

ОТЗЫВ

официального оппонента на диссертацию Иванова Александра Валентиновича «Коэффициенты Сили-деВитта: диаграммная техника, нерекурсивная формула, интеграл по путям и теорема Атьи-Зингера-Патоди для многообразия с доменными стенками», представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.03 – математическая физика

Диссертация А.В. Иванова посвящена построению коэффициентов Сили-деВитта и приложению их свойств при доказательстве континуального представления для теплового ядра и теоремы Атьи-Зингера-Патоди для случая многообразий с доменными стенками.

Актуальность темы диссертации

Решение уравнения теплопроводности, тепловое ядро, имеет весьма долгую историю и может рассматриваться в контексте квантовой теории поля. Это связано с тем, что при работе квантово-полевыми моделями появляется необходимость использовать пертурбативные разложения, основными строительными элементами которых являются фундаментальные решения оператора Лапласа. К сожалению, в общей постановке не представляется возможным получить формулу для решения, поэтому и используется его асимптотическое разложение. Одним из ключевых методов нахождения такого разложения является метод собственного времени, который впервые появился в 1937 году в работе В.А. Фока. Этот метод основан на введении дополнительной координаты, собственного времени, и дальнейшем переходе к решению уравнения теплопроводности.

Несмотря на тот факт, что введение нового параметра формально усложняет постановку задачи, на практике это приводит к упрощениям. Дело в том, что такой подход позволяет изучить асимптотическое решение уравнения теплопроводности при малых значениях собственного времени и получить коэффициенты этого разложения, коэффициенты Сили-деВитта. Важно обратить внимание, что эти объекты важны не только для работы с фундаментальными решениями, но и при исследовании различных спектральных функций операторов Лапласа и Дирака.

В настоящее время круг применений коэффициентов Сили-деВитта и их свойств только расширяется. Это связано прежде всего с увеличением числа

новых физических моделей, компьютеризацией вычислений, а также с улучшением математического аппарата.

Структура диссертации

Диссертация А.В. Иванова состоит из введения, трех глав и заключения. Во введении рассматривается актуальность исследуемого вопроса. В качестве основного аргумента диссертант предлагает многочисленные примеры приложений и задач, многие из которых являются открытыми и на сегодняшний день. Тема исследований рассматривается не только с математической стороны, но и с физической. Все аргументы подкреплены точными ссылками.

В Главе 1 представлена диаграммная техника для построения коэффициентов Сили-деВитта на основе одной линии и двух вершин. В качестве оператора Лапласа рассматривается двойная ковариантная производная в пространстве с плоской метрикой и гладким калибровочным потенциалом. Обобщение техники на случай, когда к оператору Лапласа добавляется оператор умножения на гладкую функцию, достигается путем введения дополнительной вершины. Предлагаемая рекурсивная техника допускает матричную запись, что позволяет преобразовать кропотливый процесс вычисления ковариантных производных в набор операций линейной алгебры. В результате представленный метод оказывается удобен для применения с использованием компьютерной техники. В дополнение к рекурсивной технике в Главе 1 также дается вывод нерекурсивной формулы для следовых частей и присутствуют различные примеры для проверки метода.

Главу 2, в действительности, можно разделить на две части. В первой представлено обобщение нерекурсивной формулы для следовых частей коэффициентов Сили-деВитта на произвольный оператор Лапласа с гладкими коэффициентами. В качестве примера рассматривается оператор на Римановой многообразии с гладким метрическим тензором и произвольным гладким потенциалом. Во второй части обсуждается вывод континуального представления без предельного перехода. Доказательство основано на использовании рекуррентных соотношений на коэффициенты.

Глава 3 посвящена доказательству теоремы Атьи-Зингера-Патоли об индексе для многообразий с доменными стенками. Такой тип граничных условий появился относительно недавно и является полезным в физических приложениях. С математической точки зрения это приводит к анализу оператора Лапласа с дельта потенциалом, что, в свою очередь, ведет к

сингулярным слагаемым в плотности Понтрягина. В Главе 3 диссертант явно представляет способ нахождения сингулярности, основанный на введении регуляризации специального вида. Стоит отметить, что дается не только вывод формулы, но и ее обоснование путем доказательства инвариантности индекса.

Основные результаты и научная новизна

Построена диаграммная техника для нахождения коэффициентов Сили-деВитта вне диагонали, проанализирован переход к следовым частям коэффициентов, получена и доказана новая нерекурсивная формула для следовых частей коэффициентов Сили-деВитта для оператора Лапласа с гладкими коэффициентами в общей постановке. Также представлен новый вывод континуального представления. Доказана теорема Атьи-Зингера-Патоли об индексе для многообразий с доменными стенками и инвариантность индекса относительно регуляризации. Все результаты являются новыми и актуальными.

В качестве замечаний можно отметить следующее. В Главе 1 предлагается рекурсивная диаграммная техника, которая явно должна быть удобна для ее использования с привлечением компьютера, однако этот момент никак не подчеркивается в тексте диссертации. Какое-то обсуждение возможных плюсов или минусов предлагаемой техники при попытке ускорить вычисления с помощью компьютера могли бы оказаться полезными для ее последующего использования. Также хочется отметить некоторую оборванность изложения в конце каждой из глав – было бы полезно как-то подытоживать полученные в соответствующих главах результаты. Отсутствие заключительных слов в каждой из глав частично, но не вполне (в особенности в отношении глав 1 и 2), компенсируется общим заключением диссертации.

Сделанные замечания не снижают общей положительной оценки диссертации, которая является оригинальным исследованием, выполненным на высоком научном уровне. В целом диссертация производит очень хорошее впечатление, она содержит важные и интересные результаты. Текст диссертации хорошо читается, автору удалось успешно выдержать баланс между математической строгостью и понятностью изложения. Текст почти свободен от опечаток, а иногда используемые не совсем стандартные для научной работы обороты, например, "задача приобретает более затейливый вид", скорее украшают текст.

Результаты работы своевременно и полно опубликованы в шести изданиях, входящих в список ВАК, а также докладывались на международных

конференциях и семинарах в различных организациях, занимающихся данной областью математической физики. Автореферат правильно отражает содержание диссертации.

Диссертация А.В. Иванова «Коэффициенты Сили-деВитта: диаграммная техника, нерекурсивная формула, интеграл по путям и теорема Атьи-Зингера-Патоди для многообразия с доменными стенками» полностью соответствует всем требованиям ВАК, предъявляемым к кандидатским диссертациям, а ее автор вне всяких сомнений заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.03 – математическая физика.

Официальный оппонент:

профессор кафедры физики высоких энергий и элементарных частиц
Федерального государственного бюджетного образовательного
учреждения высшего образования «Санкт-Петербургский
государственный университет»,
доктор физ.-мат. наук, доцент
Пастон Сергей Александрович

Адрес служебный: 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., д.7-9
Телефон: 8(812)428-45-53
E-mail: s.paston@spbu.ru

Дата: 11.05.2020 г



11.05.2021

