2} + \frac{r(F_i)+r(F_j)}{2},\, r(F_i),\, r(F_j)\right\}\right) \leq \\ \leq \omega_2\left(f,\, h+\frac{1}{n}\right) \leq \omega_2\left(f,\, h+h_n\right),\end{aligned}$$

а значит, выполняется (1.8), а с ним условие **3)**.

Докажем (1.36). Для этого проверим условия леммы 1.2 для функционала $F$. При этом мы можем считать, что $x<1-h$, так как иначе можно повторить схему доказательства (1.38).

В качестве множества $Z$ возьмём $\{x\} \cup \left[x+\frac{3}{4}h,\, 1\right)$, и пусть

$$J(z)=\{\tau(z),\dots,n\},$$

$$I(z) = \begin{cases} \left\{\tau(z - \frac{h}{2}), \ldots, \sigma(z)\right\}, & z \in \left(x + \frac{5}{4}h,\, 1\right), \\ \{\max\{\tau(x),\, \tau(z-h)\}, \ldots, \sigma(z)\}, & z \in \left[x + \frac{3}{4}h,\, x + \frac{5}{4}h\right], \\ I_n(x), & z = x. \end{cases}$$

При этом

$$\mathcal{I} = I_n(x) \cup J_n(x),$$

что с учётом (1.39) обеспечивает выполнение условия **1)**.

Для точки $x$ условие **2)** выполняется в силу (1.16). Для $z \in \left[x + \frac{3}{4}h,\, 1\right)$ его справедливость следует из (1.17).

Проверим **3)**. Возьмём $i \in I(z)$. Если $y_i \geq 1 - 2h - 2h_n + R$, то для всех $j \in J(z)$

$$y_j + r(F_j) - (y_i - r(F_i)) \leq 1 - y_i + r(F_i) \leq 1 - y_i + R \leq 2h + 2h_n,$$

а поэтому по лемме 1.4

$$\left| f(x) - \frac{y_j - x}{y_j - y_i} F_i(f) - \frac{x - y_i}{y_j - y_i} F_j(f) \right| \leq$$
$$\leq \omega_2 \left( f,\, \max\left\{ \frac{y_j - y_i}{2} + \frac{r(F_i) + r(F_j)}{2},\, r(F_i),\, r(F_j) \right\} \right) \leq \omega_2\left(f,\, h + h_n\right),$$

что означает выполнение (1.8) и завершает проверку **3)**.

Иначе $y_i < 1 - 2h - 2h_n + R$. Покажем, что существует точка $z_i \in Z$, такая что

$$\left| f(z_i) - \frac{z - z_i}{z - y_i} F_i(f) - \frac{z_i - y_i}{z - y_i} f(z) \right| \leq \frac{z_i - z}{z - y_i} \omega_2(f,\, h + h_n). \tag{1.40}$$

со свойством (1.9), и при этом $I(z_i),\, J(z_i) \subset J(z)$. Последнее вложение выполняется по построению при $z_i > z$.

Для выполнения (1.9) будет достаточно, если $z_i \leq y_i + 2h + 2h_n - 2R$, так как в этом случае для всех $j \in J(z) \setminus J(z_i) = \{\sigma(z), \ldots, \tau(z_i)\}$ выполняется

$$y_j + r(F_j) - (y_i - r(F_i)) \leq y_j - y_i + 2R \leq 2h + 2h_n,$$

а следовательно, мы снова сможем воспользоваться леммой 1.4.

Условие $I(z_i) \subset J(z)$ означает, что $\tau(z) \leq \min I(z_i)$. При $z \neq x$ для этого будет достаточно, если $z_i \geq z + \frac{h}{2}$, так как в этом случае $z_i \geq x + \frac{5}{4}h$, и поэтому

$$\min I(z_i) = \sigma\left(z_i - \frac{h}{2}\right) \geq \tau(z),$$

а при $z = x$ достаточно, если $z_i \geq x + \frac{3}{4}h$, так как в этом случае $z_i \in Z$, а то, что

$$\min I(z_i) \geq \tau(x)$$

выполняется по построению.

Итак, докажем, что для $z \in Z$ и индекса $i \in I(z)$ существует точка $z_i$ принадлежащая отрезку $\left[z + \frac{h}{2},\, y_i + 2h + 2h_n - 2R\right]$ в случае если $z \neq x$, или отрезку $\left(x + \frac{3}{4}h,\, y_i + 2h + 2h_n - R\right)$ если $z = x$, обладающая свойством (1.40). При этом мы предполагаем, что $y_i < 1 - 2h - 2h_n + R$.

Обозначим через $Z_i^*$ множество точек обладающих свойством (1.40) и пусть

$$a_i(z) = \begin{cases} z + \frac{h}{2} & z \neq x, \\ x + \frac{3}{4}h, & z = x. \end{cases}$$

В силу вышесказанного, нам осталось проверить, что

$$Z_i^* \cap [a_i(z),\, y_i + 2h + 2h_n - 2R] \neq \emptyset. \tag{1.41}$$

Напоминаем, что

$$R = \max_{0 \leq j \leq n} r(F_{n,j}) < \min\left\{\frac{1}{n},\, \frac{1}{4\sqrt{n}}\right\},$$

$$h_n = \begin{cases} \frac{2}{n} + \frac{3}{2}R, & 11 \leq n < 60, \\ \frac{5}{2}R, & n \leq 60, \end{cases}$$

Проверку будем осуществлять при помощи леммы 1.5, из которой, ввиду неравенств $y_i < 1 - 2h - 2h_n + R$ и $\frac{h}{4} \geq r(F_i)$, следует, что если $m \in \mathbb{N}$ и $t \in (0,\, 1)$ таковы, что

$$t \in \Gamma_i^{(m)} = \left[y_i + \frac{h}{2(2^{m+1} - 3)},\, y_i + \frac{2h + 2h_n - 2R}{2^m}\right],$$

то на интервале

$$\Delta_i^{(m)}(t) = [t + (2^m - 1)(t - y_i) - r(F_i),\, y_i + 2^m(t - y_i) + r(F_i)]$$

найдётся точка $t^*$ со свойством

$$\left|f(t^*) - \frac{t - t^*}{t - y_i}F_i(f) - \frac{t^* - y_i}{t - y_i}f(t)\right| \leq \frac{t^* - t}{t - y_i}\omega_2(f,\, h + h_n). \tag{1.42}$$

Пусть $k \in \mathbb{N}$ – такое число, что $z - y_i \in \left(\frac{h}{2^{k+1}},\, \frac{h}{2^k}\right]$. Тогда

$$z \in \left(y_i + \frac{h}{2^{k+1}},\, y_i + \frac{h}{2^k}\right] \subset \Gamma_i^{(k+1)},$$

значит, на промежутке

$$\Delta_i^{(k+1)}(z) = \left[z + (2^{k+1} - 1)(z - y_i) - r(F_i),\, y_i + 2^{k+1}(z - y_i) + r(F_i)\right] \subset \\ \subset \left[z + (2^{k+1} - 1)(z - y_i) - r(F_i),\, y_i + 2h + 2h_n - 2R\right]$$

существует точка $t^*$ со свойством (1.42) с заменой $t$ на $z$, что означает $t^* \in Z_i^*$. При этом $t^* \le y_i + 2h + 2h_n - 2R$, а значит, если $t^* \ge a_i(z)$, то (1.41) выполнено для $z_i = t^*$. Иначе

$$z + \frac{3}{4}h \ge a_i(z) > t^* \ge z + (2^{k+1} - 1)(z - y_i) - r(F_i),$$

откуда

$$z < y_i + \frac{\frac{3}{4}h + r(F_i)}{2^{k+1} - 1} \le y_i + \frac{h}{4} + \frac{r(F_i)}{3},$$

следовательно

$$t^* \in \left[z + (2^{k+1} - 1)(z - y_i) - r(F_i),\, a_i(z)\right) \subset \\ \subset \left[z + \frac{3}{4}h - r(F_i),\, a_i(z)\right) \subset \left[z + \frac{h}{2},\, z + \frac{3}{4}h\right) \subset \left[y_i + \frac{h}{2},\, y_i + h + \frac{R}{3}\right] \subset \Gamma_i^{(1)},$$

из чего следует, что на промежутке

$$\Delta_i^{(1)}(t^*) = [t^* + (t^* - y_i) - r(F_i),\, y_i + 2(t^* - y_i) + r(F_i)] \subset \\ \subset \left[z + \frac{3}{4}h,\, y_i + 2h + \frac{5}{3}R\right] \subset [a_i(z),\, y_i + 2h + 2h_n - 2R]$$

найдётся точка $t^{**}$ со свойством (1.42) с заменой $t$ на $t^*$. Покажем, что $t^{**} \in Z_i^*$. В самом деле,

$$\left|f(t^{**}) - \frac{t^* - t^{**}}{t^* - y_i}F_i(f) - \frac{t^{**} - y_i}{t^* - y_i}f(t^*)\right| \le \frac{t^{**} - t^*}{t^* - y_i}\omega_2(f,\, h + h_n - R),$$

при этом точка $t^*$, как уже отмечалось, обладает свойством

$$\left|f(t^*) - \frac{z - t^*}{z - y_i}F_i(f) - \frac{t^* - y_i}{z - y_i}f(t^*)\right| \le \frac{t^* - z}{z - y_i}\omega_2(f,\, h + h_n - R).$$

Из этих двух неравенств несложно получить требуемое неравенство

$$\left| f(t^{**}) - \frac{z-t^{**}}{z-y_i}F_i(f) - \frac{t^{**}-y_i}{z-y_i}f(z)\right| \le \frac{t^{**}-z}{z-y_i}\omega_2(f,\, h+h_n-R).$$

Если $z-y_i \in \left(\frac{h}{2},\, h\right]$, то рассмотрим несколько вариантов.

Если $z \neq x$, то $a_i(z) = z+\frac{h}{2}$. Поскольку

$$z \in \left(y_i+\frac{h}{2},\, y_i+h\right] \subset \Gamma_i^{(1)},$$

на промежутке

$$\Delta_i^{(1)}(z) = [z+(z-y_i)-r(F_i),\, y_i+2(z-y_i)+r(F_i)] \subset \\ \subset \left(z+\frac{h}{2}-r(F_i),\, y_i+2h+R\right]$$

найдётся точка $t^*$, обладающая свойством (1.42) с заменой $t$ на $z$. Если $t^* \ge z+\frac{h}{2}$, то это влечёт (1.41), иначе

$$z-y_i \le t^*-z+r(F_i) < \frac{h}{2}+r(F_i),$$

и

$$t^* \in \left(z+\frac{h}{2}-r(F_i),\, z+\frac{h}{2}\right) \subset (y_i+h-r(F_i),\, y_i+h+r(F_i)) \subset \Gamma_i^{(1)},$$

следовательно на промежутке

$$\Delta_i^{(1)}(t^*) = [t^*+(t^*-y_i)-r(F_i),\, y_i+2(t^*-y_i)+r(F_i)] \subset \\ \subset \left[z+\frac{h}{2}-R+(h-R)-R,\, y_i+2h+3R\right] \subset \\ \subset \left[z+\frac{3}{2}h-3R,\, y_i+2h+3R\right] \subset [a_i(z),\, y_i+2h+2h_n-2R]$$

найдётся точка $t^{**}$, обладающая свойством (1.42) с заменой $t$ на $t^*$. Доказательство того, что $t^{**} \in Z_i^*$, проводится аналогично рассмотренному выше случаю.

Наконец, если $z = x$, то $a_i(z) = z+\frac{3}{4}h$, $n < 60$(иначе $x-y_i \ge \frac{h}{2}$). Рассмотрим два случая. Если

$$x \in \left(y_i+\frac{3}{4}h+\frac{1}{n},\, y_i+h\right) \subset \Gamma_i^{(1)},$$

то

$$\Delta_i^{(1)}(x) = [x + (x - y_i) - r(F_i),\ y_i + 2(x - y_i) + r(F_i)] \subset$$
$$\subset \left[x + \frac{3}{4}h,\ y_i + 2h + R\right] \subset [a_i(x),\ y_i + 2h + 2h_n - 2R],$$

что влечёт (1.41), а если

$$x \in \left(y_i + \frac{h}{2},\ y_i + \frac{h}{2} + \frac{1}{n}\right] \subset \Gamma_i^{(2)},$$

то (1.41) следует из вложения

$$\Delta_i^{(2)}(x) = [x + 3(x - y_i) - r(F_i),\ y_i + 4(x - y_i) + r(F_i)] \subset$$
$$\subset \left[x + \frac{3}{2}h - R,\ y_i + 2h + \frac{4}{n} + R\right] \subset [a_i(z),\ y_i + 2h + 2h_n - 2R].$$

Таким образом, мы проверили выполнение (1.41) во всех случаях, а вместе с тем и выполнение условия **3)**, что завершает доказательство (1.36) и теоремы 1.1. $\square$

# Глава 2.
# Оценка нормы функции, ортогональной кусочно-постоянным, через второй модуль непрерывности

## 2.1 Введение

**Определения и обозначения.** Обозначим через $B(\mathbb{R})$ пространство ограниченных измеримых вещественнозначных функций на множестве $\mathbb{R}$ с нормой

$$\|f\| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|.$$

Второй модуль непрерывности функции $f$ с шагом $h$ в пространстве $B(\mathbb{R})$ определяется формулой

$$\omega_2(f,\, h) = \sup_{x\in\mathbb{R},\, |t|\le h} \left| f(x-t) - 2f(x) + f(x+t) \right|.$$

Через $F$ обозначим подпространство $B(\mathbb{R})$ состоящее из функций, обладающих свойством

$$\int\limits_k^{k+1} f(x)\, dx = \int\limits_0^1 f(x)\, dx \quad \forall k \in \mathbb{Z},$$

а через $F^0$ – подпространство $F$, состоящее из функций $f$ со свойством

$$\int\limits_k^{k+1} f(x)\, dx = 0 \qquad \forall k \in \mathbb{Z}. \tag{2.1}$$

Помимо этого нам понадобятся множества

$$F_b = \left\{ f{\in}F^0 \;\middle|\; f\left(\frac{1+b}{2}\right) = \|f\| = 1 \right\}, \quad F^* = \bigcup_{b\in[0,1]} F_b.$$

Также, для формулировки результатов мы будем пользоваться функцией

$$q(b) = \begin{cases} \frac{96}{27b^3-27b^2+9b+55}, & b \in \left[0,\, \frac{1}{3}\right], \\ \frac{8(11b^2+66b-13)}{3b^4-69b^3+17b^2+385b-80}, & b \in \left(\frac{1}{3},\, 1\right]. \end{cases}$$

Отметим, что функция $q(b)$ непрерывна на отрезке $[0,\, 1]$, имеет на этом отрезке ровно два интервала монотонности и достигает минимума между точками 0.43 и 0.44, причём

$$q(b) > 1.6721. \tag{2.2}$$

Для среднего значения функции на отрезке $\left[x - \frac{r}{2},\, x + \frac{r}{2}\right]$, где $r > 0$, мы используем обозначение

$$f_r(x) = \frac{1}{r} \int\limits_{x-r/2}^{x+r/2} f(s)\, ds = \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f\left(x + rt\right)\, dt.$$

Наконец, через $E_0(f)$обозначим наилучшее приближение $f$ постоянными, то есть

$$E_0(f) = \inf_{c \in \mathbb{R}} \|f - c\|.$$

Нас будут интересовать величины

$$J_2^* = \sup_{f \in F} \frac{E_0(f)}{\omega_2(f,\, 1)}, \quad W_2^* = \sup_{f \in F^0} \frac{\|f\|}{\omega_2(f,\, 1)},$$

с соглашением $\frac{0}{0} = 0$. Это оправдано, поскольку на прямой $\omega_2(f,\, h) = 0$ влечёт $f = 0$.

**Основные результаты.** Мы установим, что $J_2^* = W_2^*$. Кроме того, мы значительно сузим область для поиска супремума и улучшим оценку для константы $W_2^*$, точное значение которой пока остаётся неизвестным. Сужение области поиска осуществляется в несколько этапов. Сперва мы установим, что вместо пространства $F$ можно ограничиться множеством $F^*$, более того, верна

**Теорема 2.1.**

$$J_2^* = W_2^* = \sup_{f \in F^*} \frac{\|f\|}{\omega_2(f,\, 1)} = \frac{1}{\inf\limits_{f \in F^*} \omega_2(f,\, 1)}.$$

Таким образом задача вычисления $J_2^*$ сводится к исследованию поведения величины $\inf\limits_{f \in F_b} \omega_2(f,\, 1)$ при $b \in [0,\, 1]$. Нижнюю оценку этой величины даёт

**Теорема 2.2.** Пусть $f \in F_b$. Тогда

$$q(b) \leq \omega_2(f,\, 1).$$

Для верхней оценки мы строим функцию $f^*$ из множества $F^*$ со вторым модулем непрерывности равным $\frac{32}{19}$. Таким образом,

$$1.6721 \leq q(b) \leq \inf_{f \in F^*} \omega_2(f^*,\, 1) \leq \frac{32}{19},$$

откуда, согласно теореме 2.1 и оценке (2.2), следует

**Теорема 2.3.**

$$\frac{19}{32} = 0.59375 \leq J_2^* \leq 0.5981,$$

причём

$$J_2^* = \sup_{b \in [b_0,\, b_1]} \frac{1}{\inf\limits_{f \in F_b} \omega_2(f,\, 1)},$$

где точки $\frac{1}{3} < b_0 < b_1 < 1$ являются корнями уравнения

$$q(b) = \frac{32}{19}.$$

Для доказательств разработан метод, заключающийся в последовательном получении неравенств, связывающих средние значения функции с её вторым модулем непрерывности, при помощи методов линейного программирования. Функция $f^*$, используемая для нижней оценки, строится так, чтобы обратить некоторые из этих неравенств в равенства.

## 2.2 Доказательство теоремы 2.1

Напомним, что

$$F_b = \left\{ f {\in} F^0 \;\middle|\; f\left(\frac{1+b}{2}\right) = \|f\| = 1 \right\}, \quad F^* = \bigcup_{b \in [0,1]} F_b.$$

Равенство

$$\sup_{f \in F^*} \frac{\|f\|}{\omega_2(f,\, 1)} = \frac{1}{\inf\limits_{f \in F^*} \omega_2(f,\, 1)}$$

прямо следует из определения $F^*$.

Докажем, что

$$W_2^* = \sup_{f \in F^*} \frac{\|f\|}{\omega_2(f,\, 1)},$$

иными словами, что

$$\sup_{f \in F^0} \frac{\|f\|}{\omega_2(f,\, 1)} = \sup_{f \in F^*} \frac{\|f\|}{\omega_2(f,\, 1)}. \tag{2.3}$$

По определению, для любого $n \in \mathbb{N}$ найдётся точка $x_n \in \mathbb{R}$ такая, что

$$|f(x_n)| > \|f\| - \frac{1}{n}.$$

Не умаляя общности, можно считать, что $f(x_n) > 0$. Рассмотрим

$$A_n f(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq x_n, \\ \|f\|, & x = x_n \end{cases}$$

Поскольку

$$\omega_2(f,\, h) \leq \omega_2(g,\, h) + 4\|f - g\|,$$

то

$$\omega_2(A_n f,\, 1) \leq \omega_2(f,\, 1) + \frac{4}{n},$$

значит, супремум в (2.3) не изменится, если рассматривать только функции, достигающие своей нормы.

В силу равенства

$$\omega_2(f,\, h) = \|f\| \cdot \omega_2\left(\frac{f}{\|f\|},\, h\right),$$

достаточно ограничиться случаем $\|f\| = 1$, иначе говоря, $f \in F_b$, $b \in \mathbb{R}$.

Наконец, в виду свойств

$$\omega_2(f(\cdot + 1),\, h) = \omega_2(f(\cdot),\, h),$$

$$\omega_2(f(-\cdot),\, h) = \omega_2(f(\cdot),\, h),$$

можно считать, что $b \in [0,\, 1]$, иными словами, достаточно рассматривать элементы $F^*$.

Теперь докажем, что

$$W_2^* = J_2^*.$$

Пусть $f \in F^*$,

$$C_n f(x) = \begin{cases} f(x) & x \le 1, \\ \frac{n-k}{n} f(x) & x \in (k,\, k+1],\, k = 1..(n-1), \\ 0 & x > n, \end{cases}$$

$$D_n f(x) = C_n f(x) - C_n f(2n+3-x), \quad \widetilde{F} = \left\{ D_n f \,\middle|\, f \in F^*,\, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Обращаем внимание, что, поскольку

$$\operatorname{supp} C_n f \subset (-\infty,\, n], \quad \operatorname{supp} C_n f(2n+3-\cdot) \subset [n+3,\, \infty),$$

для любых $x \in \mathbb{R}$ и $t \in [0,\, 1]$ числа $x-t$, $x$, $x+t$ не могут принадлежать сразу обоим носителям. Отсюда следует, что

$$\omega_2(D_n f,\, 1) = \omega_2(C_n f,\, 1). \tag{2.4}$$

Также легко видеть, что $\|C_n f\| = \|D_n f\| = 1$ и $\widetilde{F} \subset F^* \subset F$. Первое включение объясняется тем, что $f$ достигает своей нормы на отрезке $[0,\, 1]$, а функция $C_n(f)$(а значит и $D_n f$) совпадает с ней на этом отрезке.

Далее, в силу симметричности графика $D_n f$,

$$E_0\left(D_n f\right) = \|D_n f\| = 1,$$

следовательно

$$\sup_{f \in \widetilde{F}} \frac{\|f\|}{\omega_2(f,\, 1)} = \sup_{f \in \widetilde{F}} \frac{E_0(f)}{\omega_2(f,\, 1)}.$$

Наконец, покажем, что

$$\omega_2(D_n f,\, 1) \le \omega_2(f,\, 1) + \frac{2}{n}. \tag{2.5}$$

Пусть $t \in [0,\, 1]$. Несложно видеть, что при $x \le 1$

$$\begin{aligned} &|C_n f(x-t) - 2C_n f(x) + C_n f(x+t)| \le \\ &\qquad \le |f(x-t) - 2f(x) + f(x+t)| + |C_n f(x+t) - f(x+t)| \le \\ &\qquad\qquad \le |f(x-t) - 2f(x) + f(x+t)| + \frac{1}{n}, \end{aligned}$$

при $x \in (k,\, k+1]$, $k = 1..(n-1)$

$$|C_nf(x-t) - 2C_nf(x) + C_nf(x+t)| \le \frac{n-k}{n}\,|f(x-t) - 2f(x) + f(x+t)| +$$
$$+\left|C_nf(x-t) - \frac{n-k}{n}f(x-t)\right| + \left|C_nf(x+t) - \frac{n-k}{n}f(x+t)\right| \le$$
$$\le |f(x-t) - 2f(x) + f(x+t)| + \frac{2}{n},$$

и, наконец, при $x > n-1$

$$|C_nf(x-t) - 2C_nf(x) + C_nf(x+t)| \le \frac{1}{n},$$

что, в силу равенства (2.4) завершает проверку (2.5).

Поэтому

$$W_2^* = \sup_{F^*} \frac{\|f\|}{\omega_2(f,\, 1)} = \sup_{\widetilde{F}} \frac{\|f\|}{\omega_2(f,\, 1)} = \sup_{\widetilde{F}} \frac{E_0(f)}{\omega_2(f,\, 1)} \le \sup_{F} \frac{E_0(f)}{\omega_2(f,\, 1)} = J_2^*.$$

С другой стороны, если $f \in F$, то $\left(f - \int\limits_0^1 f(x)\,dx\right) \in F^0$, поэтому

$$E_0(f) \le \left\| f - \int\limits_0^1 f(x)\,dx \right\| \le W_2^* \cdot \omega_2(f,\, 1),$$

откуда следует, что

$$J_2^* \le W_2^*.$$

□

## 2.3 Леммы

Для доказательства теоремы 2.2 мы сформулируем ряд неравенств, связывающих средние значения функции $f \in F_b$ с её вторым модулем непрерывности. Затем мы поставим задачу линейного программирования

$$\omega_2(f,\, 1) \to \inf$$

относительно этих средних и величины $\omega_2(f,\, 1)$, считая их при этом абстрактными переменными.

Напомним, что задача

$$\sum_{i=1}^{N} a_{ij}x_i \geq b_j, \qquad j = 1, \ldots, m,$$

$$\sum_{i=1}^{N} a_{ij}x_i = b_j, \qquad j = m+1, \ldots, M,$$

$$x_1, \ldots, x_n \geq 0,$$

$$\sum_{i=1}^{N} c_i x_i \to \inf,$$

где $x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_N$ – переменные, и задача

$$\sum_{j=1}^{M} a_{ij}y_j \leq c_i, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

$$\sum_{j=1}^{M} a_{ij}y_j = c_i, \qquad i = n+1, \ldots, N,$$

$$y_1, \ldots, y_m \geq 0,$$

$$\sum_{j=1}^{M} b_j y_j \to \sup,$$

где $y_1, \ldots, y_m, y_{m+1}, \ldots, y_M$ – переменные, называются двойственными друг другу.

Известно [20, глава 5], что если одна из этих задач разрешима, то разрешима и вторая, причём ответы в них совпадают.

Встречающиеся в доказательствах задачи линейного программирования решены с помощью перехода к двойственной задаче. Это мотивировано тем, что, поскольку мы не накладываем условий положительности на переменные, двойственная задача представляет из себя систему линейных уравнений. Полученные системы решены при помощи программного пакета Maple.

Следующая лемма фиксирует простейшие свойства функций из множества $F_b$.

**Лемма 2.1.** Пусть $b \in (0, 1)$, $f \in F_b$, $\tau$, $h > 0$. Тогда

$$f_{2\tau}\left(\frac{1+b}{2} - 2h\right) - 2f_\tau\left(\frac{1+b}{2} - h\right) + 1 \leq \omega_2\left(f, h + \frac{\tau}{2}\right), \tag{2.6}$$

$$-f_\tau\left(\frac{1+b}{2}-h\right)-f_\tau\left(\frac{1+b}{2}+h\right)+2\le\omega_2\left(f,\,h+\frac{\tau}{2}\right), \tag{2.7}$$

$$-2f_{2\tau}\left(\frac{1+b}{2}\right)+2\le\omega_2\left(f,\,\frac{\tau}{2}\right), \tag{2.8}$$

$$-f_{\frac{1-b}{2}}\left(-\frac{1-b}{4}\right)+f_{\frac{1-b}{2}}\left(1+\frac{3+b}{4}\right)+\frac{4}{1-b}\le\frac{2}{1-b}\cdot\omega_2(f,\,1). \tag{2.9}$$

*Доказательство.* Поскольку $f\left(\frac{1+b}{2}\right)=1$, неравенства (2.6) и (2.7) получаются интегрированием, соответственно,

$$f\left(\frac{1+b}{2}-2h+2\tau s\right)-2f\left(\frac{1+b}{2}-h+\tau s\right)+f\left(\frac{1+b}{2}\right)\le\omega_2\left(f,\,h+\frac{\tau}{2}\right)$$

и

$$-f\left(\frac{1+b}{2}-h-\tau s\right)-f\left(\frac{1+b}{2}+h+\tau s\right)+2f\left(\frac{1+b}{2}\right)\le\omega_2\left(f,\,h+\frac{\tau}{2}\right)$$

по $s\in\left[-\frac{1}{2},\,\frac{1}{2}\right]$.

Далее, (2.8) следует из (2.7), если заметить, что

$$2f_{2\tau}\left(\frac{1+b}{2}\right)=f_\tau\left(\frac{1+b}{2}-\frac{\tau}{2}\right)+f_\tau\left(\frac{1+b}{2}+\frac{\tau}{2}\right).$$

Наконец, согласно (2.8),

$$-2f_2\left(\frac{1+b}{2}\right)+2\le\omega_2(f,\,1),$$

и для доказательства (2.9) осталось заметить, что, с учётом (2.1),

$$\begin{aligned}2f_2\left(\frac{1+b}{2}\right)&=\frac{1-b}{2}f_{\frac{1-b}{2}}\left(-\frac{1-b}{4}\right)+f_1\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1+b}{2}f_{\frac{1+b}{2}}\left(1+\frac{1+b}{4}\right)=\\&=\frac{1-b}{2}f_{\frac{1-b}{2}}\left(-\frac{1-b}{4}\right)+f_1\left(\frac{1}{2}\right)+\left(f_1\left(\frac{3}{2}\right)-\frac{1-b}{2}f_{\frac{1-b}{2}}\left(1+\frac{3+b}{4}\right)\right)=\\&=\frac{1-b}{2}f_{\frac{1-b}{2}}\left(-\frac{1-b}{4}\right)-\frac{1-b}{2}f_{\frac{1-b}{2}}\left(1+\frac{3+b}{4}\right)=\\&=\frac{1-b}{2}\left(f_{\frac{1-b}{2}}\left(-\frac{1-b}{4}\right)-f_{\frac{1-b}{2}}\left(1+\frac{3+b}{4}\right)\right).\end{aligned}$$

□

**Лемма 2.2.** Пусть $f \in B(\mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}$, $h$, $\tau$, $\sigma > 0$. Тогда

$$\left| f_\tau(a-h) - 2f_\sigma(a) + f_{|2\sigma-\tau|}(a+h) \right| \le \omega_2\left(f,\, h + \frac{|\sigma-\tau|}{2}\right).$$

*Доказательство.* Достаточно показать, что для любой функции $f$ из $B(\mathbb{R})$

$$f_\tau(a-h) - 2f_\sigma(a) + f_{|2\sigma-\tau|}(a+h) \le \omega_2\left(f,\, h + \frac{|\sigma-\tau|}{2}\right).$$

Пусть

$$x(s) = a - \frac{\sigma}{2} + \sigma s, \quad t(s) = h + (\sigma-\tau)s - \frac{\sigma-\tau}{2}.$$

Легко видеть, что для любого $s \in [0,1]$

$$f(x(s)-t(s)) - 2f(x(s)) + f(x(s)+t(s)) \le \omega_2\left(f,\, h + \frac{|\sigma-\tau|}{2}\right).$$

Для завершения доказательства осталось проинтегрировать по $s \in [0,1]$:

$$\int\limits_0^1 f(x(s)-t(s))\,ds = \int\limits_0^1 f\left(a - h - \frac{\tau}{2} + \tau s\right)\,ds = f_\tau\left(a-h\right),$$

$$\int\limits_0^1 f(x(s))\,ds = \int\limits_0^1 f\left(a - \frac{\sigma}{2} + \sigma s\right)\,ds = f_\sigma\left(a\right),$$

$$\int\limits_0^1 f(x(s)+t(s))\,ds = \int\limits_0^1 f\left(a + h - \frac{2\sigma - t}{2} + (2\sigma-\tau)s\right)\,ds = f_{|2\sigma-\tau|}\left(a+h\right).$$

□

**Лемма 2.3.** Пусть $f \in B(\mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}$, $h$, $\tau$, $\sigma > 0$, причём $\tau \ge \sigma$. Тогда

$$|f_\tau(a-h) - 2f_\sigma(a) + f_\tau(a+h)| \le \omega_2\left(f,\, h + \frac{\tau}{2}\right).$$

*Доказательство.* Достаточно показать, что для любой функции $f$ из $B(\mathbb{R})$

$$f_\tau(a-h) - 2f_\sigma(a) + f_\tau(a+h) \le \omega_2\left(f,\, h + \frac{\tau}{2}\right).$$

В случае $\tau = \sigma$ требуемое неравенство

$$f_\sigma(a-h) - 2f_\sigma(a) + f_\sigma(a+h) \leq \omega_2(f,\, h) \tag{2.10}$$

следует из леммы 2.2.

Пусть теперь $\tau > \sigma$. Введём следующие обозначения:

$$\mu = \frac{\tau - \sigma}{2}, \quad \nu = \frac{\tau + \sigma}{2}. \tag{2.11}$$

Снова пользуясь леммой 2.2, ввиду соотношений

$$|\sigma - \nu| = \mu, \quad \sigma + \mu = \nu, \quad \frac{\left|\frac{\sigma}{2} - \nu\right|}{2} = \frac{\tau}{4}, \quad \frac{\nu}{2} - \frac{\sigma}{4} = \frac{\tau}{4}, \quad \frac{\sigma}{4} + \frac{\mu}{2} = \frac{\tau}{4}$$

получаем

$$f_\nu\left(a - h - \frac{\mu}{2}\right) - 2f_{\frac{\sigma}{2}}\left(a + \frac{\sigma}{4}\right) + f_\mu\left(a + h + \frac{\nu}{2}\right) \leq \omega_2\left(f,\, h + \frac{\tau}{2}\right), \tag{2.12}$$

$$f_\mu\left(a - h + \frac{\nu}{2}\right) - 2f_{\frac{\sigma}{2}}\left(a + \frac{\sigma}{4}\right) + f_\nu\left(a + h - \frac{\mu}{2}\right) \leq \omega_2\left(f,\, h + \frac{\tau}{2}\right), \tag{2.13}$$

$$f_\nu\left(a - h + \frac{\mu}{2}\right) - 2f_{\frac{\sigma}{2}}\left(a - \frac{\sigma}{4}\right) + f_\mu\left(a + h - \frac{\nu}{2}\right) \leq \omega_2\left(f,\, h + \frac{\tau}{2}\right), \tag{2.14}$$

$$f_\mu\left(a - h - \frac{\nu}{2}\right) - 2f_{\frac{\sigma}{2}}\left(a - \frac{\sigma}{4}\right) + f_\nu\left(a + h + \frac{\mu}{2}\right) \leq \omega_2\left(f,\, h + \frac{\tau}{2}\right). \tag{2.15}$$

Далее, средние значения $f$ связаны равенствами

$$f_\tau(a-h) = \frac{\mu}{\tau} f_\mu\left(a - h - \frac{\nu}{2}\right) + \frac{\sigma}{\tau} f_\sigma(a-h) + \frac{\mu}{\tau} f_\mu\left(a - h + \frac{\nu}{2}\right), \tag{2.16}$$

$$f_\tau(a-h) = \frac{\mu}{\tau} f_\mu\left(a - h + \frac{\nu}{2}\right) + \frac{\nu}{\tau} f_\nu\left(a - h - \frac{\mu}{2}\right), \tag{2.17}$$

$$f_\tau(a-h) = \frac{\mu}{\tau} f_\mu\left(a - h - \frac{\nu}{2}\right) + \frac{\nu}{\tau} f_\nu\left(a - h + \frac{\mu}{2}\right), \tag{2.18}$$

$$f_\tau(a+h) = \frac{\mu}{\tau} f_\mu\left(a + h - \frac{\nu}{2}\right) + \frac{\sigma}{\tau} f_\sigma(a+h) + \frac{\mu}{\tau} f_\mu\left(a + h + \frac{\nu}{2}\right), \tag{2.19}$$

$$f_\tau(a+h) = \frac{\mu}{\tau} f_\mu\left(a + h + \frac{\nu}{2}\right) + \frac{\nu}{\tau} f_\nu\left(a + h - \frac{\mu}{2}\right), \tag{2.20}$$

$$f_\tau(a+h) = \frac{\mu}{\tau} f_\mu\left(a + h - \frac{\nu}{2}\right) + \frac{\nu}{\tau} f_\nu\left(a + h + \frac{\mu}{2}\right), \tag{2.21}$$

$$\frac{1}{2} f_{\frac{\sigma}{2}}\left(a - \frac{\sigma}{4}\right) + \frac{1}{2} f_{\frac{\sigma}{2}}\left(a + \frac{\sigma}{4}\right) = f_\sigma\left(a\right). \tag{2.22}$$

Поставим задачу линейного программирования:

$$f_\tau(a-h) + f_\tau(a+h) \to \sup$$

относительно величин

$$
\begin{array}{lll}
f_\sigma(a-h), & f_\sigma(a+h), & f_{\frac{\sigma}{2}}\left(a+\frac{\sigma}{4}\right), \\
f_\nu\left(a-h-\frac{\mu}{2}\right), & f_\mu\left(a+h+\frac{\nu}{2}\right), & f_{\frac{\sigma}{2}}\left(a-\frac{\sigma}{4}\right), \\
f_\mu\left(a-h+\frac{\nu}{2}\right), & f_\nu\left(a+h-\frac{\mu}{2}\right), & f_\tau(a-h), \\
f_\nu\left(a-h+\frac{\mu}{2}\right), & f_\mu\left(a+h-\frac{\nu}{2}\right), & f_\tau(a+h) \\
f_\mu\left(a-h-\frac{\nu}{2}\right), & f_\nu\left(a+h+\frac{\mu}{2}\right), &
\end{array}
$$

с ограничениями (2.10)–(2.22).

С учётом (2.11), двойственная задача

$$
\begin{array}{lll}
a_1-\frac{\sigma}{\tau}c_1=0, & a_1-\frac{\sigma}{\tau}c_4=0, & 2a_2+2a_3-\frac{1}{2}c_7=0, \\
a_2-\frac{\nu}{\tau}c_2=0, & a_2-\frac{\mu}{\tau}c_4-\frac{\mu}{\tau}c_5=0, & 2a_4+2a_5-\frac{1}{2}c_7=0, \\
a_3-\frac{\mu}{\tau}c_1-\frac{\mu}{\tau}c_2=0, & a_3-\frac{\nu}{\tau}c_5=0, & c_1+c_2+c_3=1, \\
a_4-\frac{\nu}{\tau}c_3=0, & a_4-\frac{\mu}{\tau}c_4-\frac{\mu}{\tau}c_6=0, & c_4+c_5+c_6=1, \\
a_5-\frac{\mu}{\tau}c_1-\frac{\mu}{\tau}c_3=0, & a_5-\frac{\nu}{\tau}c_6=0, &
\end{array}
$$

$$a_1,\, a_2,\, a_3,\, a_4,\, a_5 \geq 0,$$

$$(2a_1+c_7)\cdot f_\sigma(a)+a_1\cdot\omega_2(f,\,h)+\sum_{i=2}^{5}a_i\cdot\omega_2\left(f,\,h+\frac{\tau}{2}\right)\to\inf$$

имеет решение

$$
\begin{gathered}
a_1=\frac{\sigma^2}{\tau^2},\quad a_2=a_3=a_4=a_5=\frac{\mu\nu}{\tau^2}=\frac{\tau^2-\sigma^2}{4\tau^2}, \\
c_1=c_4=\frac{\sigma}{\tau},\quad c_2=c_3=c_5=c_6=\frac{\mu}{\tau},\quad c_7=\frac{8\mu\nu}{\tau^2},
\end{gathered}
$$

откуда

$$
\begin{aligned}
&f_\tau(a-h)-2f_\sigma(a)+f_\tau(a+h)\leq \\
&\qquad\leq\frac{\sigma^2}{\tau^2}\omega_2(f,\,h)+\frac{\tau^2-\sigma^2}{\tau^2}\omega_2\left(f,\,h+\frac{\tau}{2}\right)\leq\omega_2\left(f,\,h+\frac{\tau}{2}\right).
\end{aligned}
$$

□

**Лемма 2.4.** Пусть $\delta\in\left(0,\,\frac{1}{2}\right]$, $f\in F^0$. Тогда

$$\left|f_\delta\left(k\pm\frac{\delta}{2}\right)\right|\leq\frac{2-\delta^2}{4}\omega_2(f,\,1)\qquad\forall k\in\mathbb{Z}.$$

*Доказательство.* Достаточно доказать, что

$$f_\delta\left(\frac{\delta}{2}\right) \le \frac{2-\delta^2}{4}\omega_2(f,\,1).$$

По лемме 2.3

$$-f_{1-\delta}\left(\frac{1+\delta}{2}\right) + 2f_\delta\left(1+\frac{\delta}{2}\right) - f_{1-\delta}\left(1+\frac{1+\delta}{2}\right) \le \omega_2(f,\,1), \tag{2.23}$$

$$-f_{1-\delta}\left(-1+\frac{1+\delta}{2}\right) + 2f_\delta\left(\frac{\delta}{2}\right) - f_{1-\delta}\left(\frac{1+\delta}{2}\right) \le \omega_2(f,\,1), \tag{2.24}$$

$$-f_\delta\left(-1+\frac{\delta}{2}\right) + 2f_\delta\left(\frac{\delta}{2}\right) - f_\delta\left(1+\frac{\delta}{2}\right) \le \omega_2(f,\,1). \tag{2.25}$$

Средние значения функции $f$ связаны равенствами

$$\delta f_\delta\left(\frac{\delta}{2}\right) + (1-\delta)f_{1-\delta}\left(\frac{1+\delta}{2}\right) = 0, \tag{2.26}$$

$$\delta f_\delta\left(1+\frac{\delta}{2}\right) + (1-\delta)f_{1-\delta}\left(1+\frac{1+\delta}{2}\right) = 0, \tag{2.27}$$

$$\delta f_\delta\left(-1+\frac{\delta}{2}\right) + (1-\delta)f_{1-\delta}\left(-1+\frac{1+\delta}{2}\right) = 0. \tag{2.28}$$

Поставим задачу линейного программирования

$$f_\delta\left(\frac{\delta}{2}\right) \to \sup$$

относительно величин

$$\begin{array}{cc} f_{1-\delta}\left(\frac{1+\delta}{2}\right), & f_\delta\left(-1+\frac{\delta}{2}\right), \\ f_{1-\delta}\left(1+\frac{1+\delta}{2}\right), & f_\delta\left(1+\frac{\delta}{2}\right), \\ f_{1-\delta}\left(-1+\frac{1+\delta}{2}\right), & f_\delta\left(\frac{\delta}{2}\right) \end{array}$$

с ограничениями (2.23)–(2.28). Решение двойственной задачи

$$\begin{array}{ll} a_1+a_2-(1-\delta)c_1=0, & a_3-\delta c_3=0, \\ a_1-(1-\delta)c_2=0, & 2a_1-a_3+\delta c_2=0, \\ a_2-(1-\delta)c_3=0, & 2a_2+2a_3+\delta c_1=1, \end{array}$$

$$a_1,\,a_2,\,a_3 \ge 0, \quad (a_1+a_2+a_3)\cdot\omega_2(f,\,1) \to \inf$$

имеет вид

$$\begin{array}{ccc} a_1 = \frac{\delta(1-\delta)}{4}, & a_2 = \frac{(1-\delta)(2-\delta)}{4}, & a_3 = \frac{\delta(2-\delta)}{4}, \\ c_1 = \frac{1}{2}, & c_2 = \frac{\delta}{4}, & c_3 = \frac{2-\delta}{4}, \end{array}$$

откуда

$$f_\delta\left(\frac{\delta}{2}\right) \leq \frac{2-\delta^2}{4}\omega_2(f,\,1).$$

□

**Лемма 2.5.** Пусть $b \in \left(\frac{1}{3},\,1\right)$, $f \in F_b$. Тогда

$$\frac{1}{2}\left(f_{\frac{3b-1}{4}}\left(1+\frac{3b-1}{8}\right)+f_{\frac{3b-1}{4}}\left(1+\frac{5b+1}{8}\right)\right)-2f_{\frac{1-b}{2}}\left(1+\frac{3+b}{4}\right)\leq\omega_2(f,\,1).$$

*Доказательство.* По лемме 2.2

$$f_{\frac{3b-1}{4}}\left(1+\frac{1+5b}{8}\right)-2f_{\frac{1-b}{4}}\left(1+\frac{5+3b}{8}\right)+f_{\frac{1+b}{4}}\left(2+\frac{1+b}{8}\right)\leq\omega_2(f,\,1), \quad (2.29)$$

$$f_{\frac{3b-1}{4}}\left(1+\frac{3b-1}{8}\right)-2f_{\frac{1-b}{4}}\left(1+\frac{7+b}{8}\right)+f_{\frac{1+b}{4}}\left(2+\frac{7-b}{8}\right)\leq\omega_2(f,\,1), \quad (2.30)$$

$$f_{\frac{3b-1}{4}}\left(1+\frac{5b+1}{8}\right)-2f_{\frac{1-b}{2}}\left(1+\frac{3+b}{4}\right)+f_{\frac{3-b}{4}}\left(2+\frac{3-b}{8}\right)\leq\omega_2(f,\,1), \quad (2.31)$$

$$f_{\frac{3b-1}{4}}\left(1+\frac{3b-1}{8}\right)-2f_{\frac{1-b}{2}}\left(1+\frac{3+b}{4}\right)+f_{\frac{3-b}{4}}\left(2+\frac{5+b}{8}\right)\leq\omega_2(f,\,1). \quad (2.32)$$

Средние значения функции $f$ связаны соотношением

$$\frac{1}{2}f_{\frac{1-b}{4}}\left(1+\frac{5+3b}{8}\right)+\frac{1}{2}f_{\frac{1-b}{4}}\left(1+\frac{7+b}{8}\right)-f_{\frac{1-b}{2}}\left(1+\frac{3+b}{4}\right)=0, \quad (2.33)$$

кроме того, поскольку $f \in F_b$, то

$$\frac{1+b}{4}f_{\frac{1+b}{4}}\left(2+\frac{1+b}{8}\right)+\frac{3-b}{4}f_{\frac{3-b}{4}}\left(2+\frac{5+b}{8}\right)=0, \quad (2.34)$$

$$\frac{3-b}{4}f_{\frac{3-b}{4}}\left(2+\frac{3-b}{8}\right)+\frac{1+b}{4}f_{\frac{1+b}{4}}\left(2+\frac{7-b}{8}\right)=0. \quad (2.35)$$

Поставим задачу линейного программирования

$$-2f_{\frac{1-b}{2}}\left(1+\frac{3+b}{4}\right)\to\sup$$

относительно величин

$$\begin{gathered}
f_{\frac{1-b}{4}}\left(1+\tfrac{5+3b}{8}\right), \quad f_{\frac{1+b}{4}}\left(2+\tfrac{1+b}{8}\right), \\
f_{\frac{1-b}{4}}\left(1+\tfrac{7+b}{8}\right), \quad f_{\frac{1+b}{4}}\left(2+\tfrac{7-b}{8}\right), \\
f_{\frac{3-b}{4}}\left(2+\tfrac{3-b}{8}\right), \quad f_{\frac{1-b}{2}}\left(1+\tfrac{3+b}{4}\right), \\
f_{\frac{3-b}{4}}\left(2+\tfrac{5+b}{8}\right)
\end{gathered}$$

с ограничениями (2.29)–(2.35).

Решение двойственной задачи

$$\begin{aligned}
&-2a_1+\tfrac{1}{2}c_1=0, \quad a_1+\tfrac{1+b}{4}c_2=0, \\
&-2a_2+\tfrac{1}{2}c_1=0, \quad a_2+\tfrac{1+b}{4}c_3=0, \\
&a_3+\tfrac{3-b}{4}c_3=0, \quad 2a_3+2a_4+c_1=2, \\
&a_4+\tfrac{3-b}{4}c_2=0,
\end{aligned}$$

$$a_1,\, a_2,\, a_3,\, a_4 \ge 0,$$

$$-(a_1+a_3)f_{\frac{3b-1}{4}}\left(1+\frac{1+5b}{8}\right)-(a_2+a_4)f_{\frac{3b-1}{4}}\left(1+\frac{3b-1}{8}\right)+$$
$$+(a_1+a_2+a_3+a_4)\cdot\omega_2(f,\,1)\to\inf$$

имеет вид

$$\begin{gathered}
a_1=\tfrac{1+b}{8}, \qquad a_2=\tfrac{1+b}{8}, \qquad a_3=\tfrac{3-b}{8}, \qquad a_4=\tfrac{3-b}{8}, \\
c_1=\tfrac{1+b}{2}, \qquad c_2=-\tfrac{1}{2}, \qquad c_3=-\tfrac{1}{2},
\end{gathered}$$

откуда

$$-2f_{\frac{1-b}{2}}\left(1+\frac{3+b}{4}\right)\le\omega_2(f,\,1)-\frac{1}{2}\left(f_{\frac{3b-1}{4}}\left(1+\frac{3b-1}{8}\right)+f_{\frac{3b-1}{4}}\left(1+\frac{5b+1}{8}\right)\right).$$

□

**Лемма 2.6.** Пусть $b\in\left(\frac{1}{3},\,1\right]$, $f\in F_b$. Тогда

$$\frac{3+b}{1+b}f_{\frac{1-b}{2}}\left(-\frac{1-b}{4}\right)-$$
$$-\frac{1+b}{4}\left(f_{\frac{3b-1}{4}}\left(\frac{3b-1}{8}\right)+f_{\frac{3b-1}{4}}\left(\frac{5b+1}{8}\right)\right)-\frac{1-b}{2}f_{1-b}\left(\frac{1+b}{2}\right)\le\omega_2(f,\,1).$$

*Доказательство.* Поскольку

$$\frac{1+b}{2} f_{\frac{1+b}{2}}\left(-\frac{3-b}{4}\right)+\frac{1-b}{2} f_{\frac{1-b}{2}}\left(-\frac{1-b}{4}\right)=0,$$

а, следовательно,

$$\frac{3+b}{1+b} f_{\frac{1-b}{2}}\left(-\frac{1-b}{4}\right)=-f_{\frac{1+b}{2}}\left(-\frac{3-b}{4}\right)+2 f_{\frac{1-b}{2}}\left(-\frac{1-b}{4}\right), \tag{2.36}$$

достаточно доказать, что

$$\begin{aligned} & -f_{\frac{1+b}{2}}\left(-\frac{3-b}{4}\right)+2 f_{\frac{1-b}{2}}\left(-\frac{1-b}{4}\right)- \\ & -\frac{1+b}{4}\left(f_{\frac{3b-1}{4}}\left(\frac{3b-1}{8}\right)+f_{\frac{3b-1}{4}}\left(\frac{5b+1}{8}\right)\right)-\frac{1-b}{2} f_{1-b}\left(\frac{1+b}{2}\right) \leq \omega_2(f,\, 1). \end{aligned}$$

Пусть $b \in \left(\frac{1}{3},\, \frac{3}{5}\right]$. По лемме 2.2

$$-f_{\frac{1+b}{4}}\left(-\frac{7-b}{8}\right)+2 f_{\frac{1-b}{4}}\left(-\frac{1-b}{8}\right)-f_{\frac{3-b}{4}}\left(\frac{5+b}{8}\right) \leq \omega_2(f,\, 1), \tag{2.37}$$

$$-f_{\frac{1+b}{4}}\left(-\frac{5-3b}{8}\right)+2 f_{\frac{1-b}{4}}\left(-\frac{3-3b}{8}\right)-f_{\frac{3b-1}{4}}\left(\frac{3b-1}{8}\right) \leq \omega_2(f,\, 1), \tag{2.38}$$

$$-f_{\frac{3-b}{4}}\left(-\frac{5+b}{8}\right)+2 f_{\frac{1-b}{2}}\left(-\frac{1-b}{4}\right)-f_{\frac{3b-1}{4}}\left(\frac{5b+1}{8}\right) \leq \omega_2(f,\, 1), \tag{2.39}$$

$$-f_{\frac{3b-1}{4}}\left(-\frac{7-5b}{8}\right)+2 f_{\frac{3b-1}{4}}\left(-\frac{1-b}{4}\right)-f_{\frac{3b-1}{4}}\left(\frac{3b-1}{8}\right) \leq \omega_2(f,\, 1), \tag{2.40}$$

$$-f_{\frac{1+b}{4}}\left(-\frac{7-b}{8}\right)+2 f_{\frac{1-b}{4}}\left(-\frac{3-3b}{8}\right)-f_{\frac{3b-1}{4}}\left(\frac{5b+1}{8}\right) \leq \omega_2(f,\, 1). \tag{2.41}$$

$$-f_{\frac{1-b}{2}}\left(-\frac{1}{2}\right)+2 f_{\frac{3-5b}{8}}\left(-\frac{5-3b}{16}\right)-f_{\frac{3b-1}{4}}\left(\frac{3b-1}{8}\right) \leq \omega_2(f,\, 1). \tag{2.42}$$

$$-f_{\frac{1-b}{2}}\left(-\frac{1}{2}\right)+2 f_{\frac{3-5b}{8}}\left(-\frac{3-5b}{16}\right)-f_{\frac{3b-1}{4}}\left(\frac{5b+1}{8}\right) \leq \omega_2(f,\, 1). \tag{2.43}$$

Средние значения функции $f$ связаны соотношениями

$$\frac{1}{2} f_{\frac{1+b}{4}}\left(-\frac{7-b}{8}\right)+\frac{1}{2} f_{\frac{1+b}{4}}\left(-\frac{5-3b}{8}\right)=f_{\frac{1+b}{2}}\left(-\frac{3-b}{4}\right), \tag{2.44}$$

$$\frac{1}{2} f_{\frac{1+b}{4}}\left(-\frac{7-b}{8}\right)+\frac{1-b}{1+b} f_{\frac{1-b}{2}}\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{3b-1}{2+2b} f_{\frac{3b-1}{4}}\left(-\frac{3-b}{8}\right)=f_{\frac{1+b}{2}}\left(-\frac{3-b}{4}\right), \tag{2.45}$$

$$\frac{3-b}{2+2b} f_{\frac{3-b}{4}}\left(-\frac{5+b}{8}\right)+\frac{3b-1}{2+2b} f_{\frac{3b-1}{4}}\left(-\frac{7-5b}{8}\right)=f_{\frac{1+b}{2}}\left(-\frac{3-b}{4}\right), \qquad (2.46)$$

$$f_{\frac{1-b}{2}}\left(-\frac{1-b}{4}\right)-\frac{1}{2} f_{\frac{1-b}{4}}\left(-\frac{1-b}{8}\right)-\frac{1}{2} f_{\frac{1-b}{4}}\left(-\frac{3-3b}{8}\right)=0, \qquad (2.47)$$

$$\begin{aligned} & f_{\frac{1-b}{2}}\left(-\frac{1-b}{4}\right)= \\ & \quad=\frac{3-5b}{4-4b}\left(f_{\frac{3-5b}{8}}\left(-\frac{5-3b}{16}\right)+f_{\frac{3-5b}{8}}\left(-\frac{3-5b}{16}\right)\right)+\frac{3b-1}{2-2b} f_{\frac{3b-1}{4}}\left(-\frac{1-b}{4}\right). \end{aligned} \qquad (2.48)$$

Поставим задачу линейного программирования

$$2 f_{\frac{1-b}{2}}\left(-\frac{1-b}{4}\right) \rightarrow \sup$$

относительно величин

$$\begin{gathered} f_{\frac{1+b}{4}}\left(-\tfrac{7-b}{8}\right), \quad f_{\frac{1-b}{4}}\left(-\tfrac{1-b}{8}\right), \\ f_{\frac{1+b}{4}}\left(-\tfrac{5-3b}{8}\right), \quad f_{\frac{1-b}{4}}\left(-\tfrac{3-3b}{8}\right), \\ f_{\frac{3-b}{4}}\left(\tfrac{5+b}{8}\right), \quad f_{\frac{3b-1}{4}}\left(-\tfrac{1-b}{4}\right), \\ f_{\frac{3b-1}{4}}\left(-\tfrac{3-b}{8}\right), \quad f_{\frac{3-5b}{8}}\left(-\tfrac{5-3b}{16}\right), \\ f_{\frac{1-b}{2}}\left(-\tfrac{1}{2}\right), \quad f_{\frac{3-5b}{8}}\left(-\tfrac{3-5b}{16}\right), \\ f_{\frac{1-b}{2}}\left(-\frac{1-b}{4}\right) \end{gathered}$$

с ограничениями (2.37)–(2.48).

Двойственная задача

$$\begin{array}{ll} a_1+a_5-\frac{1}{2} c_1-\frac{1}{2} c_2=0, & 2 a_1-\frac{1}{2} c_4=0, \\ a_2-\frac{1}{2} c_1=0, & 2 a_2+2 a_5-\frac{1}{2} c_4=0, \\ a_3-\frac{3-b}{2+2b} c_3=0, & 2 a_4-\frac{3b-1}{2-2b} c_5=0, \\ a_4-\frac{3b-1}{2+2b} c_2-\frac{3b-1}{2+2b} c_3=0, & 2 a_6-\frac{3-5b}{4-4b} c_5=0, \\ a_6+a_7-\frac{1-b}{1+b} c_2=0, & 2 a_7-\frac{3-5b}{4-4b} c_5=0, \end{array}$$

$$2 a_3+c_4+c_5=2,$$

$$a_1,\, a_2,\, a_3,\, a_4,\, a_5,\, a_6,\, a_7 \geq 0,$$

$$\begin{aligned} & \omega_2(f,\, 1) \cdot \sum_{i=1}^7 a_i+a_1 f_{\frac{3-b}{4}}\left(\frac{5+b}{8}\right)+\left(c_1+c_2+c_3\right) \cdot f_{\frac{1+b}{2}}\left(-\frac{3-b}{4}\right)+ \\ & +\left(a_2+a_4+a_6\right) f_{\frac{3b-1}{4}}\left(\frac{3b-1}{8}\right)+\left(a_3+a_5+a_7\right) f_{\frac{3b-1}{4}}\left(\frac{5b+1}{8}\right) \rightarrow \inf \end{aligned}$$

имеет решение

$$\begin{array}{rr}
a_1 = \frac{3-b}{8}, & c_1 = b, \\
a_2 = \frac{b}{2}, & c_2 = \frac{3-5b}{2}, \\
a_3 = \frac{(3-b)(3b-1)}{4+4b}, & c_3 = \frac{3b-1}{2}, \\
a_4 = \frac{(3b-1)(1-b)}{2+2b}, & c_4 = \frac{3-b}{2}, \\
a_5 = \frac{3-5b}{8}, & c_5 = \frac{2(1-b)^2}{1+b}, \\
a_6 = \frac{(3-5b)(1-b)}{4+4b}, & \\
a_7 = \frac{(3-5b)(1-b)}{4+4b}, &
\end{array}$$

откуда следует оценка

$$2f_{\frac{1-b}{4}}\left(-\frac{1-b}{4}\right) \le \omega_2(f,\,1) + \frac{3-b}{8} f_{\frac{3-b}{4}}\left(\frac{5+b}{8}\right) + f_{\frac{1+b}{2}}\left(-\frac{3-b}{4}\right) + \\ + \frac{1+b}{4} f_{\frac{3b-1}{4}}\left(\frac{3b-1}{8}\right) + \frac{3-b}{8} f_{\frac{3b-1}{4}}\left(\frac{5b+1}{8}\right),$$

что эквивалентно требуемому, если учесть, что

$$\frac{3-b}{8} f_{\frac{3-b}{4}}\left(\frac{5+b}{8}\right) = \frac{3b-1}{8} f_{\frac{3b-1}{4}}\left(\frac{5b+1}{8}\right) + \frac{1-b}{2} f_{\frac{1-b}{2}}\left(\frac{1+b}{2}\right).$$

Пусть теперь $b \in \left[\frac{3}{5},\,1\right)$.

По лемме 2.3

$$-f_{\frac{3b-1}{4}}\left(-\frac{3-b}{8}\right) + 2f_{\frac{1-b}{2}}\left(-\frac{1-b}{4}\right) - f_{\frac{3b-1}{4}}\left(\frac{3b-1}{8}\right) \le \omega_2(f,\,1), \qquad (2.49)$$

и нам остаётся рассмотреть задачу

$$2f_{\frac{1-b}{2}}\left(-\frac{1-b}{4}\right) \to \sup$$

относительно величин

$$\begin{array}{ll}
f_{\frac{1+b}{4}}\left(-\frac{7-b}{8}\right), & f_{\frac{1-b}{4}}\left(-\frac{1-b}{8}\right), \\
f_{\frac{1+b}{4}}\left(-\frac{5-3b}{8}\right), & f_{\frac{1-b}{4}}\left(-\frac{3-3b}{8}\right), \\
f_{\frac{3-b}{4}}\left(-\frac{5+b}{8}\right), & f_{\frac{1-b}{2}}\left(-\frac{1-b}{4}\right), \\
f_{\frac{3b-1}{4}}\left(-\frac{3-b}{8}\right) &
\end{array}$$

с ограничениями (2.37)-(2.39), (2.49), (2.44), (2.46)-(2.47). Двойственная задача

$$\begin{aligned}
&a_1 - \tfrac{1}{2}c_1 = 0, && 2a_1 - \tfrac{1}{2}c_3 = 0,\\
&a_2 - \tfrac{1}{2}c_1 = 0, && 2a_2 - \tfrac{1}{2}c_3 = 0,\\
&a_3 - \tfrac{3-b}{2+2b}c_2 = 0, && 2a_3 + 2a_4 + c_3 = 2,\\
&a_4 - \tfrac{3b-1}{2+2b}c_2 = 0, &&
\end{aligned}$$

$$a_1,\, a_2,\, a_3,\, a_4 \geq 0,$$

$$\omega_2(f,\,1)\cdot\sum_{i=1}^{4} a_i + a_1 f_{\frac{3-b}{4}}\left(\frac{5+b}{8}\right) + (c_1+c_2)\cdot f_{\frac{1+b}{2}}\left(-\frac{3-b}{4}\right) +$$
$$+(a_2+a_4) f_{\frac{3b-1}{4}}\left(\frac{3b-1}{8}\right) + a_3 f_{\frac{3b-1}{4}}\left(\frac{5b+1}{8}\right) \to \inf$$

имеет решение

$$\begin{aligned}
a_1 &= \tfrac{3-b}{8}, & c_1 &= \tfrac{3-b}{4},\\
a_2 &= \tfrac{3-b}{8}, & c_2 &= \tfrac{1+b}{4},\\
a_3 &= \tfrac{3-b}{8}, & c_3 &= \tfrac{3-b}{2},\\
a_4 &= \tfrac{3b-1}{8}, &&
\end{aligned}$$

откуда так же следует оценка

$$2f_{\frac{1-b}{4}}\left(-\frac{1-b}{4}\right) \leq \omega_2(f,\,1) + \frac{3-b}{8} f_{\frac{3-b}{4}}\left(\frac{5+b}{8}\right) + f_{\frac{1+b}{2}}\left(-\frac{3-b}{4}\right) +$$
$$+\frac{1+b}{4} f_{\frac{3b-1}{4}}\left(\frac{3b-1}{8}\right) + \frac{3-b}{8} f_{\frac{3b-1}{4}}\left(\frac{5b+1}{8}\right).$$

$\square$

## 2.4 Доказательство теоремы 2.2 в случае $b \in \left[0,\, \frac{1}{3}\right]$

Для начала рассмотрим случай $b = 0$. Согласно лемме 2.1 при $\tau = \frac{1}{2}$,

$$-2f_1\left(\frac{1}{2}\right) + 2 \leq \omega_2(f,\,1),$$

с другой стороны, поскольку $f \in F^0$, то $f_1\left(\frac{1}{2}\right) = \int\limits_0^1 f(x)\,dx = 0$. Следовательно,

$$q(0) < 2 \leq \omega_2(f,\,1).$$

Пусть $b \in \left(0,\, \frac{1}{3}\right)$, $f \in F_b$. По лемме 2.1

$$f_b\left(-\frac{1-2b}{2}\right) - 2f_{\frac{b}{2}}\left(\frac{3b}{4}\right) + 1 \le \omega_2(f,\, 1), \tag{2.50}$$

$$-f_{\frac{b}{2}}\left(\frac{b}{4}\right) - f_{\frac{b}{2}}\left(1 + \frac{3b}{4}\right) + 2 \le \omega_2(f,\, 1), \tag{2.51}$$

$$-f_{\frac{1-3b}{2}}\left(\frac{1+b}{4}\right) - f_{\frac{1-3b}{2}}\left(\frac{3+3b}{4}\right) + 2 \le \omega_2(f,\, 1), \tag{2.52}$$

$$-2f_{2b}\left(\frac{1+b}{2}\right) + 2 \le \omega_2(f,\, 1), \tag{2.53}$$

$$-f_{\frac{1-b}{2}}\left(-\frac{1-b}{4}\right) + f_{\frac{1-b}{2}}\left(1 + \frac{3+b}{4}\right) + \frac{4}{1-b} \le \frac{2}{1-b} \cdot \omega_2(f,\, 1). \tag{2.54}$$

По лемме 2.2

$$-f_{2b}\left(\frac{1+b}{2}\right) + 2f_{\frac{b}{2}}\left(1 + \frac{3b}{4}\right) - f_b\left(1 + \frac{1+2b}{2}\right) \le \omega_2(f,\, 1). \tag{2.55}$$

По лемме 2.4 для $\delta = \frac{1-3b}{2}$ и $k = 2,\, -1$

$$f_{\frac{1-3b}{2}}\left(-\frac{1-3b}{4}\right) - f_{\frac{1-3b}{2}}\left(1 + \frac{3+3b}{4}\right) \le \frac{7+6b-9b^2}{8}\omega_2(f,\, 1). \tag{2.56}$$

Средние значения функции $f$ связаны равенствами

$$f_{\frac{1-b}{2}}\left(-\frac{1-b}{4}\right) - \frac{2b}{1-b}f_b\left(-\frac{1-2b}{2}\right) - \frac{1-3b}{1-b}f_{\frac{1-3b}{2}}\left(-\frac{1-3b}{4}\right) = 0, \tag{2.57}$$

$$f_{\frac{1-b}{2}}\left(1 + \frac{3+b}{4}\right) - \frac{2b}{1-b}f_b\left(1 + \frac{1+2b}{2}\right) - \frac{1-3b}{1-b}f_{\frac{1-3b}{2}}\left(1 + \frac{3+3b}{4}\right) = 0, \tag{2.58}$$

$$\begin{aligned} &\frac{b}{2}f_{\frac{b}{2}}\left(\frac{b}{4}\right) + \frac{b}{2}f_{\frac{b}{2}}\left(\frac{3b}{4}\right) + \\ &\quad + \frac{1-3b}{2}f_{\frac{1-3b}{2}}\left(\frac{1+b}{4}\right) + 2bf_{2b}\left(\frac{1+b}{2}\right) + \frac{1-3b}{2}f_{\frac{1-3b}{2}}\left(\frac{3+3b}{4}\right) = 0. \end{aligned} \tag{2.59}$$

Поставим задачу линейного программирования

$$\omega_2(f,\, 1) \to \inf$$

относительно величин

$$\begin{array}{lll}
f_b\left(-\frac{1-2b}{2}\right), & f_{\frac{b}{2}}\left(1+\frac{3b}{4}\right), & f_{\frac{b}{2}}\left(\frac{3b}{4}\right), \\
f_{\frac{1-3b}{2}}\left(1+\frac{3+3b}{4}\right), & f_b\left(1+\frac{1+2b}{2}\right), & f_{\frac{b}{2}}\left(\frac{b}{4}\right), \\
f_{\frac{1-b}{2}}\left(-\frac{1-b}{4}\right), & f_{\frac{1-3b}{2}}\left(\frac{1+b}{4}\right), & f_{\frac{1-b}{2}}\left(1+\frac{3+b}{4}\right), \\
 & & f_{2b}\left(\frac{1+b}{2}\right), \\
 & \omega_2(f,\,1) &
\end{array}$$

с ограничениями (2.50)–(2.59). Двойственная задача

$$\begin{array}{lll}
a_1-\frac{2b}{1-b}c_1=0, & a_2-2a_6=0, & 2a_1-\frac{b}{2}c_3=0, \\
a_7+\frac{1-3b}{1-b}c_2=0, & a_6+\frac{2b}{1-b}c_2=0, & a_2-\frac{b}{2}c_3=0, \\
a_5-c_1=0, & a_3-\frac{1-3b}{2}c_3=0, & a_5+c_2=0, \\
 & & 2a_4+a_6-2bc_3=0,
\end{array}$$

$$a_1+a_2+a_3+a_4+\frac{2}{1-b}a_5+a_6+\frac{7+6b-9b^2}{8}a_7=1,$$

$$a_1,\,a_2,\,a_3,\,a_4,\,a_5,\,a_6,\,a_7\geq 0,$$

$$a_1+2a_2+2a_3+2a_4+\frac{4}{1-b}\cdot a_5+$$

$$+f_{\frac{1-3b}{2}}\left(-\frac{1-3b}{4}\right)\left(a_7-\frac{1-3b}{1-b}c_1\right)+f_{\frac{1-3b}{2}}\left(\frac{3+3b}{4}\right)\left(\frac{1-3b}{2}c_3-a_3\right)\to\sup$$

имеет решение

$$a_1=\frac{16b}{P(b)},\quad a_2=\frac{32b}{P(b)},\quad a_3=\frac{32(1-3b)}{P(b)},$$

$$a_4=\frac{56b}{P(b)},\quad a_5=\frac{8(1-b)}{P(b)},\quad a_6=\frac{16b}{P(b)},\quad a_7=\frac{8(1-3b)}{P(b)},$$

$$c_1=\frac{8(1-b)}{P(b)},\quad c_2=-\frac{8(1-b)}{P(b)},\quad c_3=\frac{64}{P(b)},$$

где $P(b)=27b^3-27b^2+9b+55$.

Следовательно,

$$\omega_2(f,\,1)\geq$$

$$\geq\frac{16b+2\cdot 32b+2\cdot 32(1-3b)+2\cdot 54b+\frac{4}{1-b}\cdot 8(1-b)}{P(b)}=$$

$$=\frac{96}{27b^3-27b^2+9b+55}=q(b).$$

Наконец, при $b = \frac{1}{3}$ значения $a_3$ и $a_7$ равны нулю. Поэтому мы можем рассмотреть аналогичную задачу оптимизации, исключив неравенства (2.52) и (2.56), содержащие величины $f_{\frac{1-3b}{2}}\left(-\frac{1-3b}{4}\right)$, $f_{\frac{1-3b}{2}}\left(\frac{1+b}{4}\right)$, $f_{\frac{1-3b}{2}}\left(\frac{3+3b}{4}\right)$ и $f_{\frac{1-3b}{2}}\left(1+\frac{3+3b}{4}\right)$. Кроме того, в случае $b = \frac{1}{3}$ эти величины могут быть исключены из равенств (2.57) – (2.59). Легко видеть, что двойственная задача в этом случае будет иметь то же самое решение.

## 2.5 Доказательство теоремы 2.2 в случае $b \in \left(\frac{1}{3},\, 1\right]$

Доказательство в случае $b = 1$ проводится так же как в рассмотренном в предыдущем параграфе случае $b = 0$.

Пусть $b \in \left(\frac{1}{3},\, 1\right)$, $f \in F_b$. По лемме 2.1

$$f_{\frac{1-b}{2}}\left(-\frac{1-b}{4}\right) - 2f_{\frac{1-b}{4}}\left(\frac{1+3b}{8}\right) + 1 \le \omega_2(f,\, 1), \tag{2.60}$$

$$-f_{\frac{3b-1}{4}}\left(\frac{3b-1}{8}\right) - f_{\frac{3b-1}{4}}\left(1+\frac{5b+1}{8}\right) + 2 \le \omega_2(f,\, 1), \tag{2.61}$$

$$-f_{\frac{3b-1}{4}}\left(\frac{5b+1}{8}\right) - f_{\frac{3b-1}{4}}\left(1+\frac{3b-1}{8}\right) + 2 \le \omega_2(f,\, 1), \tag{2.62}$$

$$-f_{\frac{1-b}{4}}\left(\frac{5b-1}{8}\right) - f_{\frac{1-b}{4}}\left(1+\frac{3b+1}{8}\right) + 2 \le \omega_2(f,\, 1), \tag{2.63}$$

$$-2f_{1-b}\left(\frac{1+b}{2}\right) + 2 \le \omega_2(f,\, 1), \tag{2.64}$$

$$-f_{\frac{1-b}{2}}\left(-\frac{1-b}{4}\right) + f_{\frac{1-b}{2}}\left(1+\frac{3+b}{4}\right) + \frac{4}{1-b} \le \frac{2}{1-b}\cdot\omega_2(f,\, 1). \tag{2.65}$$

По лемме 2.2

$$-f_{1-b}\left(\frac{1+b}{2}\right) + 2f_{\frac{1-b}{4}}\left(1+\frac{1+3b}{8}\right) - f_{\frac{1-b}{2}}\left(1+\frac{3+b}{4}\right) \le \omega_2(f,\, 1). \tag{2.66}$$

По лемме 2.6

$$\frac{3+b}{1+b}f_{\frac{1-b}{2}}\left(-\frac{1-b}{4}\right) - \\ -\frac{1+b}{4}\left(f_{\frac{3b-1}{4}}\left(\frac{3b-1}{8}\right) + f_{\frac{3b-1}{4}}\left(\frac{5b+1}{8}\right)\right) - \frac{1-b}{2}f_{1-b}\left(\frac{1+b}{2}\right) \le \\ \le \omega_2(f,\, 1). \tag{2.67}$$

По лемме 2.5

$$\frac{1}{2}f_{\frac{3b-1}{4}}\left(1+\frac{3b-1}{8}\right)+\frac{1}{2}f_{\frac{3b-1}{4}}\left(1+\frac{5b+1}{8}\right)-2f_{\frac{1-b}{2}}\left(1+\frac{3+b}{4}\right)\le\omega_2(f,\,1). \tag{2.68}$$

Средние значения функции $f$ связаны равенством

$$\frac{3b-1}{4}f_{\frac{3b-1}{4}}\left(\frac{3b-1}{8}\right)+\frac{1-b}{4}f_{\frac{1-b}{4}}\left(\frac{5b-1}{8}\right)+\frac{1-b}{4}f_{\frac{1-b}{4}}\left(\frac{1+3b}{8}\right)+$$
$$+\frac{3b-1}{4}f_{\frac{3b-1}{4}}\left(\frac{5b+1}{8}\right)+(1-b)f_{1-b}\left(\frac{1+b}{2}\right)=0. \tag{2.69}$$

Поставим задачу линейного программирования

$$\omega_2(f,\,1)\to\inf$$

относительно величин

$$\begin{array}{ll}
f_{\frac{1-b}{2}}\left(-\frac{1-b}{4}\right), & f_{\frac{3b-1}{4}}\left(1+\frac{3b-1}{8}\right),\\
f_{\frac{1-b}{4}}\left(\frac{3b+1}{8}\right), & f_{\frac{3b-1}{4}}\left(\frac{5b+1}{8}\right),\\
f_{\frac{3b-1}{4}}\left(\frac{3b-1}{8}\right), & f_{\frac{1-b}{4}}\left(\frac{5b-1}{8}\right),\\
f_{\frac{1-b}{4}}\left(1+\frac{3b+1}{8}\right), & f_{\frac{3b-1}{4}}\left(1+\frac{5b+1}{8}\right),\\
f_{\frac{1-b}{2}}\left(1+\frac{3+b}{4}\right), & f_{1-b}\left(\frac{1+b}{2}\right),\\
\omega_2(f,\,1) &
\end{array}$$

с ограничениями (2.60)–(2.69).

Двойственная задача

$$\begin{array}{ll}
a_1-a_6+\frac{3+b}{1+b}a_8=0, & a_3-\frac{1}{2}a_9=0,\\
2a_1-\frac{1-b}{4}c_1=0, & a_3+\frac{1+b}{4}a_8-\frac{3b-1}{4}c_1=0,\\
a_2+\frac{1+b}{4}a_8-\frac{3b-1}{4}c_1=0, & a_4-\frac{1-b}{4}c_1=0,\\
a_4-2a_7=0, & a_2-\frac{1}{2}a_9=0,\\
a_6-a_7-2a_9=0, & 2a_5+a_7+\frac{1-b}{2}a_8-(1-b)c_1=0,
\end{array}$$

$$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+\frac{2}{1-b}a_6+a_7+a_8+a_9=1,$$

$$a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8,a_9\ge 0,$$

$$a_1+2a_2+2a_3+2a_4+2a_5+\frac{4}{1-b}a_6\to\sup$$

имеет решение

$$a_1 = \frac{2(1-b)^2(b^2+3b+4)}{P(b)}, \quad a_2 = \frac{4(3b-1)(1-b)(3+b)}{P(b)},$$
$$a_3 = \frac{4(3b-1)(1-b)(3+b)}{P(b)}, \quad a_4 = \frac{4(1-b)^2(b^2+3b+4)}{P(b)},$$
$$a_5 = \frac{(1-b)^2(-5b^2+13b+32)}{P(b)}, \quad a_6 = \frac{2(1-b)(-b^3+22b^2+63b-20)}{P(b)},$$
$$a_7 = \frac{2(1-b)^2(b^2+3b+4)}{P(b)}, \quad a_8 = \frac{16(1-b)(1+b)(3b-1)}{P(b)},$$
$$a_9 = \frac{8(3b-1)(1-b)(3+b)}{P(b)}, \quad c_1 = \frac{16(1-b)(b^2+3b+4)}{P(b)},$$

где $P(b) = 3b^4 - 69b^3 + 17b^2 + 385b - 80$. Следовательно,

$$\omega_2(f,\,1) \geq \frac{8(11b^2+66b-13)}{3b^4-69b^3+17b^2+385b-80} = q(b).$$

□

## 2.6 Функция из $F^*$ со вторым модулем непрерывности, равным $\frac{32}{19}$

Напомним, что

$$W_2^* = \sup_{f\in F^*} \frac{1}{\omega_2(f,\,1)} = \frac{1}{\inf\limits_{b\in[0,\,1]} \inf\limits_{f\in F_b} \omega_2(f,\,1)}.$$

Наша цель заключается в том, чтобы получить оценку снизу на величину $W_2^*$. Для это мы построим функцию из $f^* \in F_{\frac{1}{2}}$, второй модуль которой равен $\frac{32}{19}$. Таким образом мы получим оценку

$$\frac{19}{32} = 0.59375 \leq W_2^*.$$

Начнём с того, что рассмотрим кусочно-постоянную функцию $f^{**}$, определённую следующим образом:

$$f^{**}(x) = \begin{cases} \frac{32}{57}, & x \in \left(-1,\, -\frac{1}{4}\right), \\ \frac{16}{19}, & x \in \left[-\frac{1}{4},\, 0\right], \\ \frac{16}{19}, & x = \frac{3}{4}, \\ -\frac{16}{19}, & x \in \left[1+\frac{1}{2},\, 1+\frac{3}{4}\right], \\ -\frac{32}{19}, & x \in \left(1+\frac{3}{4},\, 2\right] \end{cases}$$

и $f^{**}(x) = 0$ в остальных точках отрезка $(-1,\, 2]$. Если $x \in (n,\, n+1]$, где $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1,\, 0,\, 1\}$, то положим

$$f^{**}(x) = -\frac{12}{19} n.$$

Для вычисления $\omega_2(f^{**},\, 1)$ нам будет полезна

**Лемма 2.7.** Пусть $f \in B(\mathbb{R})$, $A \subset \mathbb{R}$. Тогда

$$\sup_{x\in A,\, t\in[0,\,1]} |f(x-t) - 2f(x) + f(x+t)| \leq$$
$$\leq 2\max\{|\sup_{x\in A,\, y\in[x-1,\, x+1]} f(y) - \inf_{x\in A} f(x)|,\, |\inf_{x\in A,\, y\in[x-1,\, x+1]} f(y) - \sup_{x\in A} f(x)|\}, \tag{2.70}$$

$$\sup_{x\in A, t\in[0,\,1]} |f(x-t) - 2f(x) + f(x+t)| \leq$$
$$\leq \max\Big\{|\sup_{x\in A,\, y\in[x-1,\, x]} f(y) + \sup_{x\in A,\, y\in[x,\, x+1]} f(y) - 2\inf_{x\in A} f(x)|,$$
$$|\inf_{x\in A,\, y\in[x-1,\, x]} f(y) + \inf_{x\in A,\, y\in[x,\, x+1]} f(y) - 2\sup_{x\in A} f(x)|\Big\}. \tag{2.71}$$

*Доказательство.* Оба утверждения сразу следуют из неравенства

$$\sup_{x\in A,\, t\in[0,\,1]} |f(x-t)-2f(x)+f(x+t)| \le$$

$$\le \max\{ \sup_{x\in A,\, t\in[0,\,1]} \left(f(x-t)+f(x+t)-2f(x)\right),$$

$$- \inf_{x\in A,\, t\in[0,\,1]} \left(f(x-t)+f(x+t)-2f(x)\right)\} \le$$

$$\le \max\{ \sup_{x\in A,\, t\in[0,\,1]} \left(f(x-t)+f(x+t)\right) - 2\inf_{x\in A} f(x),$$

$$- \inf_{x\in A,\, t\in[0,\,1]} \left(f(x-t)+f(x+t)\right) + 2\sup_{x\in A} f(x)\}.$$

□

**Утверждение 1.**

$$\omega_2(f^{**},\, 1) = \frac{32}{19}.$$

*Доказательство.* Пусть для начала $n\in\mathbb{Z}\setminus\{-2,\dots,2\}$, $x\in(n,\,n+1]$, $t\in[0,\,1]$. Тогда

$$f^{**}(x-t)\in\left\{-\frac{12}{19}n+\frac{12}{19},\, -\frac{12}{19}n\right\},\quad f^{**}(x+t)\in\left\{-\frac{12}{19}n,\, -\frac{12}{19}n-\frac{12}{19}\right\},$$

$$f^{**}(x) = -\frac{12}{19}n.$$

Таким образом, $|f^{**}(x-t)-2f^{**}(x)+f^{**}(x+t)| \le \frac{12}{19} < \frac{32}{19}$.

Пусть $x\in(-2,\,-1]$. По (2.70) при $A=(-2,\,-1]$

$$\max_{x\in(-2,\,-1],\, t\in[0,\,1]} |f^{**}(x-t)-2f^{**}(x)+f^{**}(x+t)| \le$$

$$\le 2\max\left\{\left|\max_{y\in(-3,\,0]} f^{**}(y) - \min_{x\in(-2,\,-1]} f^{**}(x)\right|,\, \left|\min_{y\in(-3,\,0]} f^{**}(y) - \max_{x\in(-2,\,-1]} f^{**}(x)\right|\right\} =$$

$$= 2\max\left\{\left|\frac{36}{19}-\frac{24}{19}\right|,\, \left|\frac{32}{57}-\frac{24}{19}\right|\right\} = \frac{80}{57} < \frac{32}{19}.$$

В случае, если $x\in(-1,\,0]$, используя (2.70) при $A=(-1,\,0]$, получаем оценку

$$\max_{x\in(-1,\,0],\, t\in[0,\,1]} |f^{**}(x-t)-2f^{**}(x)+f^{**}(x+t)| \le$$

$$2\max\left\{\left|\max_{y\in(-2,\,1]} f^{**}(y) - \min_{y\in(-1,\,0]} f^{**}(y)\right|,\, \left|\min_{y\in(-2,\,1]} f^{**}(y) - \max_{y\in(-1,\,0]} f^{**}(y)\right|\right\} =$$

$$= 2\max\left\{\left|\frac{24}{19}-\frac{32}{57}\right|,\, \left|0-\frac{16}{19}\right|\right\} = \frac{32}{19}.$$

Пусть теперь $x \in \left[0,\, 1+\frac{1}{2}\right)$. Если $x = \frac{3}{4}$, то, как видно из определения $f^{**}$, для любого $t \in (0,\, 1]$

$$f^{**}\left(x-t\right) = -f^{**}(x+t),$$

следовательно,

$$\left|f^{**}\left(\frac{3}{4}-t\right) - 2f^{**}\left(\frac{3}{4}\right) + f^{**}\left(\frac{3}{4}+t\right)\right| = \frac{32}{19}.$$

Если же $x \in A = \left(0,\, 1+\frac{1}{2}\right) \setminus \left\{\frac{3}{4}\right\}$, то по (2.71) мы имеем оценку

$$\max_{x\in A, t\in[0,\,1]} |f^{**}(x-t) - 2f^{**}(x) + f^{**}(x+t)| \le$$
$$\le \max\{|\max_{x\in A,\, y\in[x-1,\,x]} f^{**}(y) + \max_{x\in A,\, y\in[x,\,x+1]} f^{**}(y) - 2\min_{x\in A} f^{**}(x)|,$$
$$|\min_{x\in A,\, y\in[x-1,\,x]} f^{**}(y) + \min_{x\in A,\, y\in[x,\,x+1]} f^{**}(y) - 2\max_{x\in A} f^{**}(x)|\} =$$
$$= \max\left\{\left|\frac{16}{19} + \frac{16}{19} - 0\right|,\, \left|0 - \frac{32}{19} - 0\right|\right\} = \frac{32}{19}.$$

В случае $x \in A = \left[1+\frac{1}{2},\, 1+\frac{3}{4}\right]$ по (2.71)

$$\max_{x\in A, t\in[0,\,1]} |f^{**}(x-t) - 2f^{**}(x) + f^{**}(x+t)| \le$$
$$\le \max\{|\max_{x\in A,\, y\in[x-1,\,x]} f^{**}(y) + \max_{x\in A,\, y\in[x,\,x+1]} f^{**}(y) - 2\min_{x\in A} f^{**}(x)|,$$
$$|\min_{x\in A,\, y\in[x-1,\,x]} f^{**}(y) + \min_{x\in A,\, y\in[x,\,x+1]} f^{**}(y) - 2\max_{x\in A} f^{**}(x)|\} =$$
$$= \max\left\{\left|\frac{16}{19} - \frac{16}{19} + 2\,\cdot\,\frac{16}{19}\right|,\, \left|-\frac{16}{19} - \frac{32}{19} + 2\,\cdot\,\frac{16}{19}\right|\right\} = \frac{32}{19}.$$

Наконец, по (2.71) для $x \in A = \left(1+\frac{3}{4},\, 3\right]$

$$\max_{x\in A, t\in[0,\,1]} |f^{**}(x-t) - 2f^{**}(x) + f^{**}(x+t)| \le$$
$$\le \max\{|\max_{x\in A,\, y\in[x-1,\,x]} f^{**}(y) + \max_{x\in A,\, y\in[x,\,x+1]} f^{**}(y) - 2\min_{x\in A} f^{**}(x)|,$$
$$|\min_{x\in A,\, y\in[x-1,\,x]} f^{**}(y) + \min_{x\in A,\, y\in[x,\,x+1]} f^{**}(y) - 2\max_{x\in A} f^{**}(x)|\} =$$
$$= \max\left\{\left|0 - \frac{32}{19} + 2\,\cdot\,\frac{32}{19}\right|,\, \left|-\frac{32}{19} - \frac{36}{19} + 2\,\cdot\,\frac{32}{19}\right|\right\} = \frac{32}{19}.$$

$\square$

Обозначим

$$f^*(x) = f^{**}(x) + \frac{12}{19}x - \frac{6}{19}.$$

Поскольку $f^*$ отличается от $f^{**}$ на линейную функцию, то $\omega_2(f^*,\, 1) = \omega_2(f^{**},\, 1)$.

**Утверждение 2.**

$$f^* \in F_{\frac{1}{2}}.$$

*Доказательство.* Нам необходимо проверить выполнение двух условий. Во-первых, что $f^*\left(\frac{1+\frac{1}{2}}{2}\right) = 1$. В самом деле, поскольку $\frac{1+\frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{4}$, при подстановке получаем

$$f^*\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{16}{19} + \frac{12}{19} \cdot \frac{3}{4} - \frac{6}{19} = 1.$$

Во-вторых, должно выполниться условие (2.1):

$$\int\limits_n^{n+1} f^*(x)\,dx = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Достаточно показать, что

$$\int\limits_n^{n+1} f^{**}(x)\,dx = -\int\limits_n^{n+1} \frac{12}{19}x - \frac{6}{19}\,dx = -\frac{12}{19}n.$$

Для $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1,\, 0,\, 1\}$ это утверждение прямо следует из определения $f^{**}$. Для оставшихся значений $n$ имеем

$$\int\limits_{-1}^{0} f^{**}(x)\,dx = \frac{32}{57} \cdot \frac{3}{4} + \frac{16}{19} \cdot \frac{1}{4} = \frac{12}{19},$$

$$\int\limits_0^1 f^{**}(x)\,dx = 0,$$

$$\int\limits_1^2 f^{**}(x)\,dx = -\frac{16}{19} \cdot \frac{1}{4} - \frac{32}{19} \cdot \frac{1}{4} = -\frac{12}{19}.$$

□

# Заключение

Основные результаты диссертационной работы состоят в следующем.

**1.** Доказана теорема об оценке равномерном приближении ограниченной функции операторами типа Канторовича на отрезке через второй модуль непрерывности. Результат является точным.

**2.** Доказана теорема об оценке равномерной нормы функции, ортогональной кусочно-постоянным с равностоящими узлами через второй модуль непрерывности. Полученная оценка не является точной, но улучшает известные ранее результаты. Доказано, что искомая точная константа также является точной в оценке наилучшего приближения постоянными функции, обладающей одинаковыми средними значениями между произвольными соседними целыми числами через второй модуль непрерывности.

# Литература


[1] *Bernstein S.* Demonstration du theoreme de Weierstrass fondee sur la calcul des probabilites // Сообщения Харьков. мат. о-ва. сер. 2. 1912. т. 13. № 1. с. 1–2.

[2] *Foucart S., Kryakin Y., Shadrin A.* On the exact constant in Jackson–Stechkin Inequality for the uniform metric // Constructive Approximation. 2009. vol. 29. p. 157–179.

[3] *Jackson D.* Uber die Genauigkeit der Annaherung stetiger Funktionen durch ganze rationale Funktionen gegebenen Grades und trigonometrische summen gegebener Ordnung. Dissertation. Göttingen. 1911.

[4] *Kryakin Yu.* Whitney's theorem for oscillating on $\mathbb{R}$ functions // arXiv:math/0612442v1. 2006.

[5] *Paltanea R.* Approximation theory using positive linear operators. Boston: Birkhäuser. 2004.

[6] *Sikkema P.* Der Wert einer Konstanten in der Theorie der Approximation mit Bernstein Polynomen // Numerische Mathematik. 1961. vol. 3. p. 107–116.

[7] *Vinogradov O. L., Zhuk V. V.* Sharp estimates for the deviation of the mean value of a periodic function in terms of moduli of continuity of higher order // J. Math. Sci. 2001. vol. 106. p. 2901—2918.

[8] *Whitney H.* On functions with bounded nth differences // J. Mat. Pureet Appl. 1957. vol. 36. p. 67–95.

[9] *Виноградов О. Л., Жук В. В.* Оценки функционалов с известным конечным набором моментов через модули непрерывности и поведение констант в неравенствах типа Джексона // Алгебра и анализ. 2012. т. 24. вып. 5. с. 1–43.

[10] *Виденский В. С.* Работы Л. В. Канторовича о полиномах С. Н. Бернштейна // Вестник СПбГУ. сер. 1. 2013. вып. 2. с. 50–53.

[11] *Виноградов О. Л., Ихсанов Л. Н.* Оценки нормы функции, ортогональной кусочно-постоянным, через модули непрерывности высоких порядков // Вестник СПбГУ. сер. 1. 2016. т. 3. вып. 1. с. 8–12.

[12] *Иванов В. И.* Прямые и обратные теоремы теории приближения периодических функций в работах С. Б. Стечкина и их развитие // Тр. ИММ УрО РАН. 2010. т. 16. № 4. с. 5–17.

[13] *Ихсанов Л. Н.* Оценка нормы функции, ортогональной кусочно-постоянным, через второй модуль непрерывности // Записки научных семинаров ПОМИ. 2017. т. 456. с. 96–106.

[14] *Ихсанов Л. Н.* Оценка приближения операторами типа Канторовича через второй модуль непрерывности // Записки научных семинаров ПОМИ. 2019. т. 480. с. 122–147.

[15] *Ихсанов Л. Н.* Точная оценка приближения абстрактными операторами типа Канторовича через второй модуль непрерывности // Записки научных семинаров ПОМИ. 2020. т. 491. с. 66–93.

[16] *Канторович Л. В.* О некоторых разложениях по полиномам в форме С. Н. Бернштейна // ДАН. 1930. №22. с. 595–600.

[17] *Крякин Ю. В.* О точных константах в теореме Уитни // Матем. заметки. 1993. т. 54. вып. 1. с. 34–51.

[18] *Натансон И. П.* Конструктивная теория функций. — М.–Л. : Гос. изд.-во техн.-теорет. лит. 1949.

[19] *Тихонов И. В., Шерстюков В. Б.* Приближение модуля полиномами Бернштейна // Вестник ЧелГУ. 2012. вып. 15. с. 6–40.

[20] *Юдин Д. Б., Гольштейн Е. Г.* Задачи и методы линейного программирования. -М.: Изд.-во "Советсвкое радио". 1961.