ОТЗЫВ

официального оппонента о диссертации А. В. Смаля

“Доказательство нижних оценок
на размер формул для булевых функций
методами коммуникационной сложности”,

представленной на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
по специальности 01.01.06 — математическая логика,
алгебра и теория чисел.

Предмет данной диссертации относится к одному из разделов математической логики — к теории сложности вычислений. В работе исследуются различные подходы к описанию формульной сложности булевых функций. Для этого автор развивает и применяет теоретико-информационные методы, а также методы, использующие коммуникационную сложность. Развитая в работе техника позволяет получить серию новых нижних оценок на сложность булевых функций.

Напомним, что булевы формулы — один из естественных способов описания функций, аргументы и значения которых принимают значения *истина* или *ложь*. Представление о том, что всякую булеву функцию можно задать формулой, использующей базовые операции конъюнкции, дизъюнкции и отрицания, стало общепринятым задолго до возникновения теории сложности вычислений. Но, по-видимому, лишь в середине двадцатого века математики задались вопросом о минимальной *сложности* (размере) формулы, которой можно задать ту или иную конкретную функцию. Ситуация с описанием сложности булевых функций парадоксальна. С одной стороны, нетрудно доказать, что большинство функций n аргументов невозможно задать достаточно короткими формулами — коротких формул просто не хватит на все существующие функции. Подсчет показывает, что максимальная формульная сложность функции n аргументов должна расти экспоненциально с увеличением n. С другой стороны, очень трудно доказать для какой-то конкретной функции, что её нельзя задать никакой короткой формулой.

Вопрос о доказательстве нижних оценок для формульной сложности явно заданных функций изучается уже более 60 лет, начиная с работ Б. Субботовской (1961). Важные результаты были получены Э. Нечипоруком (1966) и В. Храпченко (1971); ставший классическим пример “сложной” явно заданной булевой функции был предложен А. Андреевым (1987). Развитие комбинаторных методов нижних оценок достигло своего пика в работе Дж. Хостада (1998), где была доказана кубическая нижняя оценка для булевой сложности функции Андреева. На этом развитие данного направления теории затормозилось: оказалось, что классические комбинаторные методы не позволяют добиться существенно более сильных результатов, и ни одной сверхкубической оценки на сложность функций до сегодняшнего дня доказано не было.

Надежда на дальнейший прогресс в данной области связывается с новыми математическими инструментами. Некоторые из этих инструментов связаны с формальным анализом “потоков информации”, которые можно выявить в процессе вычисления значения булевой формулы. Речь идёт о коммуникационной сложности в